**Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша РАН**

В. А. Сарычев

Равновесные ориентации и устойчивость осесимметричного спутника-гиростата на круговой орбите под действием гравитационного момента

Москва, 2010г.

Уравнения движения спутника-гиростата (круговая орбита)

$$
\begin{aligned}
&A\dot{p}+(C-B)qr-3\omega_0^2(C-B)a_{32}a_{33}-\bar{h}_2 r+\bar{h}_3 q=0,\\
&B\dot{q}+(A-C)rp-3\omega_0^2(A-C)a_{33}a_{31}-\bar{h}_3 p+\bar{h}_1 r=0,\\
&C\dot{r}+(B-A)pq-3\omega_0^2(B-A)a_{31}a_{32}-\bar{h}_1 q+\bar{h}_2 p=0;
\end{aligned} \qquad (1)
$$

$$
\begin{aligned}
&p=(\dot{\alpha}+\omega_0)a_{21}+\dot{\gamma}=\bar{p}+\omega_0 a_{21},\\
&q=(\dot{\alpha}+\omega_0)a_{22}+\dot{\beta}\sin\gamma=\bar{q}+\omega_0 a_{22},\\
&r=(\dot{\alpha}+\omega_0)a_{23}+\dot{\beta}\cos\gamma=\bar{r}+\omega_0 a_{23}.
\end{aligned} \qquad (2)
$$

$$
\begin{aligned}
&a_{11}=\cos(x,X)=\cos\alpha\cos\beta,\\
&a_{12}=\cos(y,X)=\sin\alpha\sin\gamma-\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma,\\
&a_{13}=\cos(z,X)=\sin\alpha\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma,\\
&a_{21}=\cos(x,Y)=\sin\beta,\\
&a_{22}=\cos(y,Y)=\cos\beta\cos\gamma,\\
&a_{23}=\cos(z,Y)=-\cos\beta\sin\gamma,\\
&a_{31}=\cos(x,Z)=-\sin\alpha\cos\beta,\\
&a_{32}=\cos(y,Z)=\cos\alpha\sin\gamma+\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma,\\
&a_{33}=\cos(z,Z)=\cos\alpha\cos\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.
\end{aligned} \qquad (3)
$$

Здесь $\bar{h}_1=\sum_{i=1}^{n} J_i\alpha_i\dot{\varphi}_i,\quad \bar{h}_2=\sum_{i=1}^{n} J_i\beta_i\dot{\varphi}_i,\quad \bar{h}_3=\sum_{i=1}^{n} J_i\gamma_i\dot{\varphi}_i$.

Более удобно использовать параметры

$$\bar{h}_1=\omega_0 h_1,\ \bar{h}_2=\omega_0 h_2,\ \bar{h}_3=\omega_0 h_3.$$

Положения равновесия спутника-гиростата

$\alpha=\alpha_0,\ \beta=\beta_0,\ \gamma=\gamma_0.$

Пусть $A\neq B\neq C$. Тогда из (1) – (2) имеем

$$\begin{aligned}
&(C-B)(a_{22}a_{23}-3a_{32}a_{33})-h_2a_{23}+h_3a_{22}=0,\\
&(A-C)(a_{23}a_{21}-3a_{33}a_{31})-h_3a_{21}+h_1a_{23}=0,\\
&(B-A)(a_{21}a_{22}-3a_{31}a_{32})-h_1a_{22}+h_2a_{21}=0.
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
&4(Aa_{21}a_{31}+Ba_{22}a_{32}+Ca_{23}a_{33})+(h_1a_{31}+h_2a_{32}+h_3a_{33})=0,\\
&Aa_{11}a_{31}+Ba_{12}a_{32}+Ca_{13}a_{33}=0,\\
&(Aa_{11}a_{21}+Ba_{12}a_{22}+Ca_{13}a_{23})+(h_1a_{11}+h_2a_{12}+h_3a_{13})=0.
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
&a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2=1, \quad a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}+a_{13}a_{23}=0,\\
&a_{21}^2+a_{22}^2+a_{23}^2=1, \quad a_{11}a_{31}+a_{12}a_{32}+a_{13}a_{33}=0,\\
&a_{31}^2+a_{32}^2+a_{33}^2=1, \quad a_{21}a_{31}+a_{22}a_{32}+a_{23}a_{33}=0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Прямая задача: заданы параметры A, B, C, h_1, h_2, h_3. Необходимо определить 9 направляющих косинусов.

$$\begin{aligned}
&a_{11}=\frac{4(C-B)a_{32}a_{33}}{F},\quad a_{12}=\frac{4(A-C)a_{33}a_{31}}{F},\quad a_{13}=\frac{4(B-A)a_{31}a_{32}}{F},\\
&a_{21}=\frac{4(I_3-A)a_{31}}{F},\qquad a_{22}=\frac{4(I_3-B)a_{32}}{F},\qquad a_{23}=\frac{4(I_3-C)a_{33}}{F}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Здесь $F=h_1a_{31}+h_2a_{32}+h_3a_{33},\ \ I_3=Aa_{31}^2+Ba_{32}^2+Ca_{33}^2.$

$$
\begin{aligned}
&16[(B-C)^2 a_{32}^2 a_{33}^2 + (C-A)^2 a_{33}^2 a_{31}^2 + (A-B)^2 a_{31}^2 a_{32}^2] = \\
&= (h_1 a_{31} + h_2 a_{32} + h_3 a_{33})^2, \\
&4(B-C)(C-A)(A-B) a_{31} a_{32} a_{33} + \\
&+[h_1 (B-C) a_{32} a_{33} + h_2 (C-A) a_{33} a_{31} + h_3 (A-B) a_{31} a_{32}] \times \\
&\times (h_1 a_{31} + h_2 a_{32} + h_3 a_{33}) = 0, \\
&a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1.
\end{aligned} \tag{8}
$$

I. Частный случай $h_1 = 0,\ h_2 \neq 0,\ h_3 = 0.$ Тогда из (8) следует

$$
\begin{aligned}
&16[(B-C)^2 a_{32}^2 a_{33}^2 + (C-A)^2 a_{33}^2 a_{31}^2 + (A-B)^2 a_{31}^2 a_{32}^2] = h_2^2 a_{32}^2, \\
&(C-A)[h_2^2 - 4(B-A)(B-C)] a_{31} a_{32} a_{33} = 0, \\
&a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Положения равновесия:

$$
\begin{aligned}
&a_{11} = \pm 1,\ a_{22} = a_{11} a_{33},\ a_{33} = \pm 1; \\
&a_{13} = \pm 1,\ a_{22} = -a_{13} a_{31},\ a_{31} = \pm 1; \\
&a_{11} = \pm 1,\ a_{22} = -x,\ a_{23} = -a_{11} a_{32},\ a_{32} = \pm\sqrt{1-x^2},\ a_{33} = -x a_{11}; \\
&a_{13} = \pm 1,\ a_{21} = a_{13} a_{32},\ a_{22} = -y,\ a_{31} = y a_{13},\ a_{32} = \pm\sqrt{1-y^2}; \\
&a_{11} = -4y a_{33},\ a_{12} = -a_{21} a_{33},\ a_{21} = \pm\sqrt{1-16y^2},\ a_{22} = -4y,\ a_{33} = \pm 1; \\
&a_{12} = a_{23} a_{31},\ a_{13} = 4x a_{31},\ a_{22} = -4x,\ a_{23} = \pm\sqrt{1-16x^2},\ a_{31} = \pm 1.
\end{aligned} \tag{10}
$$

Здесь $x = \dfrac{h_2}{4(B-C)},\ y = \dfrac{h_2}{4(B-A)}.$

Условия существования положений равновесия.

Достаточные условия устойчивости положений равновесия (10)

Интеграл энергии (постоянство Гамильтониана) – функция Ляпунова

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(A\bar{p}^2+B\bar{q}^2+C\bar{r}^2)+\frac{3}{2}\omega_0^2[(A-C)a_{31}^2+(B-C)a_{32}^2]+\\&+\frac{1}{2}\omega_0^2[(B-A)a_{21}^2+(B-C)a_{23}^2]-\omega_0^2(h_1a_{21}+h_2a_{22}+h_3a_{23})=const.\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}&A-C>0,\ (B-A)+h_2\bar{a}_{22}>0,\ 4(B-C)+h_2\bar{a}_{22}>0;\\&C-A>0,\ (B-C)+h_2\bar{a}_{22}>0,\ 4(B-A)+h_2\bar{a}_{22}>0;\\&A-C>0,\ C-B>0,\ h_2^2>4(A-B)(C-B)\ or\\&C-A>0,\ C-B>0,\ h_2^2<4(A-B)(C-B);\\&A-C>0,\ A-B>0,\ h_2^2<4(A-B)(C-B)\ or\\&C-A>0,\ A-B>0,\ h_2^2>4(A-B)(C-B);\\&A-C>0,\ A-B>0,\ h_2^2>4(A-B)(C-B);\\&C-A>0,\ C-B>0,\ h_2^2>4(A-B)(C-B).\end{aligned} \tag{12}$$

II. Частный случай $h_1\neq 0,\ h_2=0,\ h_3\neq 0.$

$$\begin{aligned}&16[(B-C)^2a_{32}^2a_{33}^2+(C-A)^2a_{33}^2a_{31}^2+(A-B)^2a_{31}^2a_{32}^2]=\\&=(h_1a_{31}+h_3a_{33})^2,\\&a_{32}\{4(B-C)(C-A)(A-B)a_{31}a_{33}+\\&+[h_1(B-C)a_{33}+h_3(A-B)a_{31}](h_1a_{31}+h_3a_{33})\}=0,\\&a_{31}^2+a_{32}^2+a_{33}^2=1.\end{aligned} \tag{13}$$

III. Общий случай: $h_1 \neq 0,\ h_2 \neq 0,\ h_3 \neq 0.$

$$
\begin{aligned}
&16[(B-C)^2 a_{32}^2 a_{33}^2 + (C-A)^2 a_{33}^2 a_{31}^2 + (A-B)^2 a_{31}^2 a_{32}^2] = \\
&= (h_1 a_{31} + h_2 a_{32} + h_3 a_{33})^2, \\
&4(B-C)(C-A)(A-B) a_{31} a_{32} a_{33} + \\
&+ [h_1 (B-C) a_{32} a_{33} + h_2 (C-A) a_{33} a_{31} + h_3 (A-B) a_{31} a_{32}] \times \\
&\times (h_1 a_{31} + h_2 a_{32} + h_3 a_{33}) = 0, \\
&a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1.
\end{aligned}
\qquad (8)
$$

I. Случай $h_1 = 0,\ h_2 \neq 0,\ h_3 = 0.$

R. W. Longman – 1968; R. W. Longman, P. Hagedorn, A. Beck – 1981;
В. А. Сарычев, С. А. Мирер – 2001; В. А. Сарычев, С. А. Мирер,
А. А, Дегтярев – 2005.

II. Случай $h_1 \neq 0,\ h_2 = 0,\ h_3 \neq 0.$

R. W. Longman – 1971; В. А. Сарычев, С. А. Мирер, А. А. Дегтярев – 2008.

III. Случай $h_1 \neq 0,\ h_2 \neq 0,\ h_3 \neq 0.$

В. А. Сарычев, С. А. Гутник – 1984.

Осесимметричный спутник-гиростат $(A \neq B = C)$.

$$
\begin{aligned}
&4(A-B)a_{21}a_{31}+h_1a_{31}+h_2a_{32}+h_3a_{33}=0,\\
&(A-B)a_{11}a_{31}=0,\\
&(A-B)a_{11}a_{21}+h_1a_{11}+h_2a_{12}+h_3a_{13}=0,\\
&a_{11}^2+a_{12}^2+{}_{13}^2=1, \quad a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}+a_{13}a_{23}=0,\\
&a_{21}^2+a_{22}^2+a_{23}^2=1, \ a_{11}a_{31}+a_{12}a_{32}+a_{13}a_{33}=0,\\
&a_{31}^2+a_{32}^2+a_{33}^2=1, \ a_{21}a_{31}+a_{22}a_{32}+a_{23}a_{33}=0.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Случай 1

$$
\begin{aligned}
&a_{11}=0,\\
&4(A-B)a_{21}a_{31}+h_1a_{11}+h_2a_{32}+h_3a_{33}=0,\\
&h_2a_{12}+h_3a_{13}=0,\\
&a_{12}^2+a_{13}^2=1,\\
&a_{21}^2+a_{22}^2+a_{23}^2=1,\\
&a_{31}^2+a_{32}^2+a_{33}^2=1,\\
&a_{12}a_{22}+a_{13}a_{23}=0,\\
&a_{12}a_{32}+a_{13}a_{33}=0,\\
&a_{21}a_{31}+a_{22}a_{32}+a_{23}a_{33}=0;
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Случай 2

$$
\begin{aligned}
&a_{31}=0,\\
&h_2a_{32}+h_3a_{33}=0,\\
&(A-B)a_{11}a_{21}+h_1a_{11}+h_2a_{12}+h_3a_{13}=0,\\
&a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2=1,\\
&a_{21}^2+a_{22}^2+a_{23}^2=1,\\
&a_{32}^2+a_{33}^2=1,\\
&a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}+a_{13}a_{23}=0,\\
&a_{12}a_{32}+a_{13}a_{33}=0,\\
&a_{22}a_{32}+a_{23}a_{33}=0.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Из (15)–**случай 1**-получаем после достаточно простых вычислений

$$
\begin{aligned}
&a_{11}=0,\quad a_{12}=\pm\frac{h_3}{\sqrt{h_2^2+h_3^2}},\quad a_{13}=\mp\frac{h_2}{\sqrt{h_2^2+h_3^2}},\\
&a_{22}=-a_{13}a_{31},\quad a_{23}=a_{12}a_{31},\\
&a_{32}=a_{13}a_{21},\quad a_{33}=-a_{12}a_{21},\\
&4(A-B)a_{21}a_{31}+h_1a_{31}\mp a_{21}\sqrt{h_2^2+h_3^2}=0,\\
&a_{21}^2+a_{31}^2=1.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Рассмотрим последние два уравнения системы (17), переписав их в виде

$$
\begin{aligned}
&4a_{21}a_{31}+ma_{31}\mp na_{21}=0,\\
&a_{21}^2+a_{31}^2=1,
\end{aligned}
\tag{18}
$$

где $m=\dfrac{h_1}{A-B},\quad n=\dfrac{\sqrt{h_2^2+h_3^2}}{A-B}.$

Систему (18) можно переписать несколько иначе:

$$
\begin{aligned}
&16a_{21}^2+8ma_{21}^3+(m^2+n^2-16)a_{21}^2-8ma_{21}-m^2=0,\\
&a_{31}=\frac{\pm na_{21}}{4a_{21}+m}.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

На рис. 1, 2, 3 представлены три различных варианта взаимного расположения ветвей гипербол и окружности.

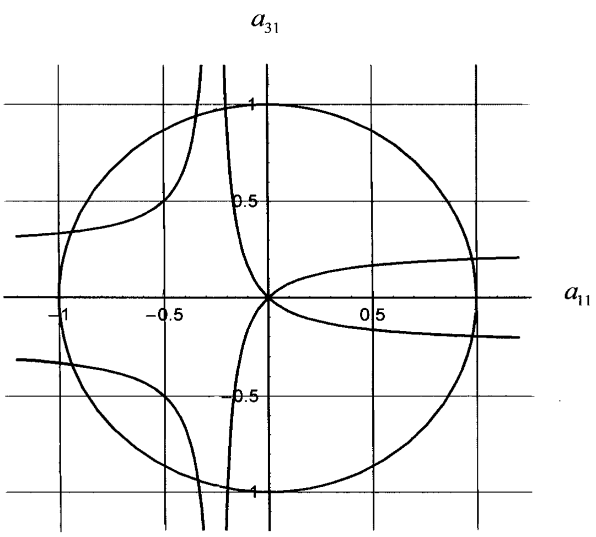

Рис.1. Взаимное расположение окружности и ветвей гиперболы ($m = n = 1$)

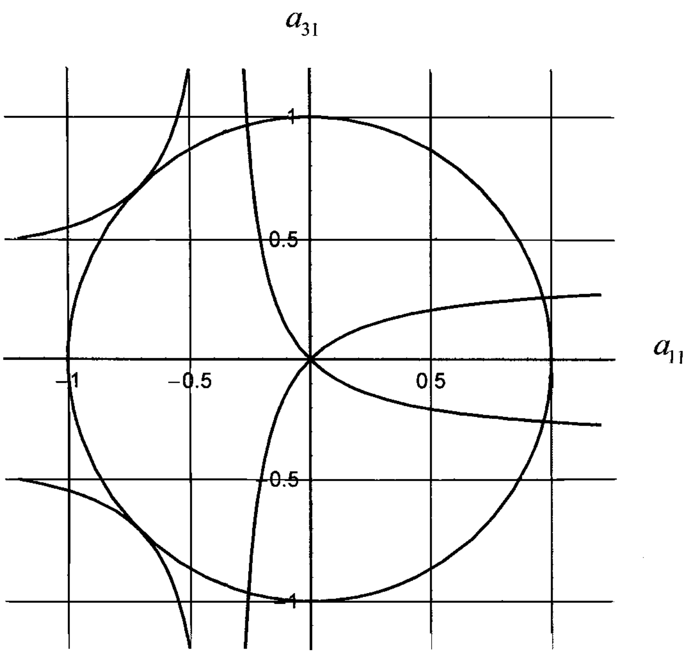

Рис.2. Взаимное расположение окружности и ветвей гиперболы ($m = n = \sqrt{2}$)

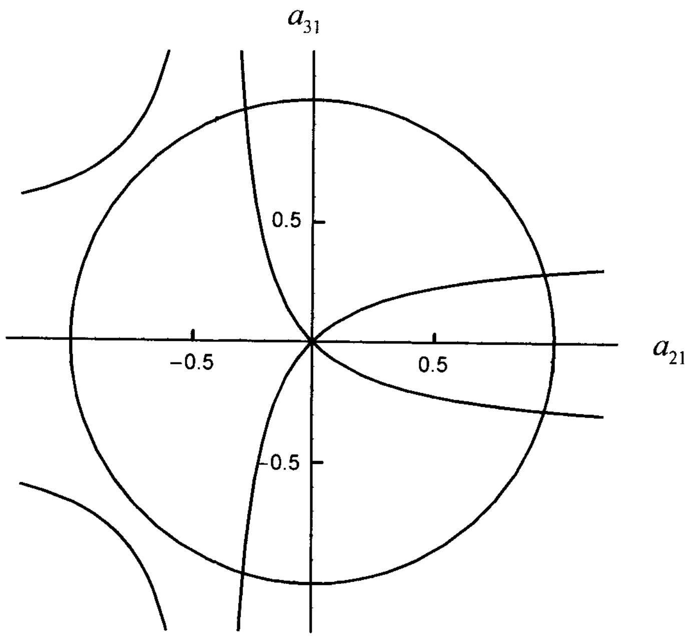

Рис.3. Взаимное расположение окружности
и ветвей гиперболы ($m = n = 1.6$)

Таким образом, система (18), а, следовательно, и система (17) имеет либо восемь, либо четыре решения.

Определим границы в плоскости параметров m, n, разделяющие области с различным числом решений системы (18). Бифуркационными точками являются точки плоскости m, n, принадлежащие одновременно ветвям гипербол, не проходящих через начало координат, и окружности; в бифуркационных точках касательные к гиперболе и окружности совпадают. Опуская достаточно простые выкладки, приходим к уравнению астроиды

$$m^{2/3} + n^{2/3} = 4^{2/3}. \tag{20}$$

В области $m^{2/3} + n^{2/3} < 4^{2/3}$ существуют восемь решений, в области $m^{2/3} + n^{2/3} > 4^{2/3}$ существуют четыре решения.

Случай 2 может быть рассмотрен аналогично. Применив использованный в случае 1 подход, можно показать, что и в случае 2 границей, отделяющей область существования восьми решений от области существования четырех решений, также является астроида

$$m^{2/3}+n^{2/3}=1 \tag{21}$$

На рис.4 представлены астроиды (20) и (21), выделяющие в плоскости m, n три области с различным числом положений равновесия осесимметричного спутника-гиростата. В области $m^{2/3}+n^{2/3}\leq 1$ существуют 16 решений, в области $m^{2/3}+n^{2/3}>1$, $m^{2/3}+n^{2/3}\leq 4^{2/3}$ существуют 12 решений, в области $m^{2/3}+n^{2/3}>4^{2/3}$ существуют 8 решений.

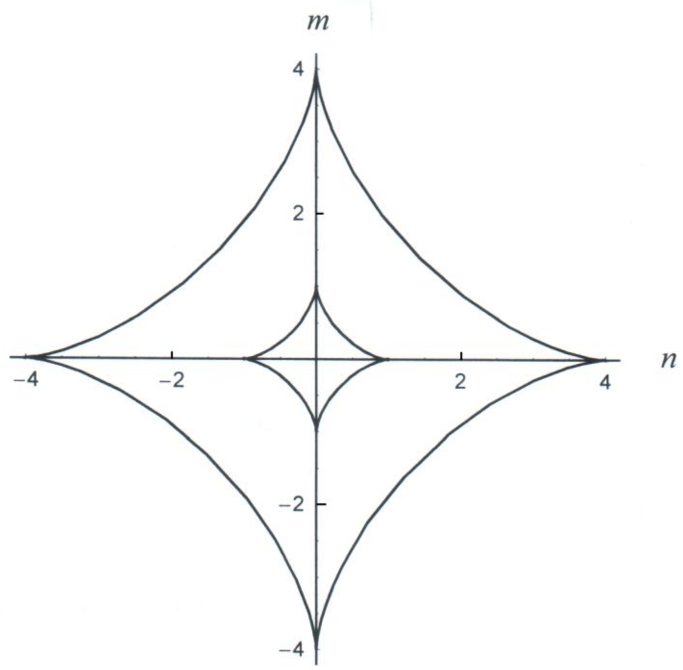

Рис.4. Области существования 16, 12 и 8 положений равновесия

Достаточные условия устойчивости положений равновесия

Интеграл (11) для осесимметричного спутника-гиростата ($B=C$) принимает вид

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}[A\bar{p}^2+B(\bar{q}^2+\bar{r}^2)+\frac{1}{2}(A-B)(3a_{31}^2-a_{21}^2)-\\&-(h_1a_{21}+h_2a_{22}+h_3a_{23})=const.\end{aligned} \qquad (22)$$

Представим

$$\alpha=\alpha_0+\bar{\alpha},\quad \beta=\beta_0+\bar{\beta},\quad \gamma=\gamma_0+\bar{\gamma}\,.$$

Тогда интеграл энергии может быть записан следующим образом:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}[A\bar{p}^2+B(\bar{q}^2+\bar{r}^2)+\frac{1}{2}\{3(B-A)(a_{31}^2-a_{11}^2)\bar{\alpha}^2+\\&+[(B-A)(3\sin^2\alpha_0+1)\cos 2\beta_0+h_1a_{21}+h_2a_{22}+h_3a_{23}]\bar{\beta}^2-\\&-2a_{21}(h_2\sin\gamma_0+h_3\cos\gamma_0)\bar{\beta}\bar{\gamma}+(h_2a_{22}+h_3a_{23})\bar{\gamma}^2\}+\sum=const.\end{aligned} \qquad (23)$$

В **случае 1** $(B-A>0)$ достаточные условия устойчивости выполняются в областях

$$\begin{aligned}&0<\sin\beta_0<1,\\&m+4\sin\beta_0<0\end{aligned} \qquad (24.1)$$

и

$$\begin{aligned}&-1<\sin\beta_0<0,\\&m+4\sin\beta_0>0.\end{aligned} \qquad (24.2)$$

В **случае 2** $(B-A<0)$ достаточные условия устойчивости выполняются в областях

$$\begin{aligned} &0<\sin\beta_0<1, \\ &m+\sin^3\beta_0>0 \end{aligned} \tag{25.1}$$

и

$$\begin{aligned} &-1<\sin\beta_0<1, \\ &m+\sin^3\beta_0<0. \end{aligned} \tag{25.2}$$

Космические исследования, 2010, №2.

Численный счет.

Осесимметричный спутник под действием гравитационного и аэродинамического моментов

Препринт ИПМ, 2010.