Секция 5 «Прикладная небесная механика и управление движением»

ДИСКРЕТНЫЕ МНОЖЕСТВА ПСЕВДОУПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Ю.П. Улыбышев
Ракетно-космическая корпорация «Энергия» им. С.П. Королева

Содержание

- Современное линейное программирование
- Основная цель
- Первый этап: множества псевдоимпульсов для оптимизации траекторий космических аппаратов
- Формулировка задачи оптимального управления
- ключевая идея : новая концепция дискретных множеств псевдоуправления
- преобразование к форме линейного программирования
- Пример 1: минимизация пути при нелинейных ограничениях
- Пример 2: траектория спуска с максимальной боковой дальностью
- Заключение

СОВРЕМЕННОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Революция в линейном программировании в 1990 годы - разработка алгоритмов внутренней точки (на базе работ Л.Т. Хачияна и Н. Кармаркара):

- **Могут решать задачи с числом неизвестных переменных порядка сотен тысяч;**
- **Полиномиальная сходимость - поиск внутри допустимой области, а не по границам как в симплекс методе;**
- **Защищены от вырожденности.**

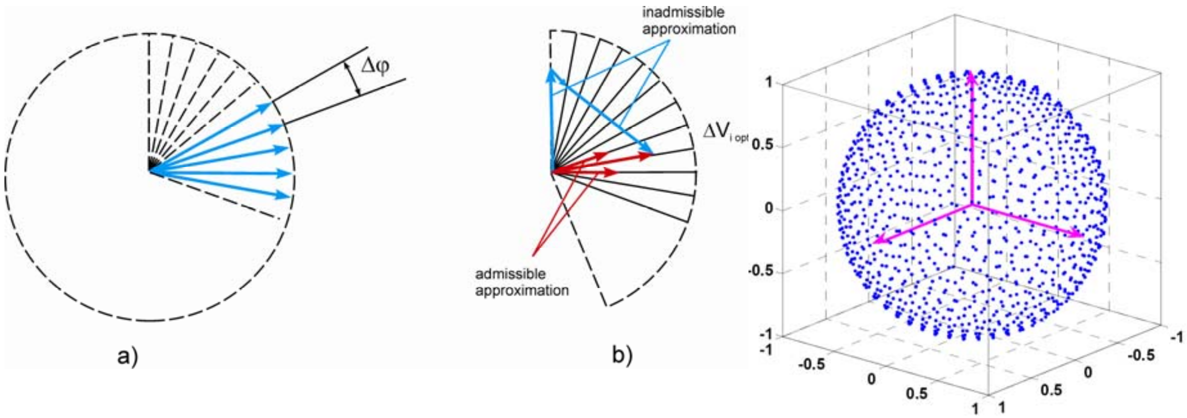
ОСНОВНАЯ ЦЕЛЬ

- **дальнейшее развитие концепции множеств псевдоимпульсов (использовалась для оптимизации траекторий космических аппаратов) для более общей задачи оптимального управления;**
- **основа - введения искусственных или псевдопеременных, что позволит преобразовать задачу к форме классического линейного программирования.**

ПЕРВЫЙ ЭТАП: МНОЖЕСТВА ПСЕВДОИМПУЛЬСОВ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ ТРАЕКТОРИЙ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

- Дискретизация траектории на малые сегменты
- Множества псевдоимпульсов для каждого сегмента $\Delta V_i^{(j)}$ - дискретная аппроксимация возможных направлений вектора тяги $\mathbf{e}_i^{(j)}$.

Для оптимального импульса $\Delta V_{i\,opt}$ на *i*-ом сегменте $\Delta \mathbf{V}_{i\,\mathrm{opt}} = \sum_{1}^{k} \Delta V_i^{(j)} \mathbf{e}_i^{(j)}$



Матричное неравенство для сумм псевдоимпульсов $\Delta V_i^{(j)}$ на каждом сегменте $\Rightarrow$ преобразует задачу к форме классического линейного программирования.

$$\sum_{1}^{k} \Delta V_i^{(j)} \le \Delta V_{i\,\max} \equiv 1$$

Литература

1. Ulybyshev Y. Continuous thrust orbit transfer optimization using large-scale linear programming // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2007. V.30. №2. P. 427-436.
2. Улыбышев Ю.П. Оптимизация многорежимных траекторий сближения с ограничениями // Космические исследования. 2008. Т.46, №2. С. 133-147.
3. Улыбышев Ю.П. Концепция множеств псевдоимпульсов для оптимизации траекторий космических аппаратов // Полет. 2008. №2. С. 52-60.
4. Ulybyshev Y. Spacecraft Trajectory Optimization Based on Discrete Sets of Pseudo-Impulses // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2009. V.32. №4. P. 1209-1217.

ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ:

Математическая модель

- **Уравнеия движения:** $\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{Y}, \mathbf{U}, t)$;
- **Вектор состояния:** **Y**;
- **Вектор управления** : $\mathbf{U}(t) \in \Omega \subseteq R^{\xi}$;
- **Функционал** $J = \int_{t_0}^{t_f} q(\mathbf{Y},\ \mathbf{U},\ t)\, dt$; Начальное t_0 и конечное t_f времена заданы**.**
- **Конечные условия:** $\mathbf{F}(\mathbf{Y}, \mathbf{U}, t_f) = \mathbf{P}_\mathrm{f}$;
- **Ограничения во внутренних точках** $S\ (\mathbf{Y},\ t) - b(t) \le 0 \quad t_0 \le t_b \le t \le t_e \le t_f$.

Дискретизация траектории и допущения

- n малых сегментов $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$;
- Предполагается, что приближенные значения частных производных в узлах известны;
- Постоянное управление на каждом сегменте

$$\mathbf{P_f} = \mathbf{F}(\mathbf{Y}_0, \mathbf{U}_0, 0) + \sum_{i=1}^{i=n} \Delta\mathbf{F}(\mathbf{Y}_i, \mathbf{U}_i, t_i, \Delta t_i) = \mathbf{F}_0 + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Y}_i, \mathbf{U}_i, t_i)}{\partial t} \cdot \Delta t_i$$

$\Delta\mathbf{F}$ - возможное изменение на i-ом сегменте; $\partial\mathbf{F}/\partial t$ - частная производная.

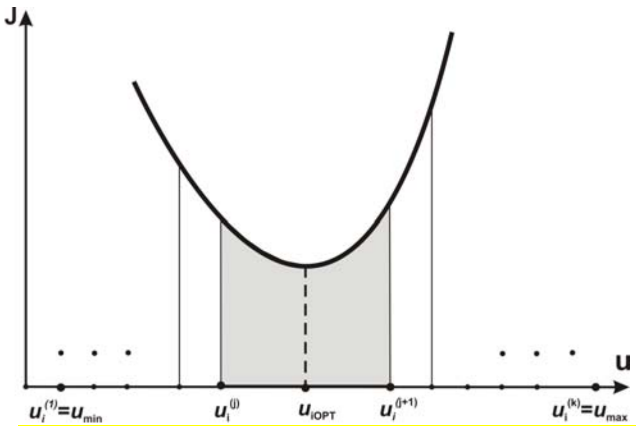
КЛЮЧЕВАЯ ИДЕЯ : НОВАЯ КОНЦЕПЦИЯ ДИСКРЕТНЫХ МНОЖЕСТВА ПСЕВДОУПРАВЛЕНИЯ

Дискретная аппроксимация допустимого пространства управления множеством псевдоуправления на каждом сегменте с дополнительным ограничением в форме равенства.

Простейший случай непреывного управления – скалярная функция.

Для оптимального значения $u_{i\mathrm{OPT}} \in \Omega \equiv [u_{\min}, u_{\max}]$ **на *i*-ом сегменте** $\left.\dfrac{\partial J}{\partial u}\right|_{t=t_i, u=u_{iopt}} \equiv 0$

Функционал в окрестности оптимального значения



На каждого сегменте дискретное множество псевдоуправления $u_i^{(j)} \in \Omega \equiv [u_{\min}, u_{\max}]$, $j = \overline{1,k}$.

Оптимальное значение $\Rightarrow$

$$u_{i\mathrm{OPT}} = \sum_{j=1}^{j=k} x_i^{(j)} \cdot u_i^{(j)} , \quad \sum_{j=1}^{j=k} x_i^{(j)} = 1, \quad 0 \le x_i^{(j)} \le 1$$

Оптимальная аппроксимация $u_{i\mathrm{OPT}} \Rightarrow$ **сумма смежных значений псевдоуправления** $x_i^{(j)} u_i^{(j)} \le u_{i\mathrm{OPT}} \le x_i^{(j+1)} u_i^{(j+1)}$.

Многомерный случай

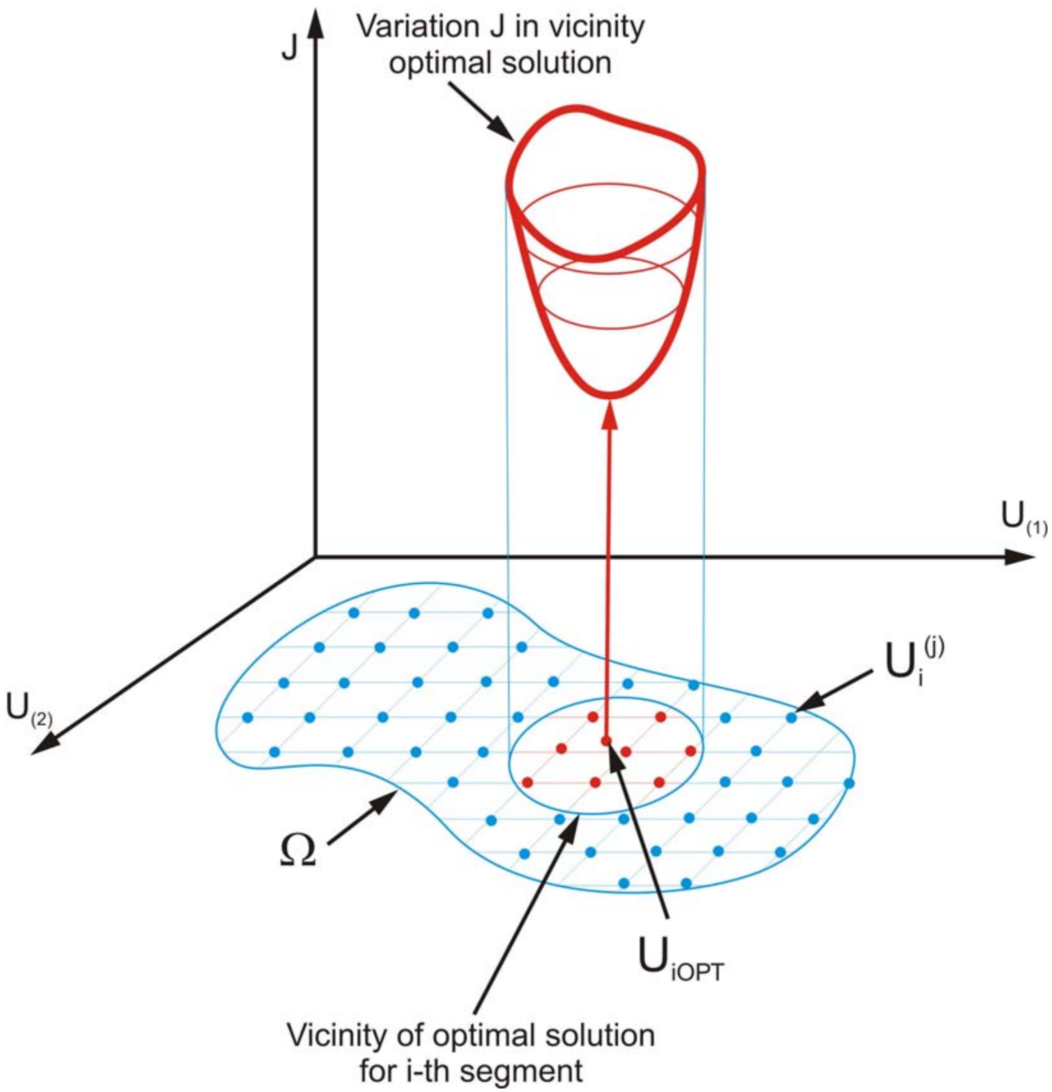
Для каждого сегмента множество векторв псевдоуправления $\Rightarrow$ многомерная сетка

Функционал в окрестности оптимального вектора

$\Rightarrow$ положительно определенная квадратичная форма

Для каждого сегмента ограничивается сумма $\Rightarrow$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{j=k} x_i^{(j)} = 1}$$



ФОРМА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Вектор неизвестных переменных (*n*×*k*):

$$\mathbf{X}^{\mathrm{T}} = [x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \ldots x_1^{(k)}, x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, \ldots x_2^{(k)}, \ldots x_n^{(k)}]$$

Главное матричное уравнение $\mathbf{A}_e^*\mathbf{X} = \mathbf{P}_d$,

Базовая разряженная матрица размерностью *n*×(*n*×*k*) ⇒

- *n* - число сегментов
- *k* – число векторов псевдоуправления на каждом сегменте

$$\mathbf{A}_e^* = \left.\underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{111\ldots1}_{\mathrm{k}} & & & \\ & \underbrace{111\ldots1}_{\mathrm{k}} & & \\ & & \ldots\ldots. & \\ & & & \underbrace{111\ldots1}_{\mathrm{k}} \end{bmatrix}}_{\mathrm{n\times k}}\right\}\mathrm{n}$$

$$\mathbf{P}_d^T = [1,\ 1,\ 1\ldots..1,\ 1].$$

Терминальные условия

$$\Delta \mathbf{P_f} = \mathbf{P_f} - \mathbf{F}(\mathbf{Y}_0, \mathbf{U}_0, 0) = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=k} x_i^{(j)} \Delta \mathbf{F}(\mathbf{Y}_i, \mathbf{U}_i^{(j)}, t_i, \Delta t_i)$$

$\mathbf{U}_i^{(j)}$ - вектор псевдоуправления.

Конечное линейное матричное уравнение - $\mathbf{A_e X} = \mathbf{P}$,

где $\mathbf{P}^T = [\mathbf{P}_d^T, \Delta\, \mathbf{P}_f^T]$, $\mathbf{A_e}$ - матрица размерностью $(n+m)\times(n\times k)$:

Матричное неравенство для ограничений неравенств во внутренних точках $\mathbf{AX} \leq \mathbf{b}$

Вектор весовых коэффициентов размерностью ($n\times k$)

$$\mathbf{q}^T = [q_1^{(1)}, q_1^{(2)}, \ldots, q_1^{(k)}, \ldots\ldots, q_i^{(j)}, \ldots\ldots q_n^{(k-1)}, q_n^{(k)}],\quad q_i^{(j)} = q(\mathbf{Y}_i, \mathbf{U}_i^{(j)}, t_i)$$

РЕЗУЛЬТАТ – КЛАССИЧЕСКАЯ ФОРМА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ЛИНЕЙНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ В ВИДЕ РАВЕНСТВ И НЕРАВЕНСТВ И НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ НЕИЗВЕСТНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

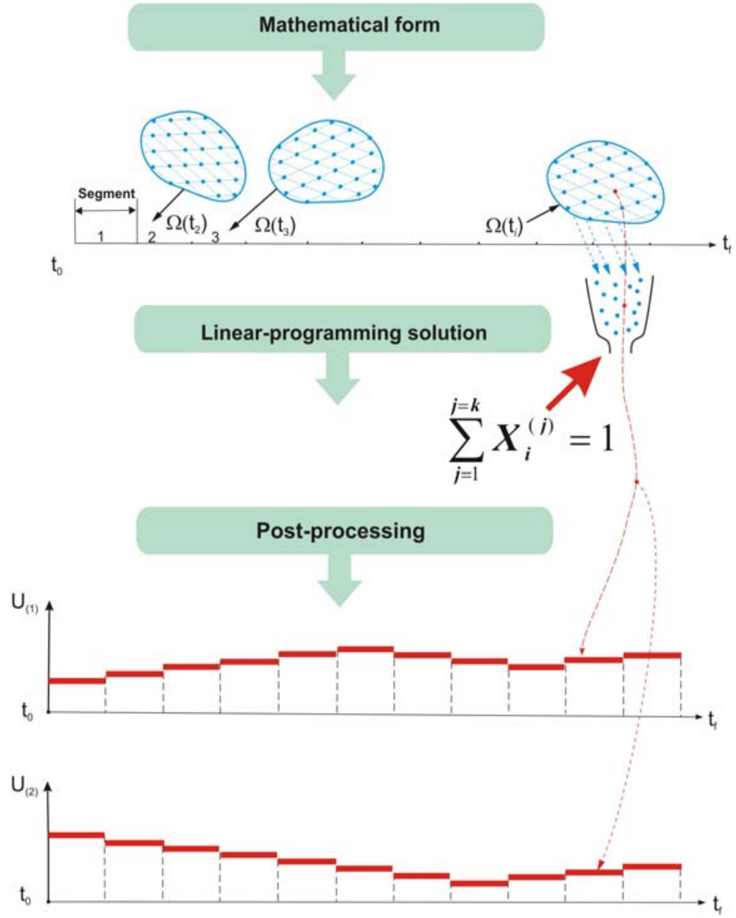
$$J = \min\left(\mathbf{q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{X} \right), \qquad 0 \leq x_i^{(j)} \leq 1$$

Вычислительные и качественные аспекты :

- Высокая размерность задачи, например:
  - 100 сегментов
  - 1000 векторов псевдоуправления на каждом сегменте

  $\Rightarrow$ число неизвестных переменных 100,000

  Для m=2, размерность матрицы A_e $(1000+2)\times100000$, но это разряженная матрица с очень малым числом ненулевых элементов (~0.1%).



- Все сегменты формально рассматриваются независимо от друг друга $\Rightarrow$ дополнительная обработка решений $\Rightarrow$

- В линейных системах частные производные известны. В нелинейных системах, как правило, частные производные априори неизвестны $\Rightarrow$ требуются итеративные методы

ПРИМЕР 1: МИНИМИЗАЦИЯ ПУТИ ПРИ НЕЛИНЕЙНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

Плоское движение аппарата с постоянной скоростью $\Rightarrow$ $\begin{cases} \dfrac{dr_x}{dt} = V\cos[\Theta(t)] \\ \dfrac{dr_y}{dt} = V\sin[\Theta(t)] \end{cases}$

- r_x, r_y -координаты;
- V – скорость;
- **$\Theta(t)$ – управление – угол наклона траектории.**

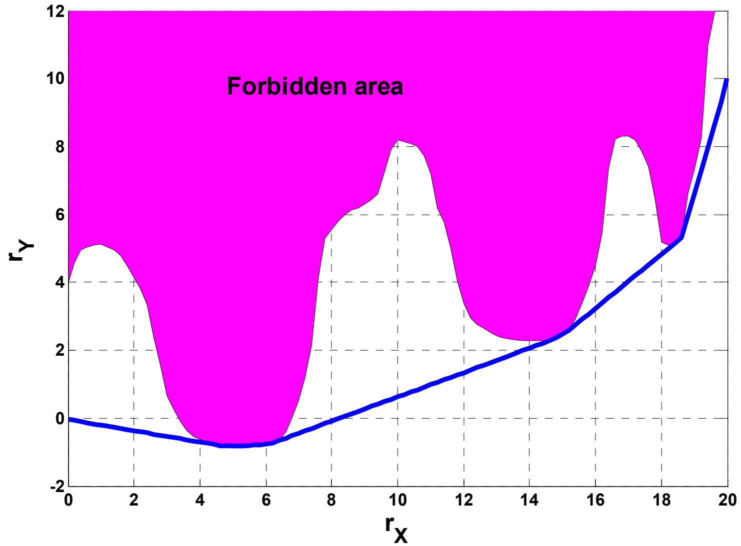
Задача оптимального управления: найти минимальный путь из начальной точки (r_{x0} , r_{y0}) в конечную точку (r_{xf} , r_{yf}) с ограничениями на траекторию $[r_x(t), r_y(t)] \notin \Phi$ (где Φ - запрещенная область). Предполагается, что одна из двух переменных - монотонная $\Rightarrow$ $dr_y / dr_x = \tan[\Theta(r_x)]$

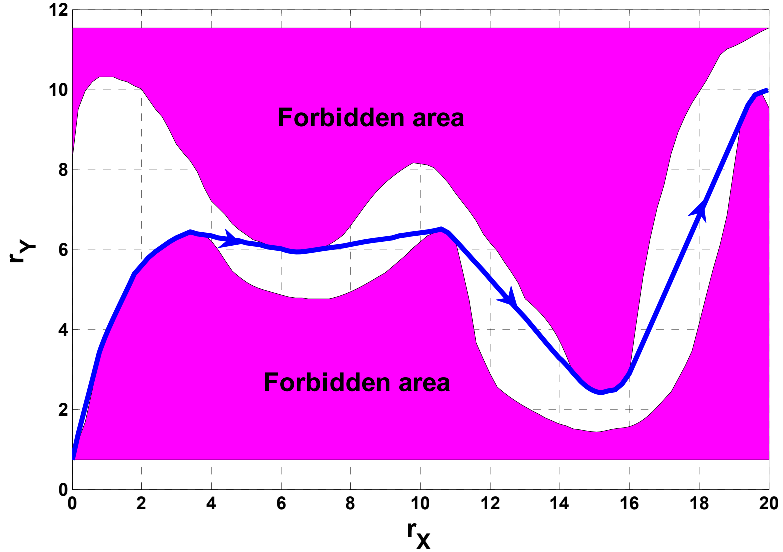
Критерий оптимизации $\Rightarrow$ $J = \int\limits_{r_{x0}}^{r_{xf}} \dfrac{1}{V\cos[\Theta(r_x)]} dr_x$

Число сегментов n=101 и k=176 равномерно распределенных значений псевдоуправления $\Theta_i^{(j)}$ на каждом сегменте. Частные производные $\dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial \varphi_i^{(j)}} = \Delta r_x \tan(\Theta_i^{(j)})$. Коэффициенты функционала $q_i^{(j)} = \dfrac{\Delta r_x}{V\cos(\Theta_i^{(j)})}$

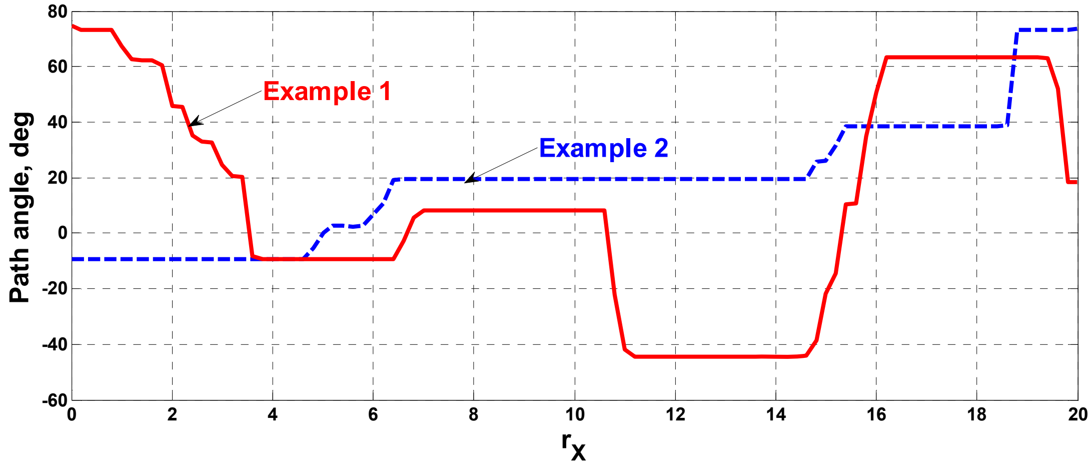
Ограничения для верхней границы $S = r_y - b_{ry}(r_x) \le 0$ и для нижней $S = -r_y + b_{ry}(r_x) \le 0$

Результаты: **Пример А** **Пример Б**





Управление



ПРИМЕР 2: ОПТИМИЗАЦИЯ ТРАЕКТОРИИ СПУСКА КА С МАКСИМАЛЬНОЙ БОКОВОЙ ДАЛЬНОСТЬЮ

Удельная энергия как независимая переменная $E=\frac{1}{2}V^2-[(\mu/r\ )-(\mu/r_e)]$ $\Rightarrow$ $\dot{E}=-VX$

(X – ускорение от силы лобового сопротивления)

Уравнения движения $\Rightarrow$

$$\left\{\begin{aligned}
r' &= -\sin\Theta / X \\
\varphi' &= -\frac{\cos\Theta\cos\Psi}{Xr\cos\lambda} \\
\lambda' &= -\frac{\cos\Theta\sin\Psi}{Xr} \\
V' &= \frac{X+g\sin\Theta}{XV} \\
\Theta' &= -\frac{\left[Y\cos\sigma-\left(g-\left(V^2/r\right)\right)\cos\Theta\right]}{XV^2} \\
\Psi' &= -\frac{1}{XV^2}\left[\frac{Y\sin\sigma}{\cos\Theta}-\frac{V^2\cos\Theta\cos\Psi\tan\lambda}{r}\right]
\end{aligned}\right.$$

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ: определить вектор управления $\mathbf{U}^T(E)=\left[\alpha(E),\sigma(E)\right]^T$ обеспечивающий максимизацию боковой дальности.

Задача является нелинейной – частные производные заранее неизвестны.

Итеративный метод $\Rightarrow$ Задаем начальный закон управления $\mathbf{U}_{(0)}(E)$ и *n* сегментов *k* векторами псевдоуправления на каждом сегменте $\mathbf{U}_i^{(j)}$

- Частные производные вдоль траектории

$$\Delta F(\mathbf{Y}_i, \mathbf{U}_i^{(j)}, E_i, \Delta E) = r'(\mathbf{Y}_i, \mathbf{U}_i^{(j)}, E_i)\Delta E + \frac{1}{2} r''(\mathbf{Y}_i, \mathbf{U}_i^{(j)}, E_i)\Delta E^2$$

$$\Delta S(\mathbf{Y}_i, \mathbf{U}_i^{(j)}, E_i, \Delta E) = -\left[\lambda'(\mathbf{Y}_i, \mathbf{U}_i^{(j)}, E_i)\Delta E + \frac{1}{2}\lambda''(\mathbf{Y}_i, \mathbf{U}_i^{(j)}, E_i)\Delta E^2\right]$$

- Решение линейного программирования и его обработка $\Rightarrow$ уточненное управления $\mathbf{U}_{(1)}^{*}(E)$.
- Новый закон управления – комбинация уточненного и управления с предыдущей итерации

$$\mathbf{U}_{(1)}(E) = \mu_{\mathrm{U}}\mathbf{U}_{(1)}^{*}(E) + (1-\mu_{\mathrm{U}})\mathbf{U}_{(0)}(E)$$

- Расчет новой траектории
- Обновление частных производных и т.д.

Пример – КА с аэродинамическим качеством К~0.6. Начальные и конечные условия:

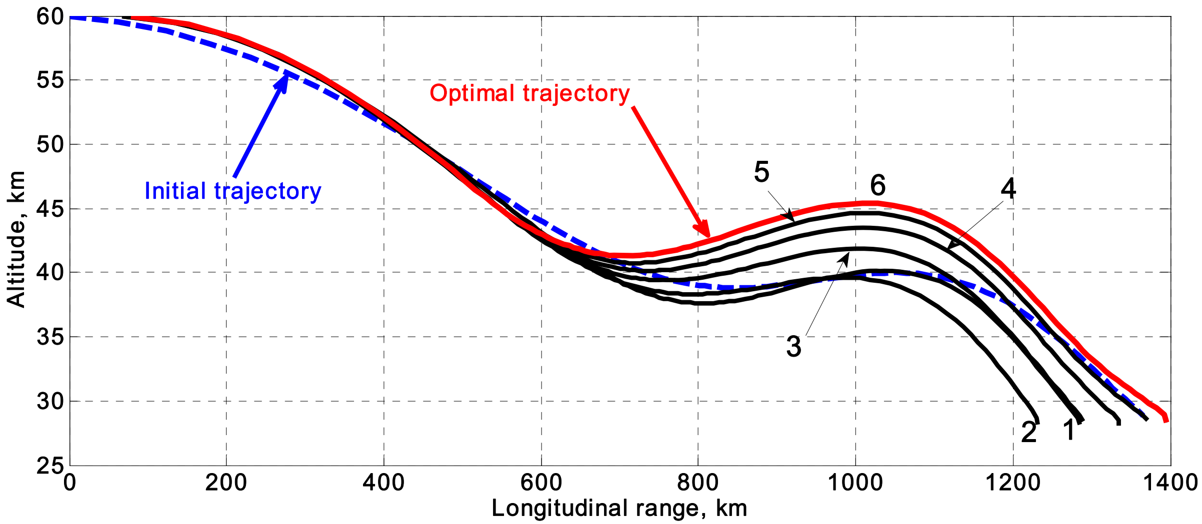
$\mathbf{Y}_0^T = \left[r_0 = 6438 km (h = 60 km); \varphi_0 = 0; \lambda_0 = 0; V_0 = 6.0 km/\sec; \Theta_0 = -0.25^O; \Psi_0 = 0\right]^T$ и $[r_f = 6396 km (h = 28 km)]$.

Решение: *n*=100 сегментов с *k*=1800 векторами псевдоуправления $\mathbf{U}_i^{(j)}$ - сетка с 40x45 узлами: по углу атаки - $[\alpha = 10 - 30^O, (\Delta\alpha = 0.5^O)]$ и углу крена - $[\sigma = 30^O - 75^O, (\Delta\sigma = 1^O)]$).

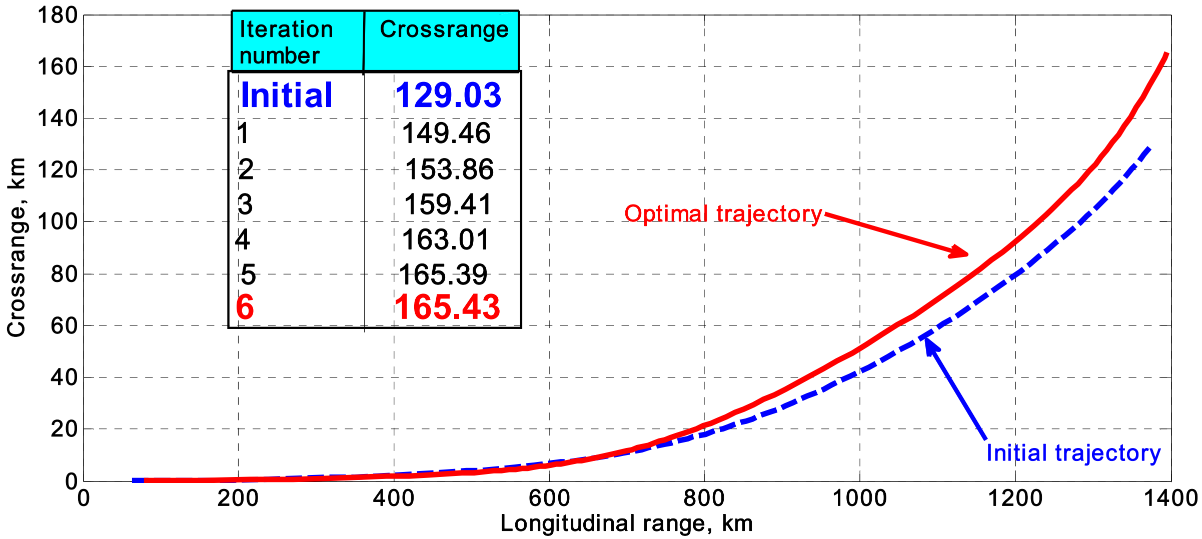
Начальный закон управления $\alpha(E) = 15^O = const$ и $\sigma(E) = 35^O = const$.

Решение включало 6 итераций ($\mu_{\mathrm{U}} = 0.2$).

Вертикальный профиль траектории

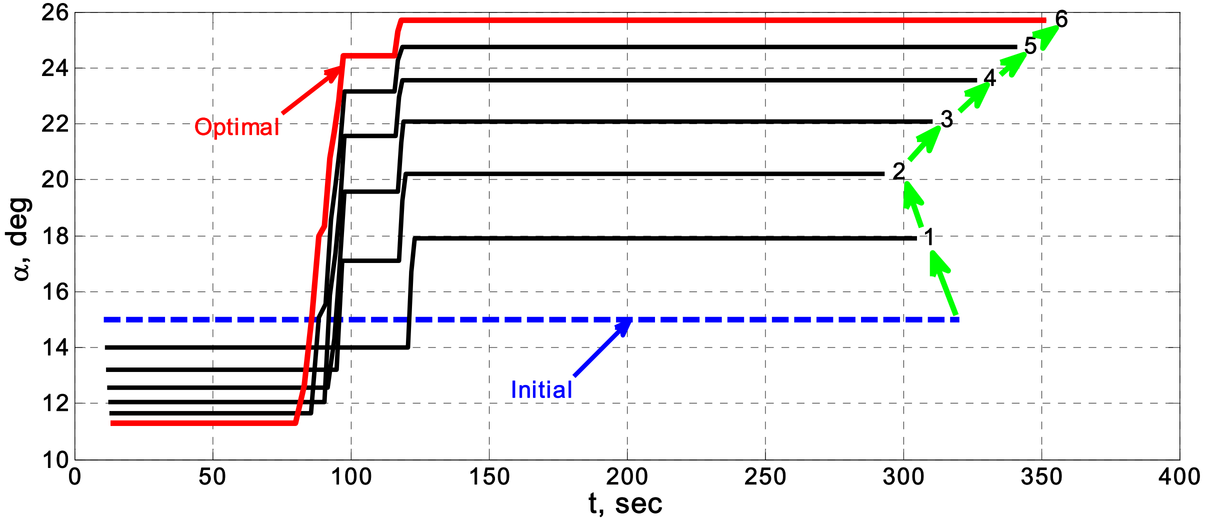


Горизонтальный профиль траектории

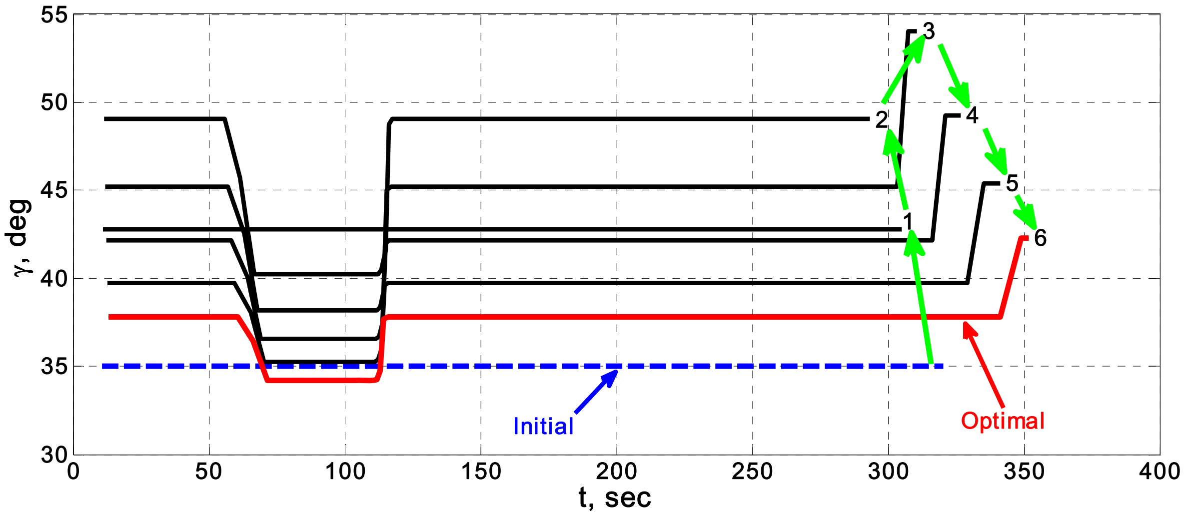


Iteration number	Crossrange
Initial	129.03
1	149.46
2	153.86
3	159.41
4	163.01
5	165.39
6	165.43

Изменение угла атаки



Изменение угла крена



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- **Представлена новая концепция дискретных множеств псевдоуправления для задач оптимального управления.**
- **Используется введение искусственных или псевдопеременных – это существенно увеличивает размерность задачи, однако позволяет преобразовать ее к форме классического линейного программирования.**

- **Методы имеют эффективные возможности для задач оптимального управления с ограничениями.**

ОТКРЫТЫЕ ВОПРОСЫ

Исследование возможностей использования для более широкого круга нелинейных задач.

Email: yuri.ulybyshev@rsce.ru, yuri.ulybyshev@gmail.com