Астрокосмический Центр
Физического института им. П.Н. Лебедева РАН

Одноимпульсные перелеты с орбит искусственных спутников на орбиты вокруг точки либрации L_1 или L_2

Крейсман Б.Б.

Москва, 27 января 2010

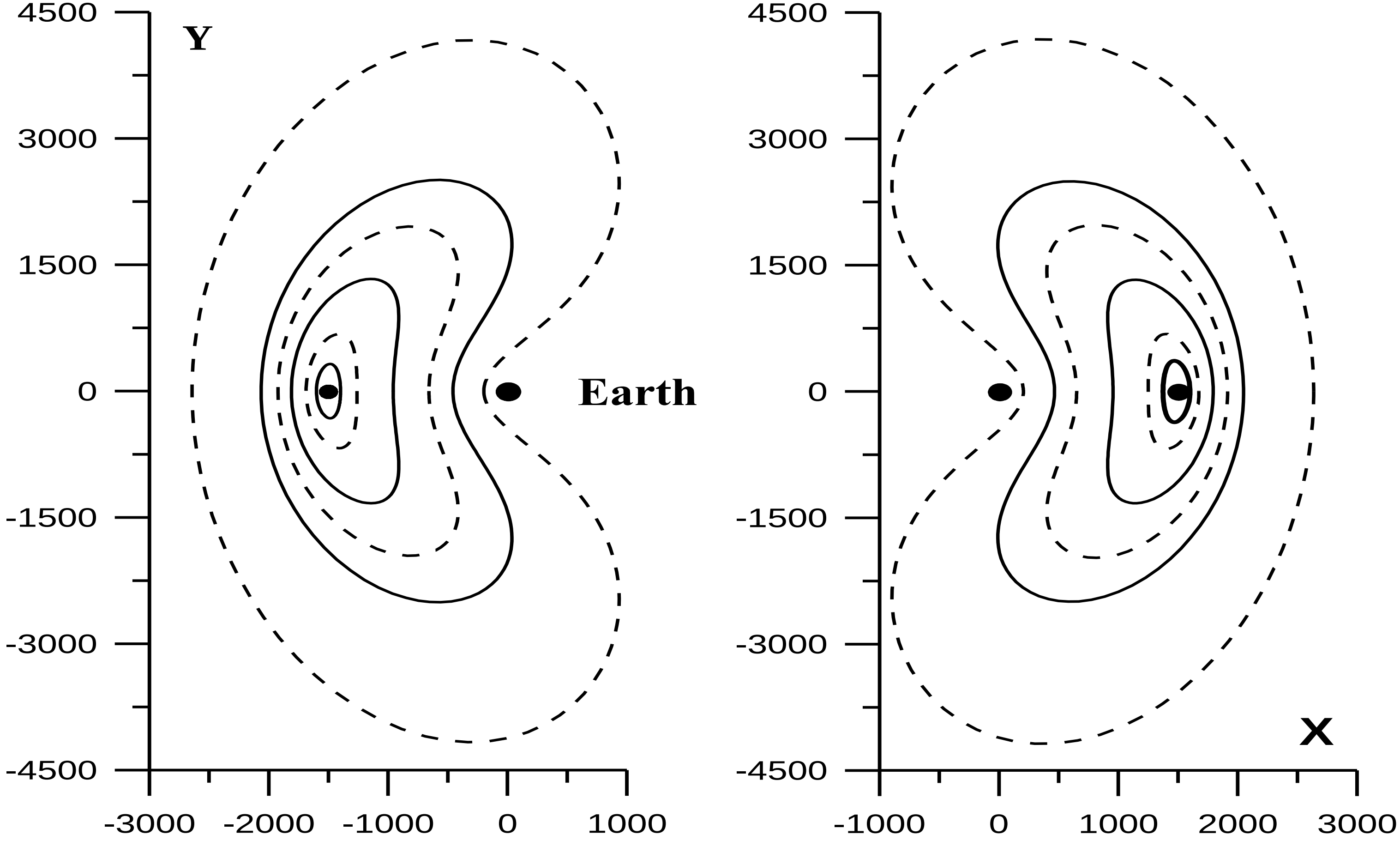
Введение

Орбиты в окрестности точек либрации $\boldsymbol{L_2}$ и $\boldsymbol{L_1}$ привлекательны для многих космических проектов. С точки зрения энергетики наиболее выгодными являются одноимпульсные перелеты с орбит ИСЗ на такие орбиты. Для таких перелетов давно разрабатываются (Robert Farquhar, Михаил Лидов, Александр Шейхет, Натан Эйсмонт) методы расчета. Эти методы достаточно сложны и трудоемки в программной реализации. Аппарат конструирования нужных орбит с помощью периодических решений круговой ограниченной задачи трех тел позволяет намного проще и нагляднее решить эту задачу.

Пространственная ограниченная задача трех тел.

Пусть две материальные точки с массами M_1 и M_2 движутся по круговым орбитам вокруг общего центра масс с угловой скоростью под действием взаимного ньютонианского притяжения, а третье тело имеет пренебрежимо малую массу. Проще всего уравнения движения третьего тела выглядят во вращающейся (синодической) системе координат в безразмерной форме . Начало координат находится в барицентре притягивающих тел, ось X_1 направлена от тела меньшей массы M_2 к телу большей массы M_1. Система вращается против часовой стрелки с угловой скоростью Ω вокруг оси X_3; в качестве единицы времени берется $1/\Omega$, единицы расстояния - расстояние между притягивающими телами, единицы массы - M_1+M_2. В этой системе притягивающие тела неподвижны и имеют координаты $(m_2, 0, 0)$ и $(-m_1, 0, 0)$.

Периодические орбиты вокруг коллинеарных точек либрации L2 (A1= --1508 тыс.км) и L1(A1=-1498 тыс.км) в системе Солнце-(Земля+Луна). Гала орбиты.



Уравнения движения

$$H = \frac{1}{2}(x_4^2 + x_5^2 + x_6^2) + x_2 x_4 - x_1 x_5 - \frac{m_1}{r_1} - \frac{m_2}{r_2},$$

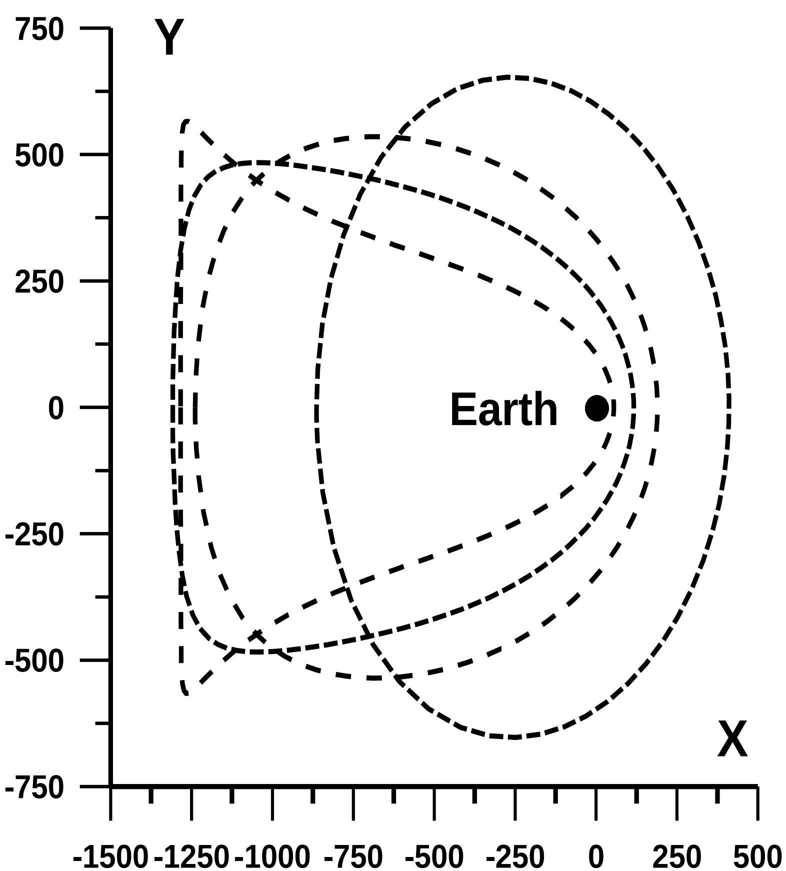
$$r_1^2 = (x_1 - m_2)^2 + x_2^2 + x_3^2, \quad r_2^2 = (x_1 + m_1)^2 + x_2^2 + x_3^2$$

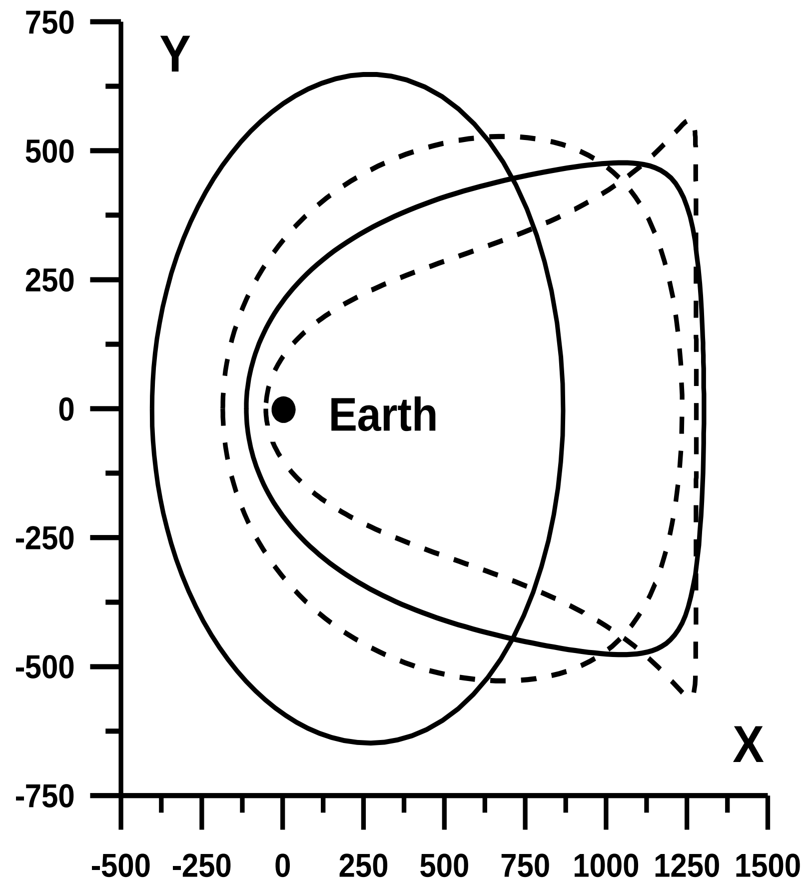
$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 + x_4, \quad \frac{dx_4}{dt} = x_5 - Ax_1 + m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3}\right),$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_5 - x_1, \quad \frac{dx_5}{dt} = -x_4 - Ax_2,$$

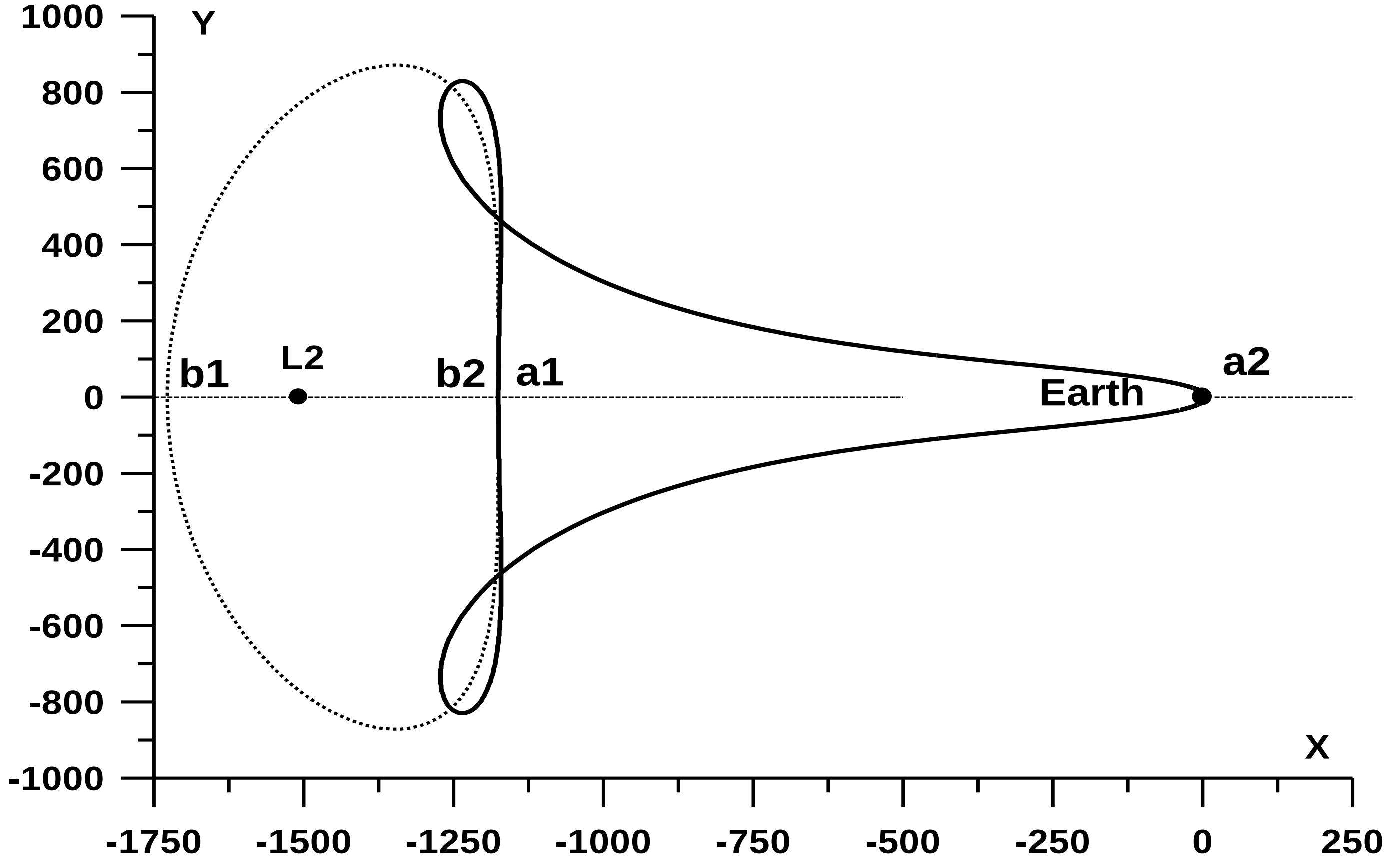
$$\frac{dx_3}{dt} = x_6, \qquad \frac{dx_6}{dt} = -Ax_3, \qquad A = \frac{m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{r_2^3}.$$

Семейства плоских периодических решений первого рода вокруг Земли

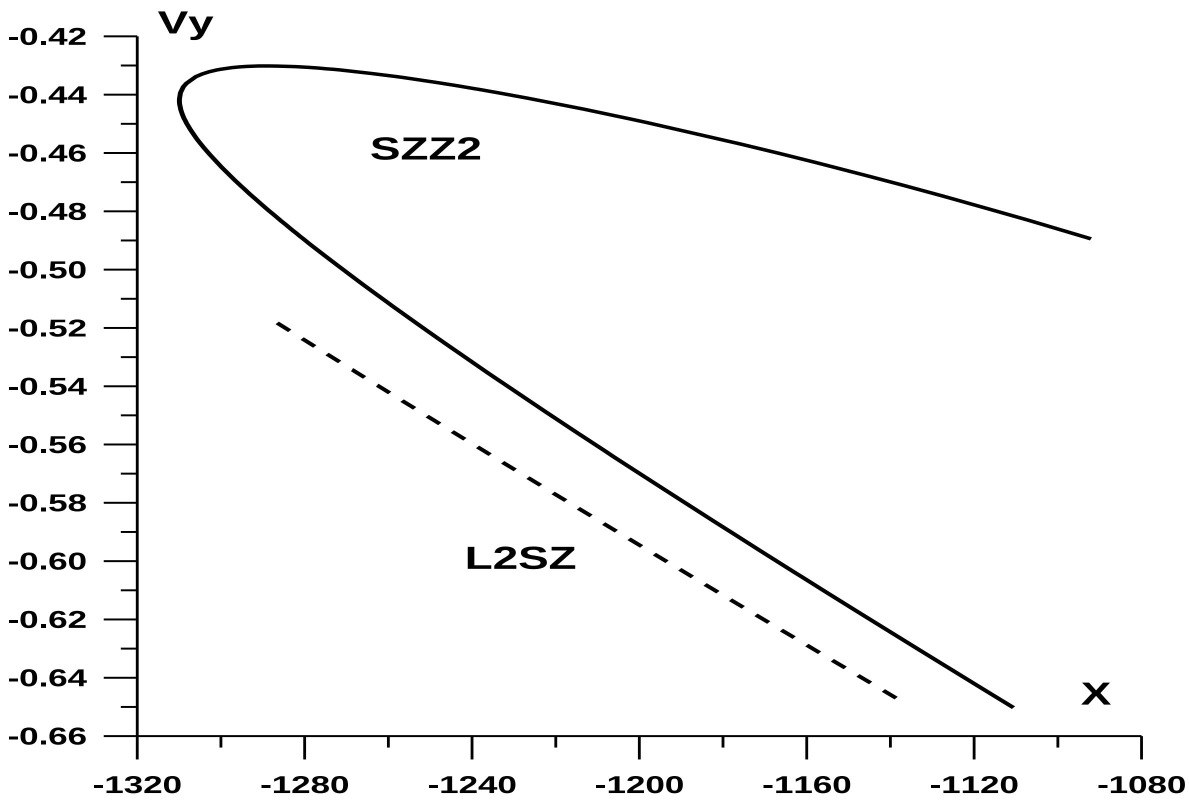




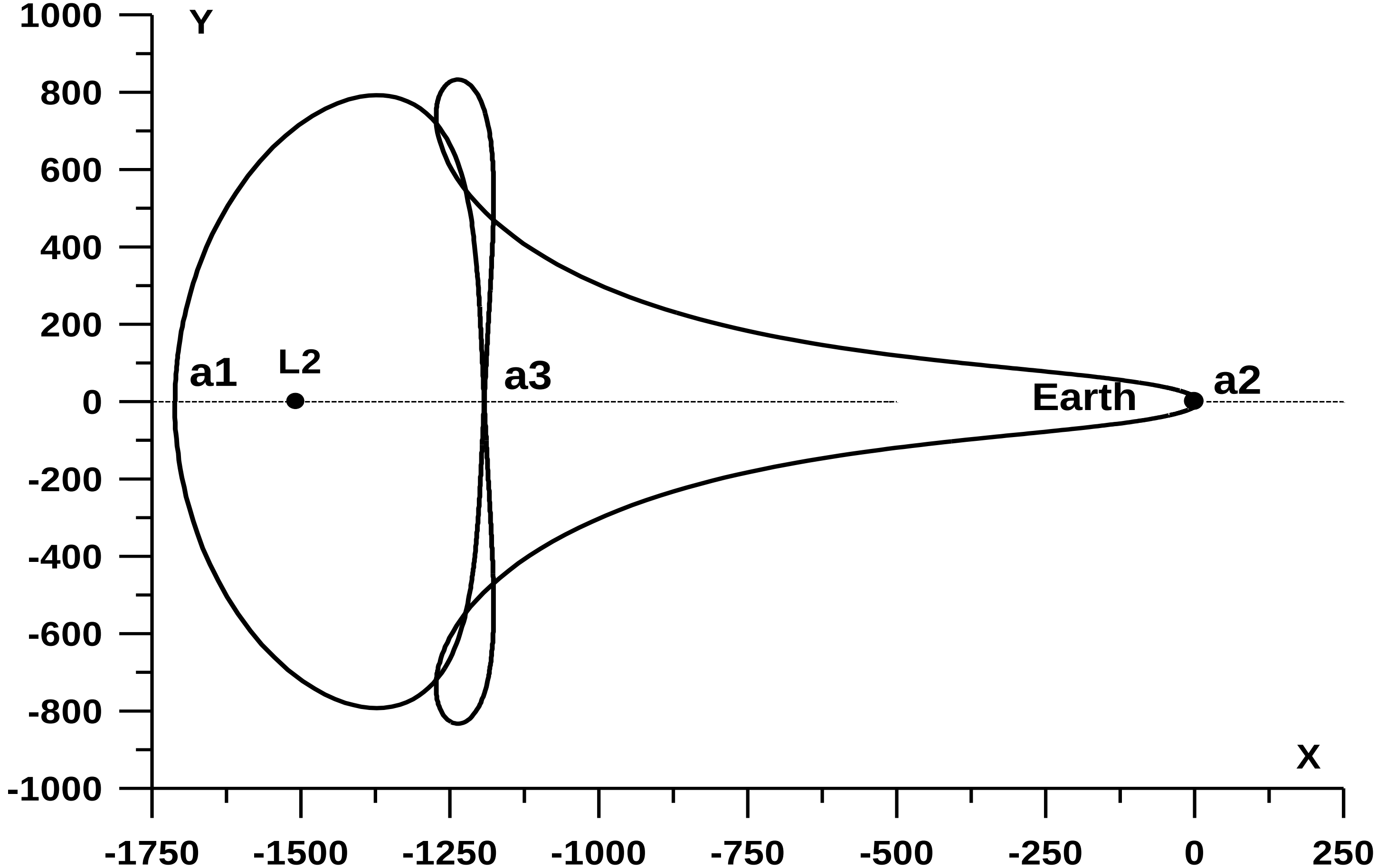
Стыковка орбит



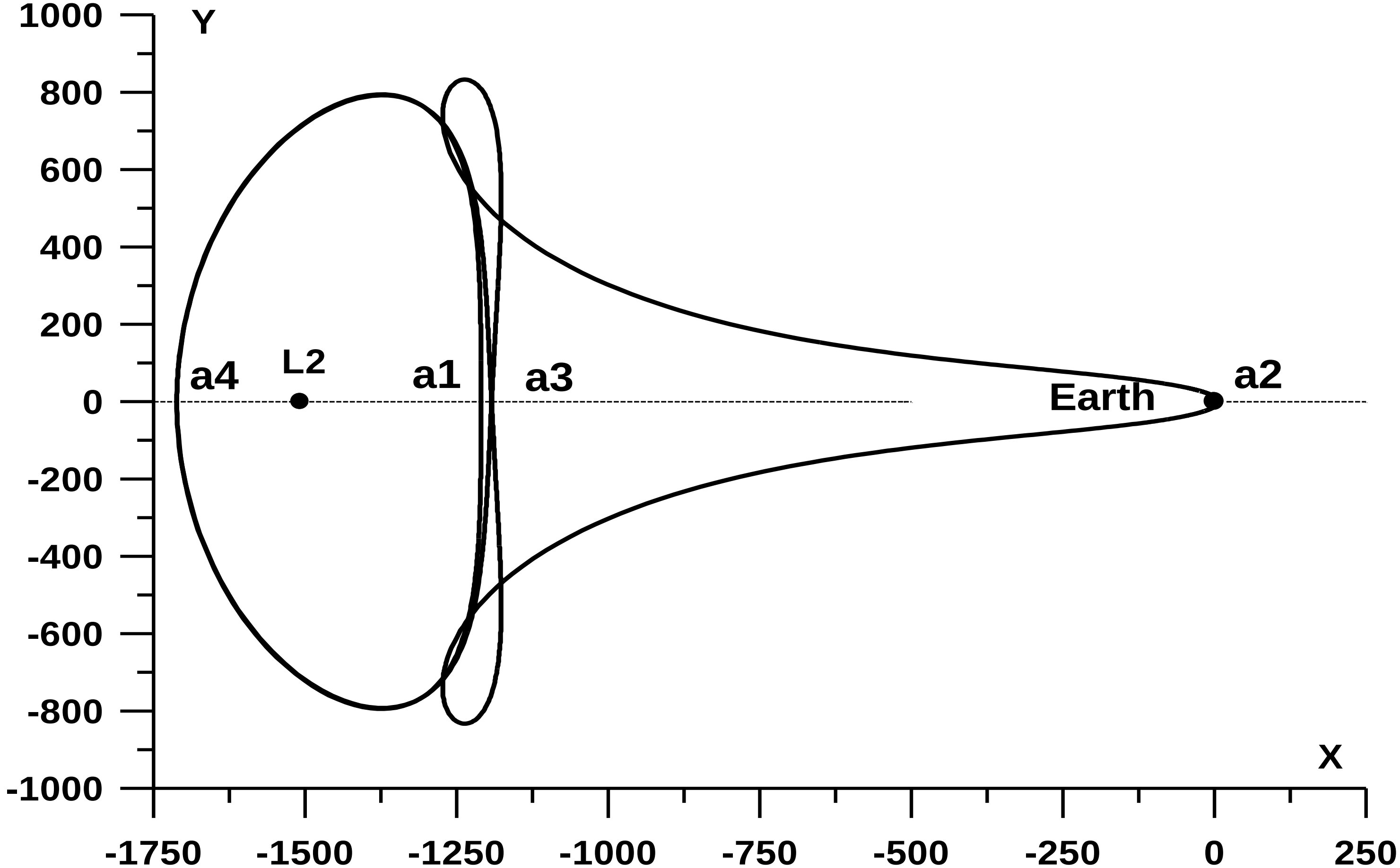
Разность значений v_y при x==-1175.1182 тыс.км равна 24.1 м/сек



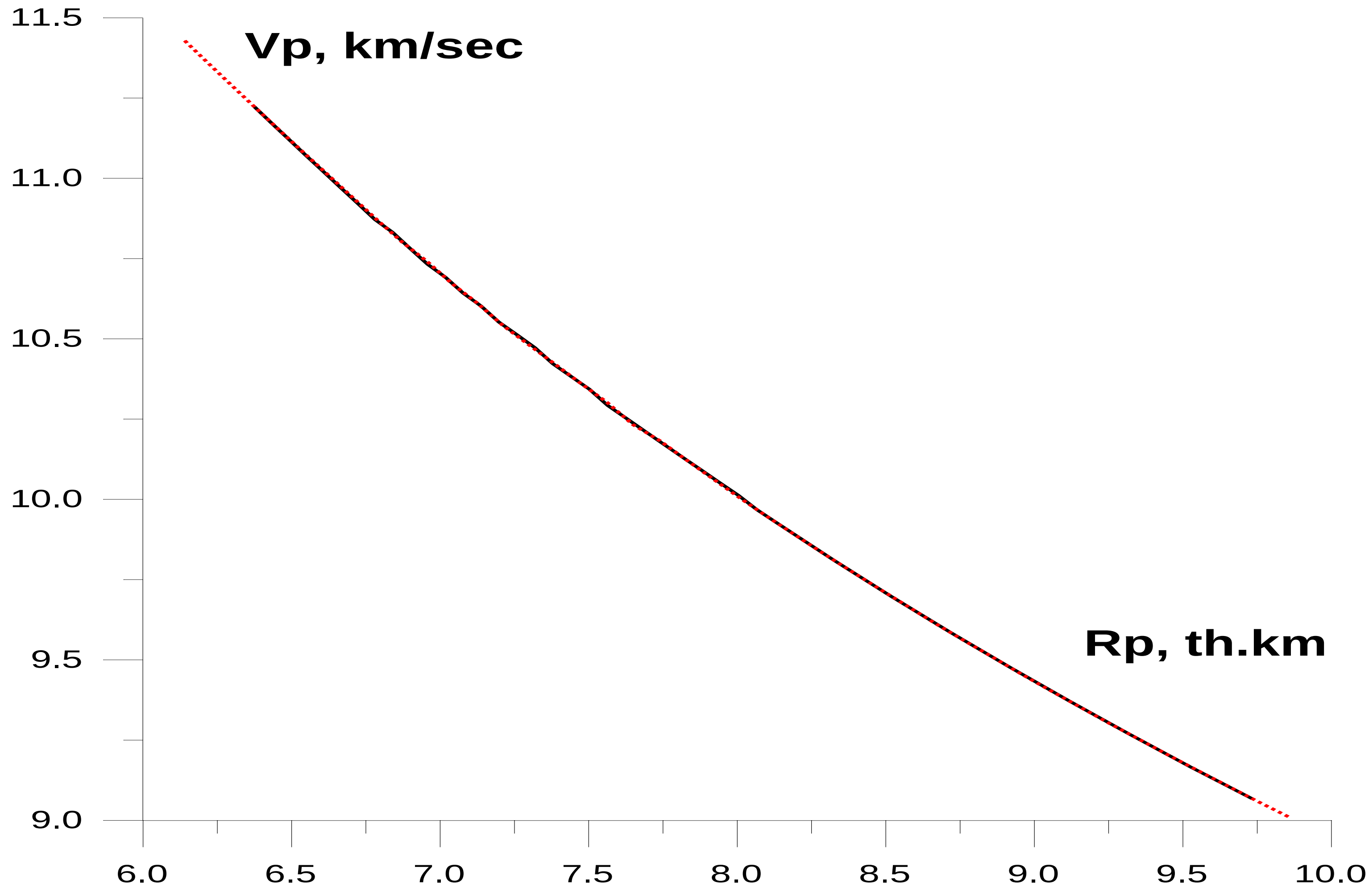
Орбита перелета и облета точки L2



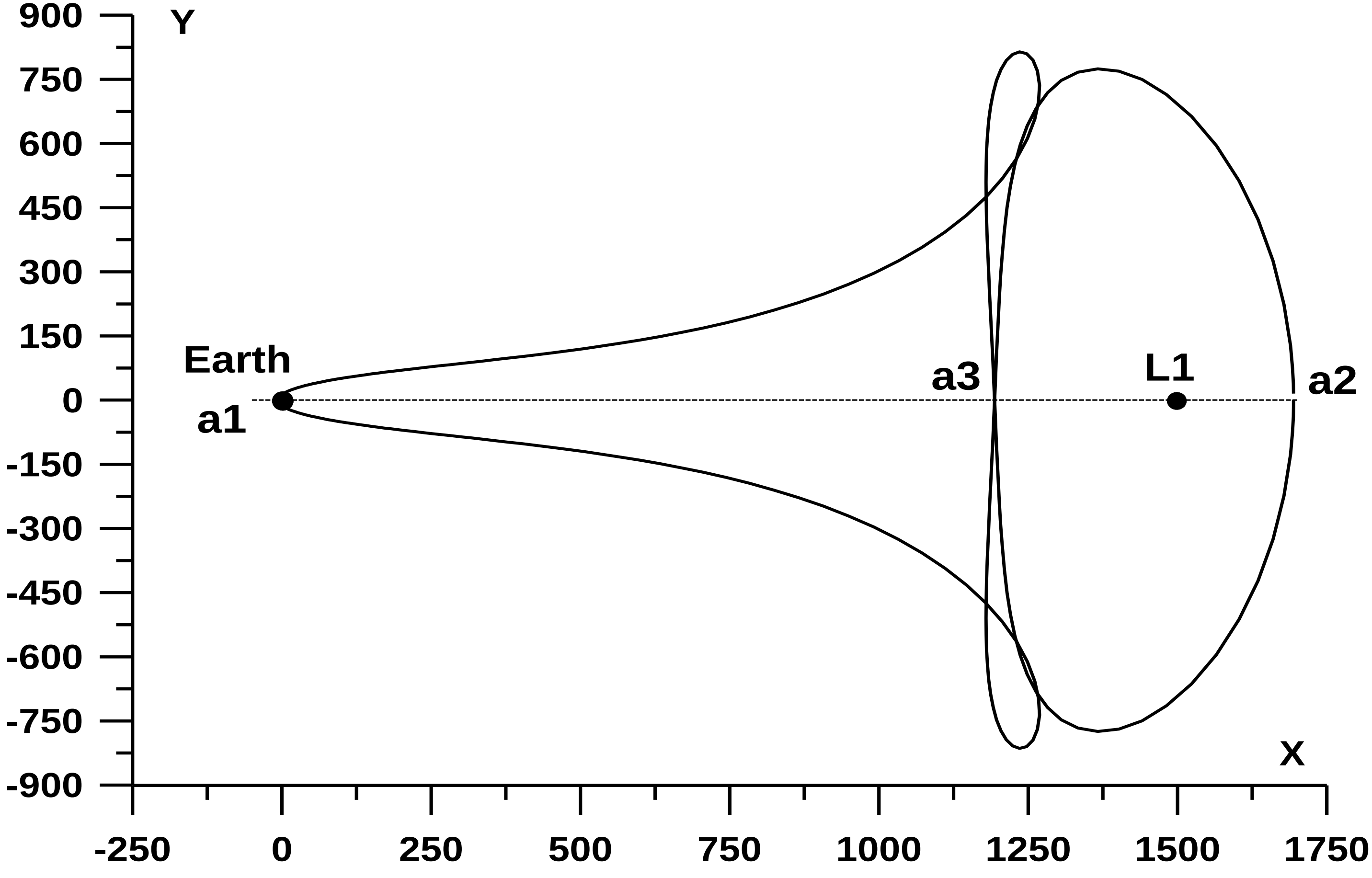
Орбита перелета и двукратного облета точки L2
Rp=6542 км



Зависимость скорости в перигее Vp от радиуса перигея Rp для однократного и двукратного облетов



Орбита перелета и облета точки L1



Орбита перелета и двукратного облета точки L1
Rp=6542 км

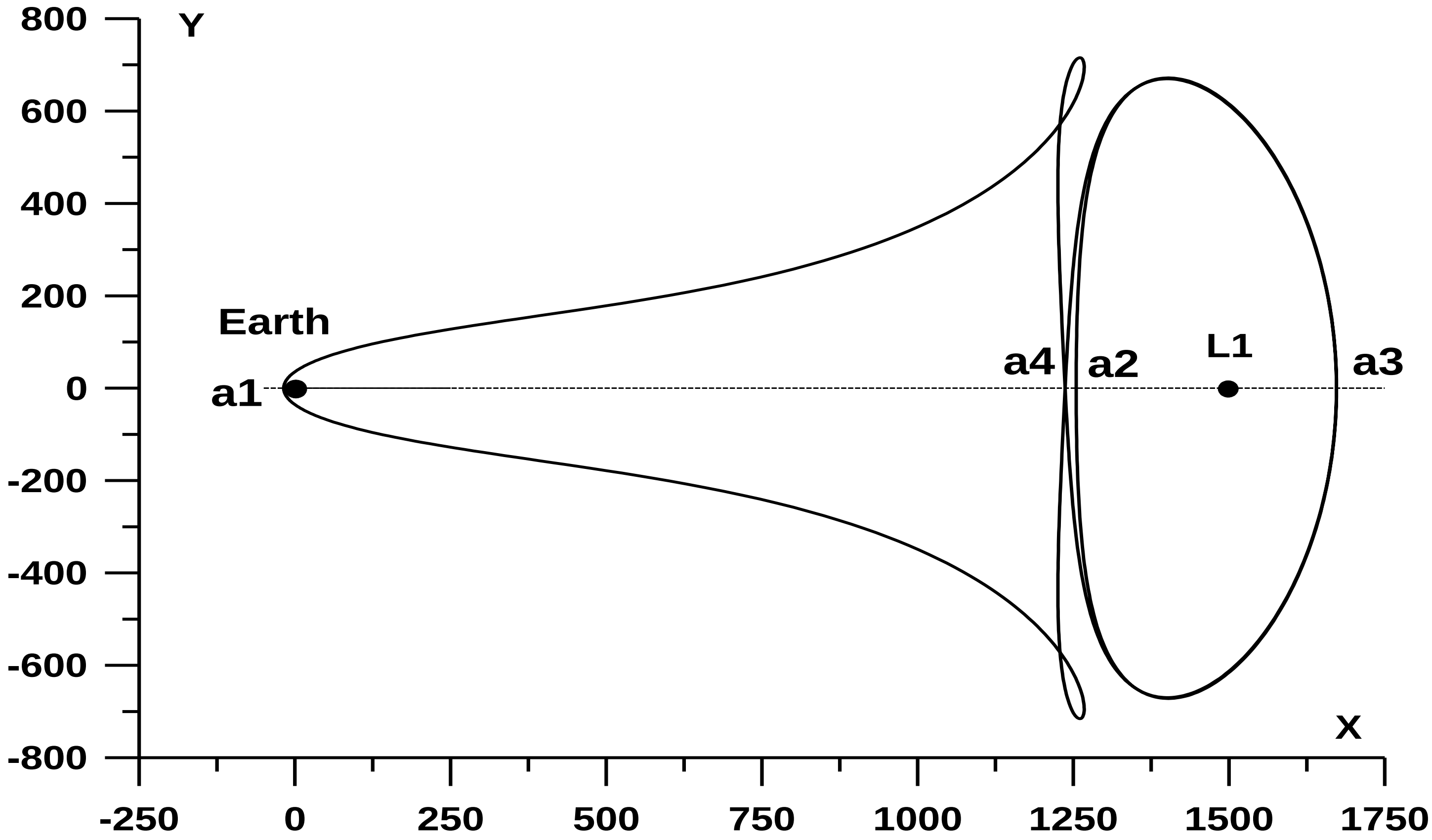
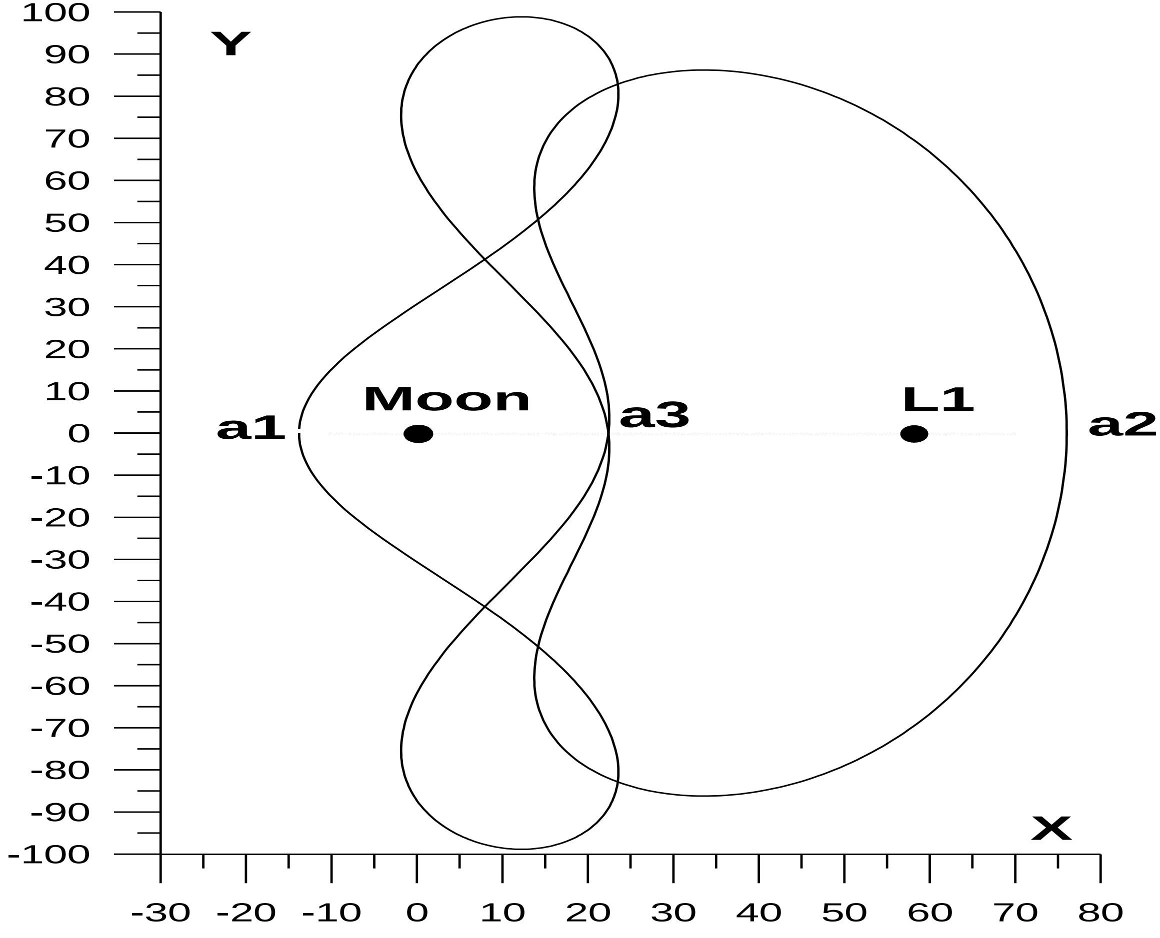


Таблица 1.

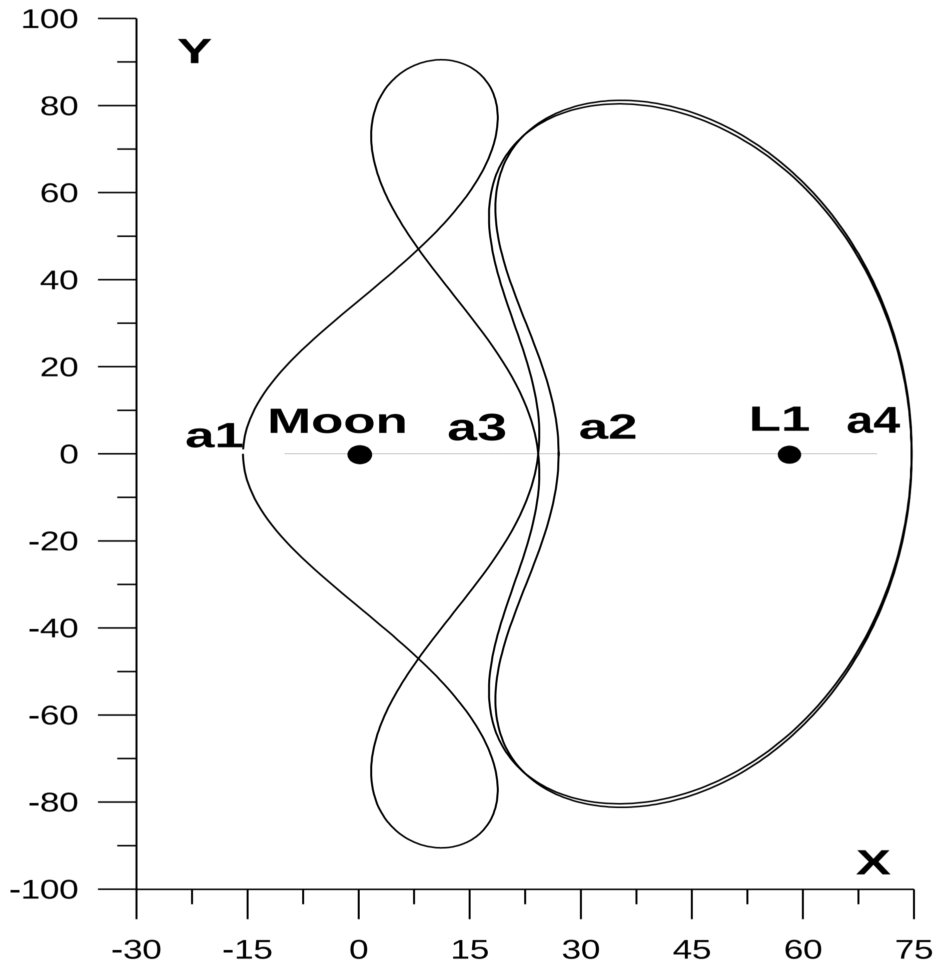
FAM	6.55	6.65	6.75	6.85
L11	11.0684436654	10.9844284881	10.9022837017	10.8219408174
L12	11.0684436766	10.9844284993	10.9022837128	10.8219408288
L11	11.1294632926	11.0457296263	10.9638635676	10.8837966817
L12	11.1294636217	11.0457286516	10.9638633423	10.8837979305
L21	11.0686539240	10.9846403336	10.9024971216	10.8221557997
L22	11.0686539353	10.9846403454	10.9024971274	10.8221555622
L21	11.1345316238	11.0507729573	10.9688823905	10.8887914636
L22	11.1345309260	11.0507714808	10.9688829592	10.8887940527

Для каждого семейства даны сначала скорости для орбит с меньшими, а затем с большими периодами. Видно, что от числа оборотов требуемая скорость зависит мало, (мм/сек)) следовательно, орбиты структурно неустойчивы.

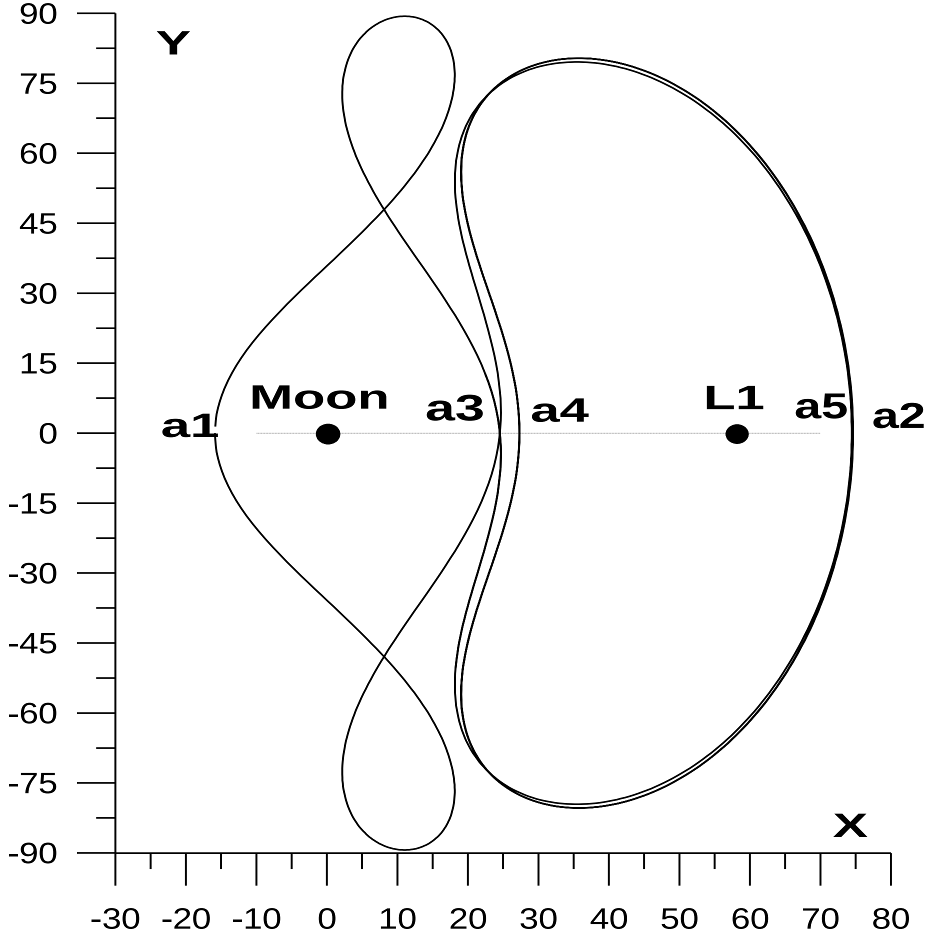
Орбита перелета и облета точки L1 в системе Земля-Луна



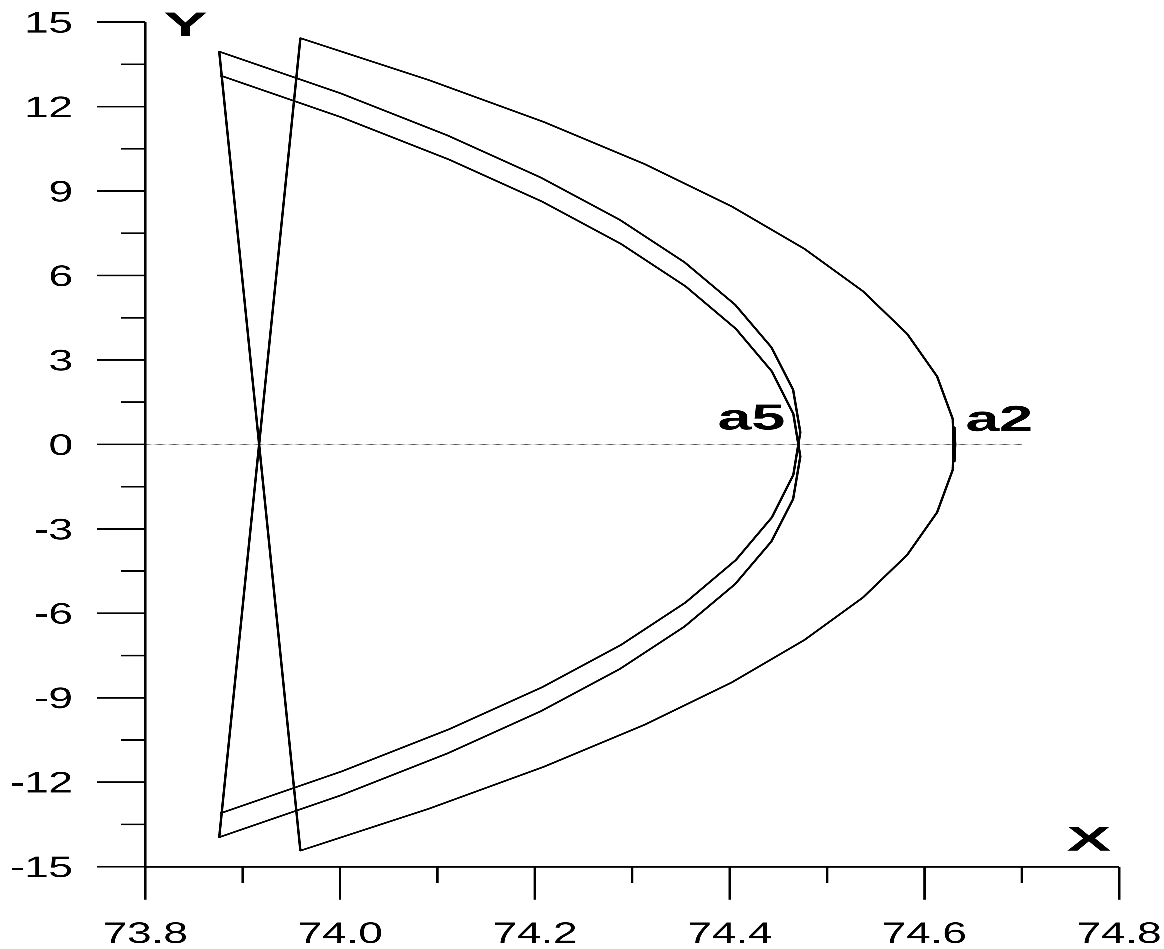
Орбита перелета и двукратного облета точки L1 в системе Земля-Луна



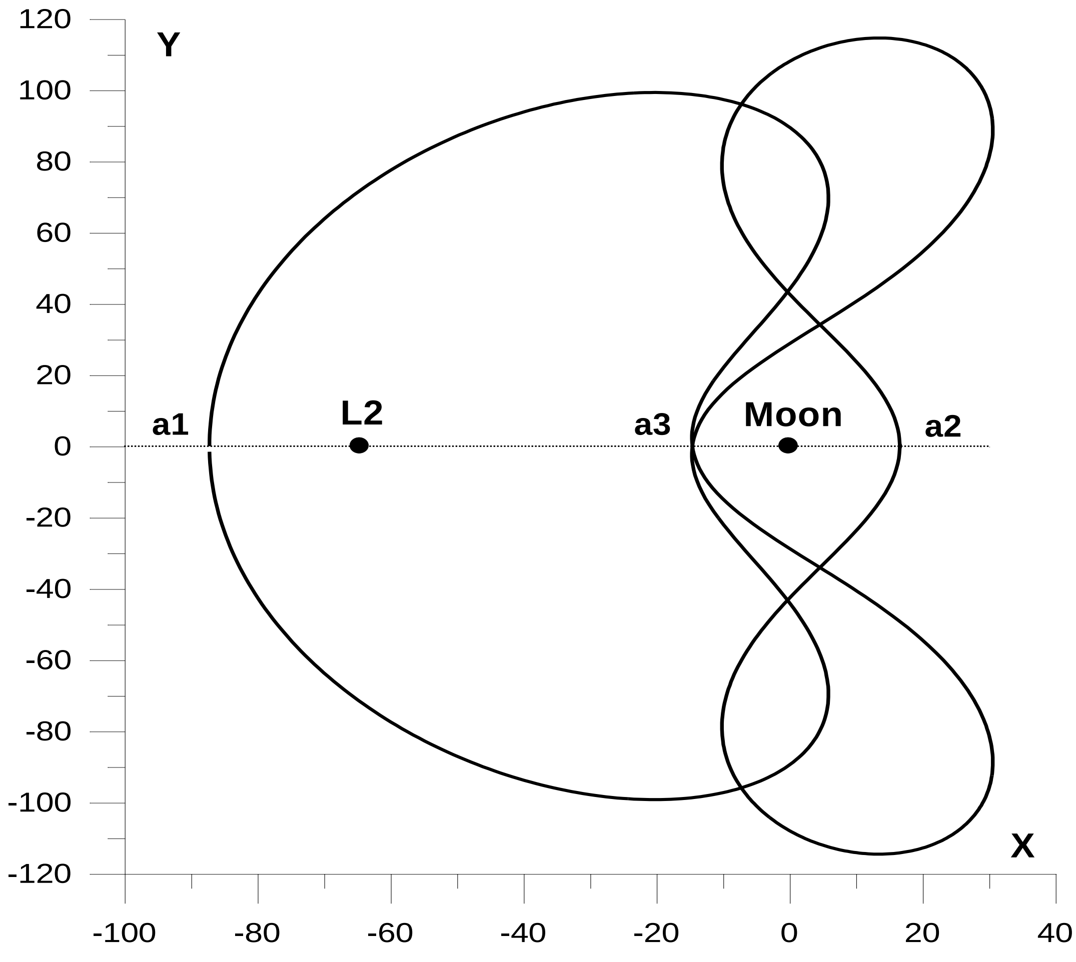
Орбита перелета и трехкратного облета точки L1 в системе Земля-Луна



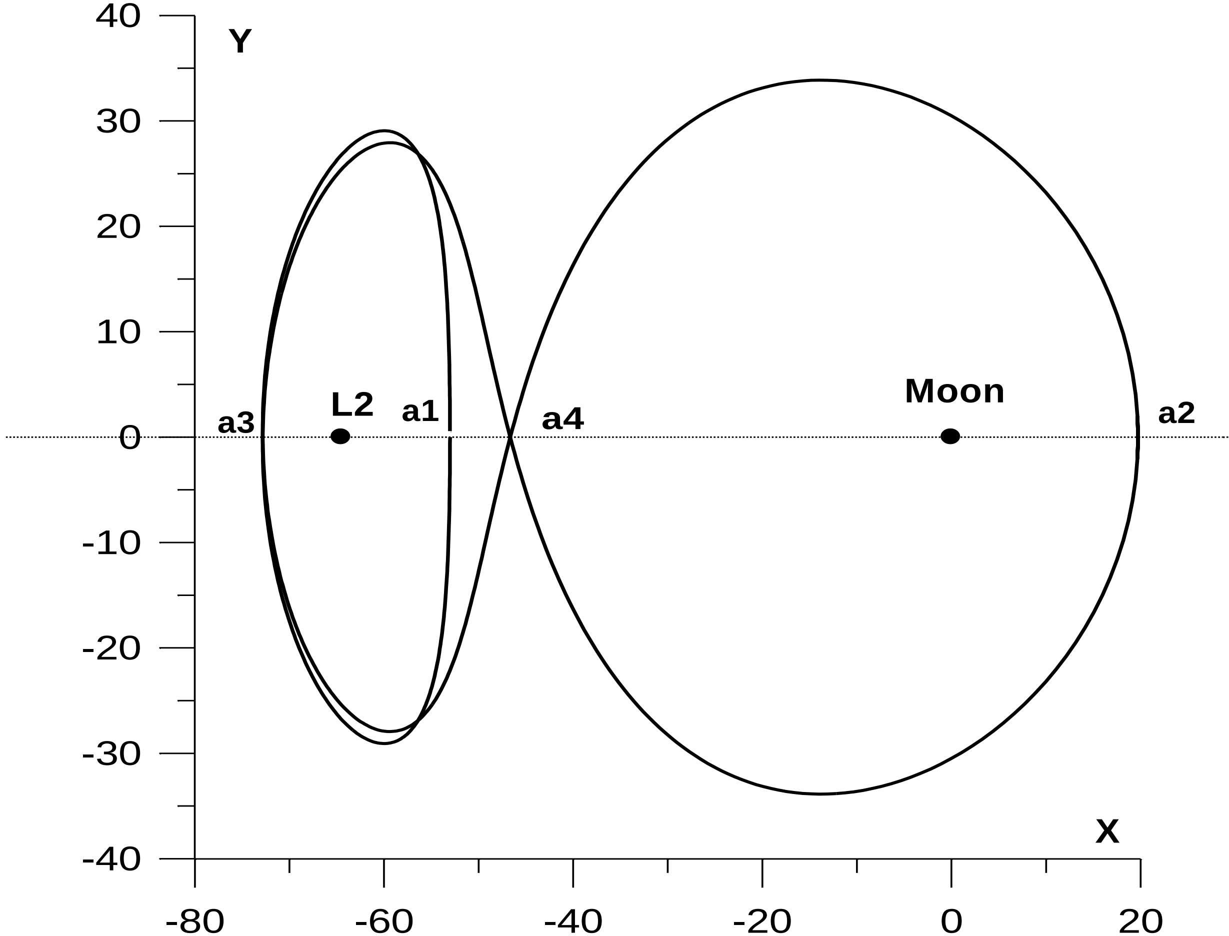
Орбита перелета и трехкратного облета точки L1 в системе Земля-Луна (фрагмент)



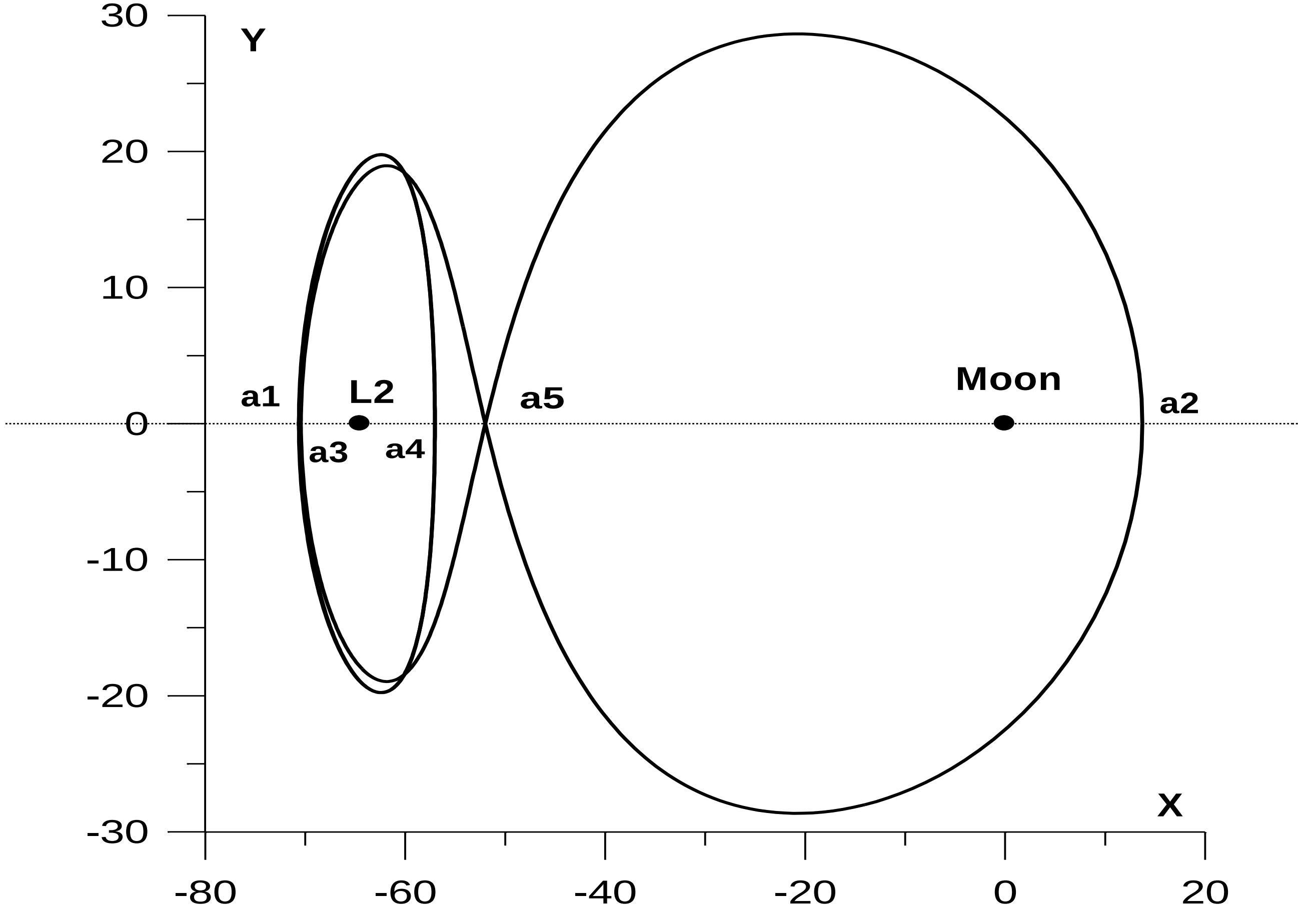
Орбита перелета и облета точки L2 в системе Земля-Луна



Орбита перелета и двукратного облета точки L2 в системе Земля-Луна



Орбита перелета и трехкратного облета точки L2 в системе Земля-Луна



Орбита перелета и трехкратного облета точки L2 в системе Земля-Луна (фрагмент)

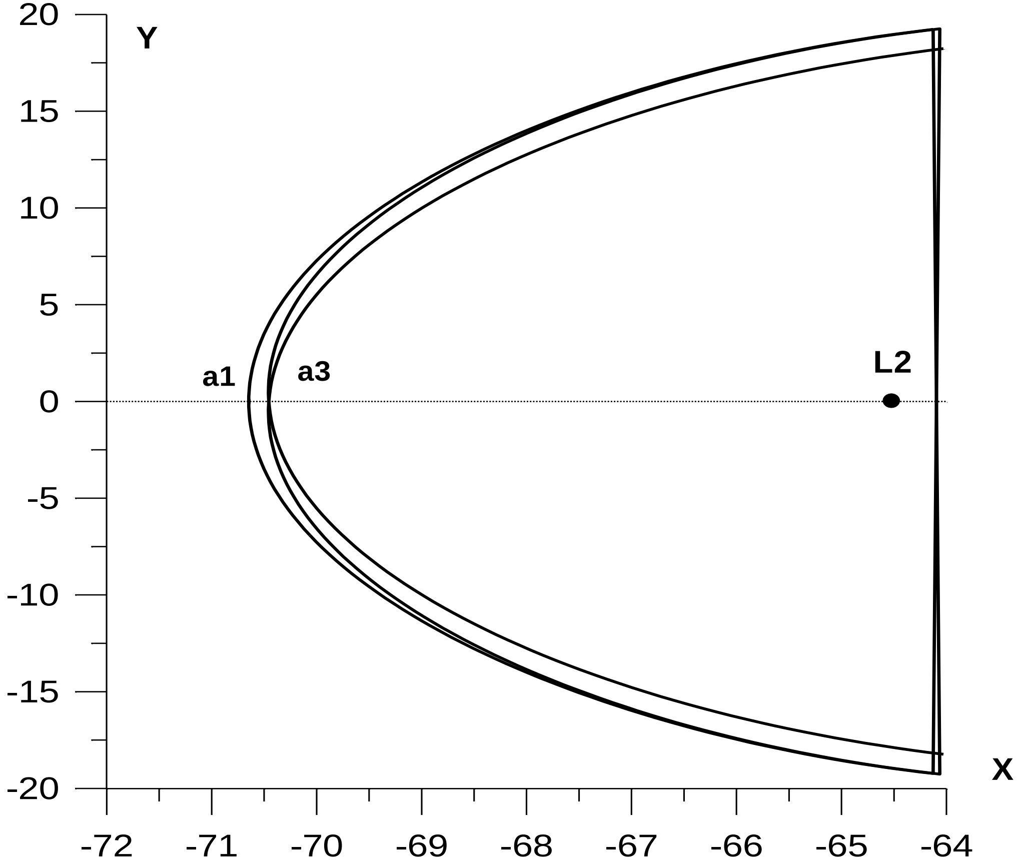


Таблица 2.

FAM	2	3	4	5
L11	2.16490762177	1.74796649896	1.49700648555	1.32421165365
L12	2.16496634030	1.74786049102	1.49689729518	1.32422124903
L11	2.22085631690	1.81392903526	1.57072599471	1.40418186042
L12	2.22084916934	1.81389053218	1.57093485377	1.40336921057
L13	2.22085670131	1.81393684053	1.57072214381	1.40421806129
L21	2.16976272863	1.75337461507	1.50296095521	1.33082269478
L22	2.16959424857	1.75340582007	1.50301447944	1.33084690587
L23	2.16964235626	1.75324794415	1.50306489696	1.33074799281
L21	2.24337077467	1.83255352351	1.58791120960	1.42109903934
L22	2.24336980167	1.83254641452	1.58791836994	1.42103323731
L23	2.24338819448	1.83251209197	1.58786891946	1.42113004319

Уравнения в вариациях Пуанкаре

Пусть известно некоторое периодическое решение $\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_0(t)$, называемое далее опорным, в окрестности которого функция Гамильтона H по крайней мере дважды дифференцируема. Рассмотрим возмущенное движение $\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_0(t)+\mathbf{y}(t))$. Подставляя его в уравнения движения, разлагая правые части в ряд Тейлора по $\mathbf{y}(t)$ и отбрасывая члены разложения степени выше первой, получаем уравнения возмущенного движения в первом приближении:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{JH}''(\mathbf{x}_0(t))\mathbf{y},$$

называемые **уравнениями в вариациях Пуанкаре**. Они линейные, с зависящими от времени коэффициентами. Решение с начальными условиями $\mathbf{y}(0)=\mathbf{y}_0$ представимо в виде: $\mathbf{y}(0)=\mathbf{Y}(\mathrm{t})\mathbf{y}_0$, где $\mathbf{Y}(\mathrm{t})$ – матрица размерности 6, называемая **матрициантом**. В случае периодичности решения с периодом T матрица $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}=\mathbf{Y}(T)$, называется **матрицей монодромии**.

Характеристический многочлен

Так как нет однозначных интегралов, отличных от интеграла энергии, то характеристический многочлен P матрицы монодромии M имеет вид:

$$P=(\rho-1)^2(\rho^4+a_1\rho^3+a_2\rho^2+a_1\rho+1),$$

где a_1 и a_2 --- вещественные коэффициенты, регулярно изменяющиеся при движении по семейству периодических решений. Значения этих коэффициентов можно выразить через след матрицы M и след квадрата матрицы M.

Если $4a_2<a_1a_1+8$**, то многочлен P представим в виде:**

$$P=(\rho-1)^2(\rho^2-2s_1\rho+1)(\rho^2-2s_2\rho+1).$$

Устойчивость

Вещественные параметры s_1 и s_2 определяют устойчивость решения. Если они оба по модулю меньше единицы, то третий-шестой мультипликаторы лежат на единичной окружности и решение орбитально устойчиво. При движении по семейству периодических решений поворот любого из двумерных инвариантных подпространств может стать кратным 2π, следовательно возможна генерация новых семейств периодических решений второго рода в этих подпространствах.

Если одна пара лежит на единичной окружности, вторая -- на вещественной прямой, решение "полунеустойчиво". Генерация новых семейств периодических решений второго рода возможна на "устойчивом" подпространстве.

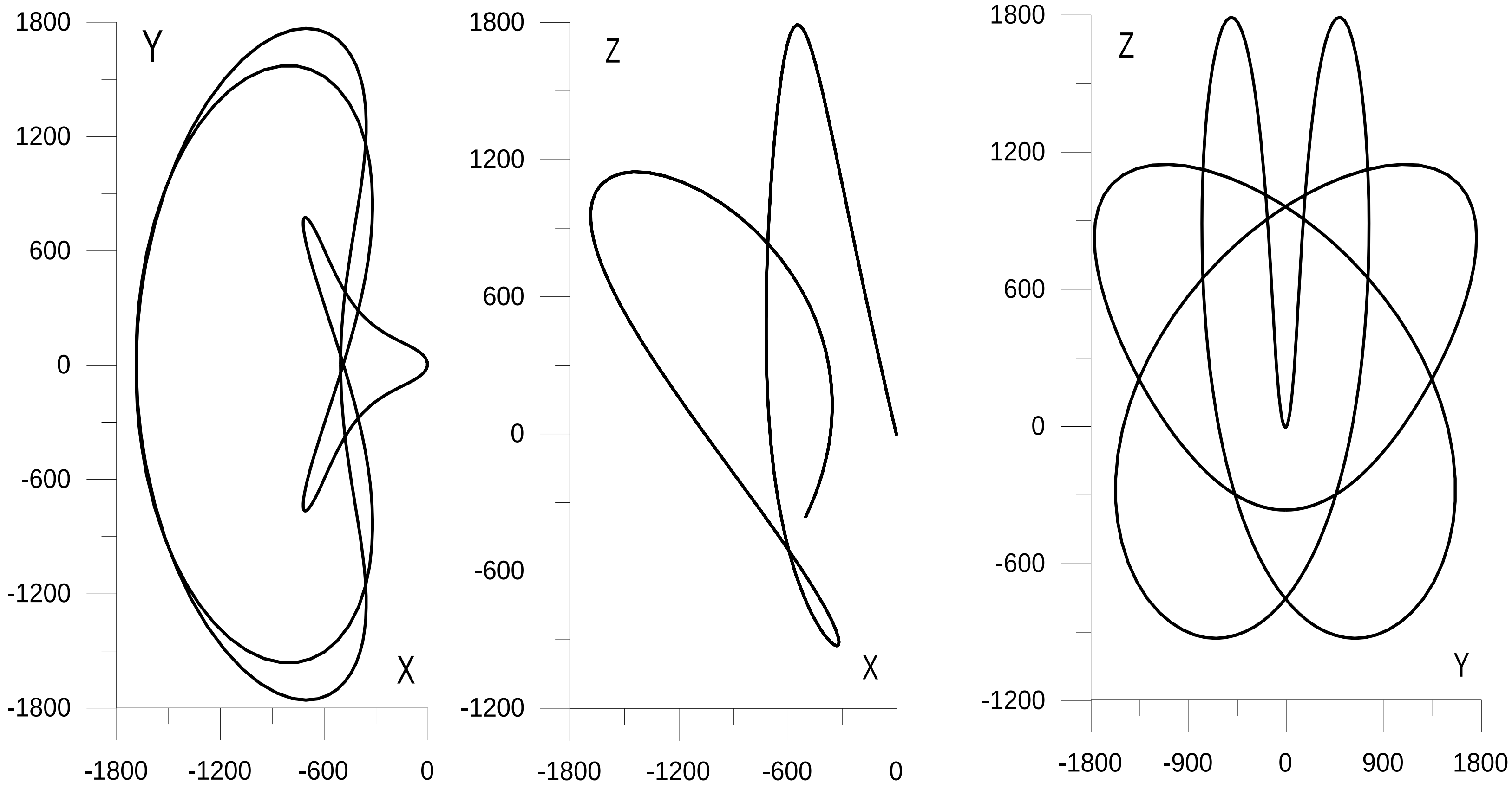
Решения семейства ***L22*** с резонансами 1 3 по вертикали

n	a_1	v_1	a_2	v_2	T	C	s_2	p/q
1	-1.001518	-1.064596	-.999044	-.919449	2.9909	3.0000	1	1/1
2	-1.001535	-1.064239	-.999031	-.919994	2.9780	3.0000	-.5	1/3
3	-1.001541	-1.064112	-.999026	-.920188	2.9734	3.0000	-1	1/2
4	-1.002122	-1.054563	-.998565	-.934401	2.5922	3.0001	-1	1/2
5	-1.002141	-1.054302	-.998549	-.934775	2.5810	3.0001	-.5	1/3
6	-1.002204	-1.053501	-.998498	-.935922	2.5466	3.0001	1	1/1
7	-1.004267	-1.036961	-.996856	-.957442	1.8477	3.0004	1	1/1
8	-1.004933	-1.033488	-.996375	-.961346	1.7189	3.0005	-.5	1/3
9	-1.005369	-1.031410	-.996089	-.963525	1.6458	3.0005	-1	1/2
10	-1.007098	-1.023889	-.995589	-.968905	1.3959	3.0007	-1	1/2
11	-1.007749	-1.021125	-.996048	-.967750	1.3135	3.0008	-.5	1/3
12	-1.009142	-1.014876	-.998282	-.946636	1.2707	3.0009	-.5	1/3

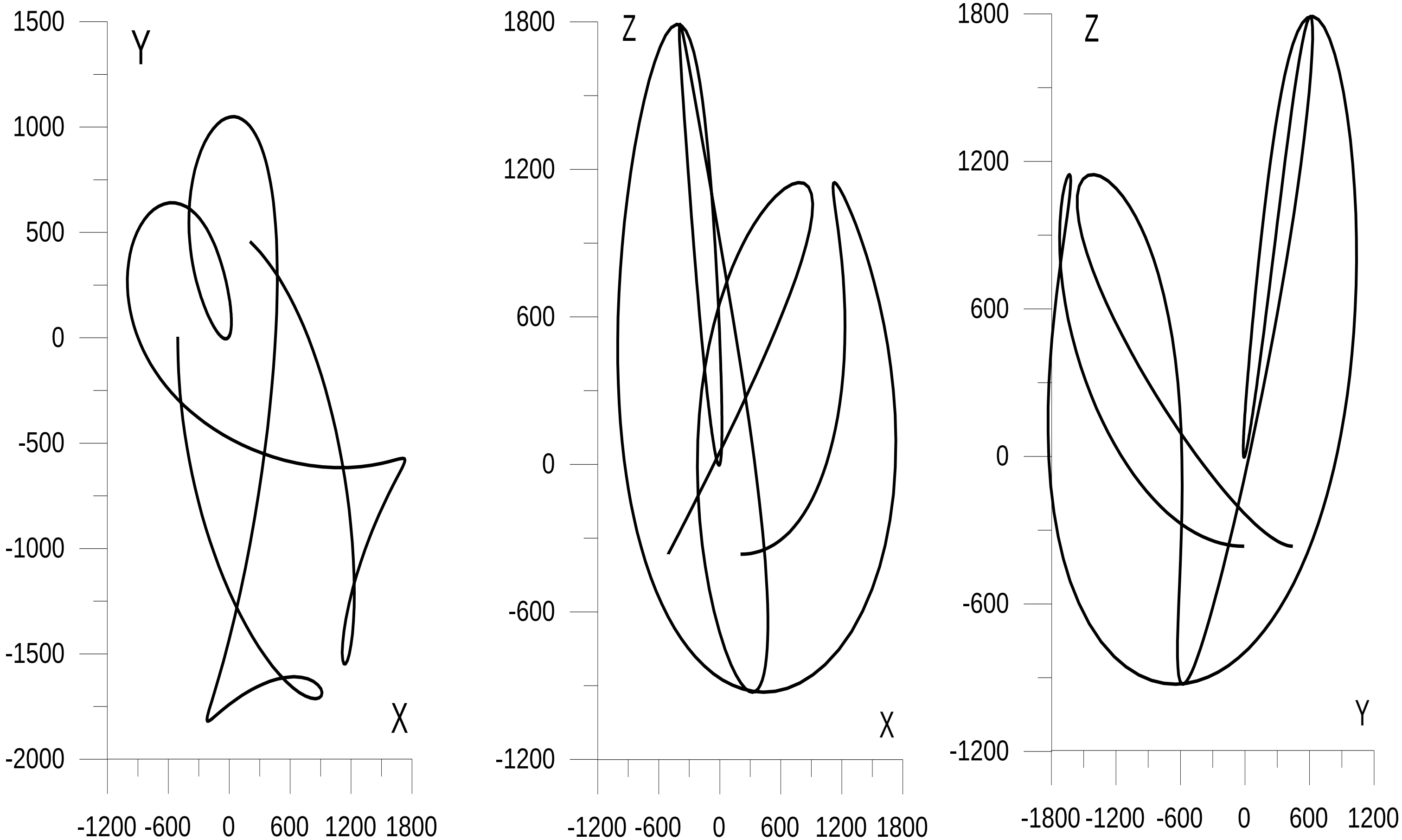
Для проекта “Миллиметрон”

Наиболее подходящими для проекта “Миллиметрон” оказались орбиты, порожденные 5-й строкой. Они симметричны вокруг гиперплоскостей Y и V_z. Образец такой орбиты в эклиптической системе, вращающейся вокруг Земли, дан на рисунке. Полный период – 613.7 суток, из которых по 112 суток занимают входа и схода с орбит вокруг точки $\boldsymbol{L_2}$ и по 194.85 – каждый из двух облетов.

Орбита в эклиптической системе, вращающейся вокруг Земли



Орбита в инерциальной системе с началом в центре Земли



Литература.

1. А.Пуанкаре Новые методы небесной механики.- Избр. тр. Т. 1,2. М. Наука, 1971, 1972.
2. Себехей В. Теория орбит: ограниченная задача трех тел.М., Наука, 1982, 656 с.
3. Боярский М. Н., Шейхет А. И. Об одноимпульсном переходе с орбиты ИСЗ на условно-периодическую траекторию вокруг коллинеарной точки либрации системы Солнце - Земля. Космич. исслед., 1987, том 25, №1. С.152.
4. Лидов М.Л., Ляхова В.А., Тесленко Н.М. Одноимпульсный перелет на условно-периодическую орбиту в окрестности точки L2 системы Земля – Солнце и смежные задачи. Космич. исслед., 1987, том 25, №2. С.163-185.
5. Крейсман Б.Б. О симметричных периодических решениях плоской ограниченной задачи трех тел. Препр. Физического инст. им.П.Н.Лебедева РАН,1997, №66, 131с.
6. Крейсман Б.Б. Периодические решения пространственной ограниченной задачи трех тел. Космич. исслед., 2009, том 47, №1. С. 64-78.
7. Крейсман Б.Б. Применение периодических решений пространственной задачи трех тел для проектирования орбиты космического телескопа. Космич. исслед., 2009, том 47, №5, С. 444-451.
8. **Крейсман Б.Б. Одноимпульсные перелеты с орбит искусственных спутников на орбиты вокруг точки либрации L1 или L2. Препр. Физического инст. им.П.Н.Лебедева РАН,2009, №15, 32с.**

Благодарю за внимание