**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ ИМ. М.В. КЕЛДЫША
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК»**

Утверждена
Ученым советом ФГБУН ИПМ
им. М.В. Келдыша РАН,
протокол № __ от «___» ______ 2018 г.
Заместитель директора
____________________А.Л. Афендиков
(подпись, расшифровка подписи)
«__» __________ 2018 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
Экстремальные задачи. Выпуклый анализ

Направление подготовки
09.06.01– «Информатика и вычислительная техника»

Профили (направленности программы)
05.13.18– «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Квалификация выпускника
Исследователь. Преподаватель-исследователь

Форма обучения
очная

Москва, 2018

Направление подготовки: 09.06.01

Профиль (направленность программы): 05.13.18– «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Дисциплина: Экстремальные задачи. Выпуклый анализ

Форма обучения: очная

Рабочая программа составлена с учетом ФГОС ВО по направленности программы (профилю) 05.13.18– «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ», утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 18 августа 2014 года № 1018, зарегистрировано в Минюсте Российской Федерации 1 сентября 2014 года № 33916, и Программы-минимум кандидатского экзамена по специальности, утвержденной приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 8 октября 2007 года № 274 (зарегистрировано Минюстом Российской Федерации 19 октября 2007 года № 10363).
Рабочая программа составлена с учетом ФГОС ВО по направлению подготовки 09.06.01 – «Информатика и вычислительная техника», утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 30 июля 2014 г. N 875, зарегистрировано в Минюсте Российской Федерации 20 августа 2014 г. N 33685, и Программы-минимум кандидатского экзамена по специальности, утвержденной приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 8 октября 2007 года № 274 (зарегистрировано Минюстом Российской Федерации 19 октября 2007 года № 10363).

РЕЦЕНЗЕНТ: Меньшов Игорь Станиславович, Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, ведущий научный сотрудник, профессор.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА РЕКОМЕНДОВАНА
Ученым советом ФИЦ ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, протокол № ____ от «___» ______ 2018 г.
.

ИСПОЛНИТЕЛЬ (разработчик программ):
Голиков А.Р., ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, старший научный сотрудник, к.ф.-м.н.

Заведующий аспирантурой ____________________ / Меньшов И.С. /

Оглавление

АННОТАЦИЯ

Дисциплина «Экстремальные задачи. Выпуклый анализ» реализуется в рамках Блока 1 Основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (ИПМ им. М.В. Келдыша РАН) по направлению подготовки 09.06.01 – «Информатика и вычислительная техника».

Рабочая программа разработана с учетом требований ФГОС ВО по направлению подготовки 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ», утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации 30 июля 2014 г. N 875, зарегистрировано в Минюсте Российской Федерации 20 августа 2014 г. N 33685, и Программы-минимум кандидатского экзамена по общенаучной дисциплине по специальности, утвержденной приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 8 октября 2007 года № 274 (зарегистрировано Минюстом Российской Федерации 19 октября 2007 года № 10363).

Рабочая программа разработана с учетом требований ФГОС ВО по направлению подготовки 09.06.01 – «Информатика и вычислительная техника», утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 30 июля 2014 г. N 875, зарегистрировано в Минюсте Российской Федерации 20 августа 2014 г. N 33685, и Программы-минимум кандидатского экзамена по специальности, утвержденной приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 8 октября 2007 года № 274 (зарегистрировано Минюстом Российской Федерации 19 октября 2007 года № 10363).

Основным источником материалов для формирования содержания программы являются: материалы конференций, симпозиумов, семинаров, Интернет-ресурсы, научные издания и монографические исследования и публикации.

Общая трудоемкость дисциплины по учебному плану составляет 2 зач.ед. (72 часов), из них лекций – 4 часа, семинарских занятий – 8 часов, практических занятий – 0 часов, самостоятельной работы – 60 часов. Дисциплина реализуется на 1-м курсе, во 2-м семестре, ппродолжительность обучения – 1 семестр.

Текущая аттестация проводится не менее 2 раз в соответствии с заданиями и формами контроля, предусмотренные настоящей программой.

Промежуточная оценка знания осуществляется в период зачетно-экзаменационнной сессии в форме зачета.

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Цели и задачи дисциплины «Экстремальные задачи. Выпуклый анализ»

Цель: освоение фундаментальных знаний и навыков владения аппаратом выпуклого анализа, субдифференциального исчисления и метода Лагранжа, что позволяет осуществить общий подход к решению любой прикладной экстремальной задачи, формализованной в математическом виде.

Задачи:

– освоение теоретических основ выпуклого анализа: свойства выпуклых множеств и выпуклых функций;

– освоение основных методов обобщённой задачи выпуклого программирования с использованием аппарата выпуклого анализа для решения некоторых негладких и невыпуклых задач на условный минимум;

– практическая реализация накопленных по дисциплине теоретических знаний на решении ряда характерных тестовых задач;

– стимулирование к самостоятельной деятельности по освоению дисциплины и формированию необходимых компетенций.

2. ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Процесс изучения дисциплины «Экстремальные задачи. Выпуклый анализ» направлен на формирование компетенций или отдельных их элементов в соответствии с ФГОС ВО по направлению подготовки 09.06.01 – «Информатика и вычислительная техника», утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 30 июля 2014 г. N 875, зарегистрировано в Минюсте Российской Федерации 20 августа 2014 г. N 33685

а) универсальные (УК): не предусмотрено

б) общепрофессиональные (ОПК): Владение методологией теоретических и экспериментальных исследований в области профессиональной деятельности (ОПК-1). Владение культурой научного исследования, в том числе с использованием современных информационно-коммуникационных технологий (ОПК-2).

в) профессиональные (ПК): Способность разрабатывать новые математические методы моделирования объектов и явлений (ПК-1).

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

Иметь представление: Основные понятия, результаты и задачи фундаментальной математики и механики. Качественные и количественные методы исследования механических систем, современные тенденции в разработке моделей механики. Методы оптимизации с детализацией конкретных методов экстремальных задач механики и математики.

Знать: Выпуклый анализ, основные понятия, определения, теоремы, модели построения. Свойства выпуклых множеств и операции с ними, обобщенные выпуклые функции, субдифференциальное исчисление. Задача выпуклого программирования: необходимые условия условного экстремума и метод Лагранжа для этой задачи. Сферы применения аппарата выпуклого анализа. Обобщение выпуклых функций и задачи выпуклого программирования. Обобщенная задача выпуклого программирования и решение некоторых негладких и невыпуклых экстремальных задач.

Знать: Выпуклый анализ, основные понятия, определения, модели построения. Обобщенная задача выпуклого программирования. Сферы применения аппарата выпуклого анализа. Свойства выпуклых множеств и операции с ними, обобщенные выпуклые функции, субдифференциальное исчисление.

Уметь: Уметь применять аппарат выпуклого анализа для решения экстремальных задач в математике и механике. Уметь на практике применять численные алгоритмы, основанные на методах выпуклого программирования, при решении типовых задач, Уметь давать оценку эффективности метода по набору адекватных критериев, применять полученные знания в конкретной области математического моделирования

Владеть: Владеть методами решения задач выпуклого программирования, линейного программирования, вариационного исчисления и математической теории оптимального управления.

Приобрести опыт: Построение численных алгоритмов решения задач выпуклого программирования и оценки их эффективности. Практическая реализация ряда изученных алгоритмов в тестовых задачах.

3. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

3.1. Структура дисциплины

Распределение трудоемкости дисциплины по видам учебных работ

Вид учебной работы	Трудоемкость					
	общая		из них			
	зач.ед.	час.	Лекц.	Прак.	Сем.	Сам.р.
ОБЩАЯ ТРУДОЕМКОСТЬ по Учебному плану	**2**	**72**	**4**		**8**	**60**
Аудиторные занятия		12				
Лекции (Л)		4				
Практические занятия (ПЗ) подготовка к экзамену		0				
Семинары (С)		8				
Самостоятельная работа** (СР) **без учёта промежуточного контроля:		60				
Самоподготовка (проработка и повторение лекционного материала и материала учебников и учебных пособий, подготовка к семинарским и практическим занятиям) и самостоятельное изучение тем дисциплины		60				
Вид контроля: зачет						

3.2. Содержание разделов дисциплины

Общее содержание дисциплины

№ раздела	Наименование темы (раздела)	Содержание темы (раздела)	Форма текущей аттестации
	Введение.		
1.	Выпуклые множества	Выпуклые множества в банаховом пространстве. Метрика Хаусдорфа для множеств, её свойства. Теорема о полноте метрического пространства компактов из банахова пространства. Операции Минковского с множествами. Понятия конуса и выпуклой конической оболочки. Касательный конус Кларка, асимптотические конусы. Понятия эффективного множества и надграфика функции. Отделимость (простая, сильная, строгая) выпуклых множеств в гильбертовом пространстве. Опорная гиперплоскость, её существование в любой граничной точке выпуклого множества. Теорема об отделимости выпуклых множеств из банахова пространства. О совпадении замыканий выпуклых множеств в сильной и слабой топологиях.	О, ДЗ
2.	Выпуклые функции	Определение выпуклых функций. Неравенство Иенсена. Функция Минковского и опорная функция множества. Их свойства. Выпуклая оболочка функции, её свойства. Непрерывность выпуклой функции, ограниченной на некотором открытом множестве. Преобразование Лежандра-Юнга-Фенхеля собственной функции (сопряженные функции). Инфимальная конволюция функций.	О, ДЗ

		Вычисление выпуклых оболочек множеств и функций, используя аппарат опорных функций.	
3.	Задача выпуклого программирования. Экстремальные задачи.	Производные по направлениям для выпуклых функций. Субдифференциал выпуклой функции, его свойства. Основные теоремы (Дубовицкого-Милютина, Моро-Рокафеллара) субдифференциального исчисления. Определение поляры множеств, её свойства. Касательный и нормальный конусы множества, заданного системой неравенств из выпуклых функций. Определение задачи выпуклого программирования. Необходимые условия условного экстремума в данной задаче. Обоснование метода множителей Лагранжа для этой задачи. Обобщение выпуклых функций: локально выпуклые функции, слабо и сильно выпуклые функции. Обобщение задачи выпуклого программирования. Методы использования аппарата выпуклого анализа для решения некоторых негладких и невыпуклых задач на условный минимум.	О, ДЗ

Примечание: О – опрос, Д – дискуссия (диспут, круглый стол, мозговой штурм, ролевая игра), ДЗ – домашнее задание (эссе и пр.). Формы контроля не являются жесткими и могут быть заменены преподавателем на другую форму контроля в зависимости от контингента обучающихся. Кроме того, на занятиях семинарских может проводится работа с нормативными документами, изданиями средств информации и прочее, что также оценивается преподавателем.

3.3. Лекционные занятия

№ занятия	№ Раздела (темы)	Краткое содержание темы занятия	Кол-во часов
1.	1, 2	Выпуклые множества, основные понятия, определения, свойства. Возможность метризируемости совокупности выпуклых замкнутых множеств с целью оценки близости между такими множествами, определения сходимости последовательности множеств, построения оценок аппроксимации одних множеств другими. Касательные и асимптотические конусы. Понятия эффективного множества и надграфика функции. Изучение свойств полунепрерывных и выпуклых функций. Выпуклые полунепрерывные снизу функции при решении выпуклых задач. Классы выпуклых функций: функция Минковского и опорная функция множества. Их свойства. Выпуклая оболочка функции, её свойства. Непрерывность выпуклой функции, ограниченной на некотором открытом множестве. Теоремы об отделимости выпуклых множеств в гильбертовом пространстве и в банаховых пространствах. Опорная гиперплоскость, её существование в любой граничной точке выпуклого множества.	2
2.	2, 3	Преобразование Лежандра-Юнга-Фенхеля собственной функции (сопряжённые функции). Вычисление выпуклых оболочек множеств и функций, используя аппарат опорных функций. Производные по направлениям для выпуклых функций. Субдифференциал выпуклой функции, его свойства. Основные теоремы субдифференциального исчисления. Поляра множеств, её свойства. Касательный и нормальный конусы множества, заданного системой неравенств из выпуклых функций. Определение задачи выпуклого программирования. Необходимые условия условного экстремума в данной задаче. Обоснование метода множителей Лагранжа для этой задачи. Обобщение выпуклых функций: локально выпуклые функции, слабо и сильно выпуклые функции. Обобщение задачи выпуклого программирования. Методы использования аппарата выпуклого анализа	2

		для решения некоторых негладких и невыпуклых задач на условный минимум.	
ВСЕГО			**4**

3.4. *Семинарские занятия*

№ занятия	№ Раздела (темы)	Краткое содержание темы занятия	Кол-во часов
1.	1	Задачи по теме: Выпуклые множества. Линейные операции Минковского. Метрика Хаусдорфа. Касательные и асимптотические конусы.	2
2.	2	Задачи по теме: Выпуклые полунепрерывные снизу функции, функции Минковского, опорные функции. Выпуклая оболочка функции. Вычисление выпуклых оболочек множеств и функций, используя аппарат опорных функций.	2
3.	1,2,3	Задачи по теме: Отделимость выпуклых множеств. Сопряжённые функции. Производные по направлениям для выпуклых функций. Субдифференциал выпуклой функции. Основы субдифференциального исчисления.	2
4.	3	Задачи по теме: Поляра множеств. Задача выпуклого программирования. Обобщение выпуклых функций. Обобщение задачи выпуклого программирования. Использование аппарата выпуклого анализа для решения некоторых негладких и невыпуклых задач на условный минимум.	2
ВСЕГО			**8**

4. ТЕКУЩАЯ И ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АТТЕСТАЦИЯ. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Текущая аттестация аспирантов. Текущая аттестация аспирантов проводится в соответствии с локальным актом ФГБУН ИПМ им. М.В. Келдыша РАН - Положением о текущей, промежуточной и итоговой аттестации аспирантов ФГБУН ИПМ им. М.В. Келдыша РАН по программам высшего образования – программам подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре и является обязательной.

Текущая аттестация по дисциплине проводится в форме опроса, а также оценки вопроса-ответа в рамках участия обучающихся в дискуссиях и различных контрольных мероприятиях по оцениванию фактических результатов обучения, осуществляемых преподавателем, ведущим дисциплину. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины см. ниже.

Объектами оценивания выступают:

– учебная дисциплина – активность на занятиях, своевременность выполнения различных видов заданий, посещаемость занятий;

– степень усвоения теоретических знаний и уровень овладения практическими умениями и навыками по всем видам учебной работы, проводимых в рамках семинаров, практических занятий и самостоятельной работы.

Оценивание обучающегося на занятиях осуществляется с использованием нормативных оценок зачет и незачет.

Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.

Форма контроля знаний	Вид аттестации	Примечание
проверочные работы в течение	текущая	Ниже приведены перечни

всего курса, прием домашних заданий в форме практической реализации изученных методов		рекомендуемых задач и контрольных вопросов
зачет	итоговая	

Примерный перечень рекомендуемых контрольных вопросов для оценки **текущего** уровня успеваемости студента:

1. Определение гильбертова и банахова пространства. Дать прямое определение (через отрезок) выпуклого множества в банаховом пространстве. Привести типичные примеры выпуклых множеств (шар, гиперплоскость, аффинное множество, симплекс). Дать определение строго выпуклого множества.
2. Определение алгебраической суммы и разности Минковского. Описать свойства суммы и разности Минковского. Показать, что сумма и разность выпуклых множеств являются, по сути, выпуклыми множествами.
3. Понятия выпуклой комбинации точек, аффинной комбинации точек, линейной комбинации точек. Критерий выпуклости множества. Определение выпуклой оболочки (невыпуклого) множества. Теорема о выпуклой оболочке множества в банаховом пространстве, состоящей из тех и только тех точек, которые являются выпуклой комбинацией конечного числа точек множества. Теорема Каратеодори.
4. Метрика Хаусдорфа, её определение. Разные формы задания метрики Хаусдорфа, показать их эквивалентность. Показать, что задаваемые формы метрики Хаусдорфа удовлетворяют аксиомам расстояния. Примеры вычисления расстояния между множествами на плоскости. Лемма об эквивалентном выражении расстояния через расстояния между точками этих множеств. Полное метрическое пространство с метрикой Хаусдорфа. Компактное метрическое подпространство в метрике Хаусдорфа.
5. Определение понятия конуса. Выпуклая коническая оболочка данного множества, её определение, формула вычисления. Определение касательного вектора ко множеству в данной точке. Нижний касательный конус. Верхний касательный конус, формула его вычисления. Касательный конус Кларка, теорема о его выпуклости. Привести примеры, демонстрирующие различия касательных конусов, их достоинства (размер) и недостатки (невыпуклость). Алгоритм выделения в любом (невыпуклом) конусе выпуклого подконуса. Асимптотический конус (по Рокафеллару) выпуклого неограниченного множества. Нижний асимптотический конус и верхний асимптотический конус. Взаимосвязь всех классов касательных конусов.
6. Понятие эффективного множества и надграфика функции. Понятия положительно-однородной функции и собственной функции, определённой на банаховом пространстве. Полунепрерывная снизу функция, её определение. Связь полунепрерывности снизу функции с замнутостью лебеговых множеств уровня и замкнутостью надграфика этой функции. Понятие замыкания функции и теорема Вейерштрасса о достижении точной нижней грани. Определение выпуклой функции через надграфик этой функции. Неравенство Иенсена для выпуклой функции. Определение вогнутой функции. Привести примеры выпуклых функций.
7. Функция Минковского (калибровочная функция) выпуклого множества, её определение, основные свойства (положительная однородность, выпуклость, полунепрерывность снизу, монотонное убывание как функции множества). Примеры вычисления функции Минковского для шара и куба. Опорная функция множества, её определение, основные свойства (положительная однородность, выпуклость, полунепрерывность снизу, для ограниченного множества опорная функция удовлетворяет условию Липшица). Примеры вычисления опорной функции для шара и квадрата.

8. Определение выпуклой оболочки (невыпуклой) функции, её свойства. Показать, что любая выпуклая функция, ограниченная на некотором открытом множестве, является непрерывной функцией. Собственная выпуклая функция. Показать, что в общем случае банахова пространства выпуклая функция, у которой внутренность эффективного множества пуста, может оказать разрывной в каждой точке. Привести пример выпуклой функции, эффективное множество которой – отрезок в $\square^1$, и которая является непрерывной в каждой внутренней точке эффективного множества, но не является липшицевой на всем отрезке.
9. Понятие о топологической отделимости множеств в различных пространствах. Показать, что непересекающиеся выпуклые множества могут быть разделены некоторой гиперплоскостью. Различные виды отделимости (простая, строгая, сильная). Определение опорной гиперплоскости (и опорного функционала) ко множеству в его граничной точке. Чем отличается топологическая отделимость от отделимости выпуклых множеств. Привести пример двух непересекающихся замкнутых множеств в $\square^2$, которые можно разделить строго, но нельзя сильно.
10. Фундаментальная теорема функционального анализа – теорема Хана-Банаха. Первая теорема о строгой отделимости двух непересекающихся выпуклых множеств из банахова пространства в случае, если одно из множеств открыто. Вторая теорема о сильной отделимости двух непересекающихся замкнутых выпуклых множеств из банахова пространства в случае, если одно из множеств является компактом. Эквивалентность замкнутости и слабой замкнутости выпуклых множеств из банахова пространства как следствие теорем об отделимости. Принцип двойственности выпуклых множеств. Определение слабой полунепрерыной снизу функции.
11. Определение преобразования Лежандра-Юнга-Фенхеля собственной функции, его свойства. Привести примеры вычисления функции, сопряжённой к данной функции. Привести правило вычисления выпуклой замкнутой оболочки через вторую сопряжённую функцию. Инфинимальная конволюция, её определение, её свойства.
12. Вычисление выпуклых оболочек и функций, используя аппарат опорных функций. Принципы построения, необходимые утверждения и теоремы. Теорема Каратеодири. Формула вычисления выпуклой оболочки функции, определённой на $\square^n$, через точную нижнюю грань по всем выпуклым комбинациям значений функции в не более чем (n+1) точках из $\square^n$. Примеры вычисления опорных функций объединения двух множеств, зная опорные функции этих множеств. Примеры вычисления опорных функций пересечения двух выпуклых замкнутых множеств по опорным функциям этих множеств. Примеры вычисления выпуклых оболочек функции.
13. Определение производной по Гато функции, определённой в банаховом пространстве. Необходимое и достаточное условие выпуклости для дифференциремой по Гато функции. Привести в $\square^2$ пример функции разрывной в точке, но дифференцируемой по Гато в этой точке. Производная по направлениям функции, её определение, связь с производной по Гато. Свойства производной по направлениям выпуклой функции. Связь надграфика производной по направлениям выпуклой функции в точке с касательным конусом к надграфику данной функции в точке.
14. Определение субградиента выпуклой функции в точкае из банахова и сопряжённого банахова пространства. Определение субдифференциала выпуклой функции в точке, его свойства. Примеры вычисления субдифференциала: нормы, положительно-однородной функции, индикаторной функции выпуклого множества, опорной функции. Связь субдифференциала функции в точке и субдифференциала производной по направлениям этой же функции. Связь субдифференциала выпуклой функции в точке с производной по Гато (если существует). Свойства субдифференциала (и его опорной функции) для положительно-однородной непрерывной выпуклой функции в точке нуль.

15. Основные теоремы субдифференциального исчисления. Теорема Дубовицкого-Милютина. Теорема Моро-Рокафеллара. Следствие теоремы о субдифференциале суммы конечного числа функций. Необходимое и достаточное условие минимума выпуклой функции на выпуклом замкнутом множестве. Понятие нормального конуса ко множеству в точке. Формула вычисления нормального конуса для пересечения множеств через сумму нормальных конусов для множеств, входящих в пересечение.
16. Поляра множеств. Дать определение поляры и биполяры для множеств из банахова пространства и множеств из сопряжённого пространства. Свойства поляры (выпуклость, замкнутость, содержание точки 0, связь поляр для множеств, выражение поляры через опорную функцию множества). Примеры вычисления поляры шара и полупространства. Формула вычисления биполяры множества через исходное множество. Формулы вычисления поляры для множеств, представимых в виде объединения или пересечения множеств. Поляра конечной суммы выпуклых косинусов. Поляра пересечения конечного числа выпуклых косинусов. Поляра конической выпуклой оболочки множества. Поляра конической выпуклой оболочки субдифференциала.
17. Постановка задачи минимизации выпуклой функции, определённой на выпуклом замкнутом множестве. Необходимы и добавочные условия. Задача выпуклого прогнозирования как частный случай задачи минимизации. Показать, что при выполнении дополнительного условия Слейтера необходимые и достаточные условия минимума в задаче выпуклого программирования эквивалентны необходимым и достаточным условиям безусловного минимума функции Лагранжа на всём пространстве с некоторыми условиями «дополняющей нежёсткости». Зачем нужно условие Слейтера? Привести пример задачи выпуклого программирования, в которой не выполнены условия Слейтера, и для любой функции типа Лагранжа не выполняется необходимое субдифференциальное условие оптимальности в точке минимума.
18. Обобщение выпуклых функций. Понятие локально выпуклой функции по Иоффе-Тихомирову, определение субдифференциала такой функции. Понятие регулярной локально выпуклой функции по Иоффе-Тихомирову. Основные свойства субдифференциалов регулярных локально выпуклых функций. Понятие r-выпуклой функции, её основные свойства. Субдифференциальное неравенство для r-выпуклых функций. Обобщение задачи выпуклого программирования. Задача нахождения минимума r-выпуклой функции на множестве, представимом в виде пересечения конечного числа лебеговых множеств различных r-выпуклых функций. Теорема о необходимых условиях минимума в обобщённой задаче в виде субдифференциального включения. ,Распространение метода Лагранжа на указанный тип задач.

Задачи, используемые для оценки успеваемости аспирантов, делятся на теоретические и практические. По каждому из пяти больших разделов программы должно быть выполнено не менее одной практической задачи, источником которых является [4, 7]. Теоретические задачи тоже будут взяты преимущественно из этого источника.

Промежуточная аттестация аспирантов. Промежуточная аттестация аспирантов по дисциплине проводится в соответствии с локальным актом ФГБУН ИПМ им. М.В. Келдыша РАН – Положением о текущей, промежуточной и итоговой аттестации аспирантов ФГБУН ИПМ им. М.В. Келдыша РАН по программам высшего образования – программам подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре и является обязательной.

Итоговая аттестация аспирантов. Итоговая аттестация по дисциплине осуществляется в форме зачета в период зачетно-экзаменационной сессии в соответствии с Графиком учебного процесса по приказу (распоряжению заместителю директора по научной работе). Обучающийся допускается к зачету в случае выполнения аспирантом всех учебных заданий и мероприятий, предусмотренных настоящей программой. В случае наличия учебной задолженности (пропущенных занятий и (или) невыполненных заданий) аспирант отрабатывает пропущенные занятия и выполняет задания.

Оценивание обучающегося на промежуточной аттестации осуществляется с использованием нормативных оценок на зачете – Зачет, Незачет.

Список задач вопросов и задач к зачету:

1) Пусть A, B – выпуклые множества, $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$. Доказать, что $\lambda A+\mu B$ – выпуклое множество.
2) Доказать, что при $\lambda>0,\ \mu>0$, справедливо равенство $\lambda A+\mu A = (\lambda+\mu)A$.
3) Привести пример выпуклого множества A и чисел $\lambda>0,\ \mu<0$, для которых $\lambda A+\mu A \neq (\lambda+\mu)A$.
4) Привести пример невыпуклого множества A, для которого $A+A \neq 2A$.
5) Доказать, что если A, B – компакты из банахова пространства, то $A+B$ – тоже компакт.
6) Доказать, что если A – компакт, а B – замкнутое множество из банахова пространства, то $A+B$ – замкнутое множество.
7) Привести пример выпуклых замкнутых множеств A, B, для которых $A+B$ является незамкнутым множеством.
1) Пусть $\mathrm{co}(A)$ обозначает выпуклую оболочку множества A.
Доказать, что $\mathrm{co}(A+B) = \mathrm{co}(A)+\mathrm{co}(B)$.
7) Доказать, что если A – открыто, то $\mathrm{co}(A)$ – тоже открытое множество.
8) Доказать, что если A – конечное множество точек из банахова пространства, то $\mathrm{co}(A)$ есть компакт.
9) Доказать, что если A – компакт из $\mathbb{R}^n$, то $\mathrm{co}(A)$ – также компакт. (*Указание:* использовать теорему Каратеодори).
10) Сформулировать без доказательства теорему выбора Бляшке (в метрике Хаусдорфа).
11) Доказать неравенство для расстояния между множествами по Хаусдорфу $h(A,B)$:

$$\left|\rho(x,A)-\rho(x,B)\right| \leq h(A,B)$$

, где A, B – ограниченные замкнутые множества, $x \in E$.

12) Доказать неравенства $(A,B,C,D \subset E;\ \alpha,\beta \in \mathbb{R})$:

$$h(A+B,C+D) \leq h(A,C)+h(B,D)$$

$$h(\alpha A,\alpha B) \leq |\alpha|\cdot h(A,B)$$

$$h(\alpha A,\beta A) \leq |\alpha-\beta|\cdot h(A,\{0\})$$

13) Что геометрически означает полунепрерывность снизу функции? Привести пример разрывной в точке функции, полунепрерывной снизу в этой точке.
14) Привести пример невыпуклой функции, у которой выполнено неравенство Иенсена при

$$(p,A-B) \leq \lambda = \frac{1}{2}.$$

15) Какое свойство функции Минковского соответствует её второму названию как калибровочная функция?
16) Доказать непрерывность опорной функции для ограниченного множества.
17) Доказать равенство и неравенство:

$$s(p,A+B) = s(p,A)+s(p,B)$$

$s(p, A - B) \le \mathrm{co}\left(s(p, A) - s(p, B)\right)$

6) Доказать неравенство

$\mathrm{co}(f + g)(x) \ge \mathrm{co}\, f(x) + \mathrm{co}\, g(x)$

18) Доказать равенство

$\mathrm{co}\left(f(x) + \langle p, x\rangle + \alpha\right) = \mathrm{co}\, f(x) + \langle p, x\rangle + \alpha$

19) В каком случае выпуклая оболочка собственной функции может оказаться несобственной функцией? Привести пример.

20). Чем отличается топологическая отделимость от отделимости выпуклых множеств?

21). Пусть даны выпуклое замкнутое множество A из гильбертова пространства H и точки $x, y \in A$. Показать, что для проекций $P_A x$ и $P_A y$ точек x и y на A выполнено неравенство

$\|P_A x - P_A y\| \le \|x - y\|$

22). Привести пример двух непересекающихся замкнутых множеств в $\mathbb{R}^2$, которые можно разделить строго, но нельзя сильно.

Оценивание аспиранта на промежуточной аттестации в форме зачета

Оценка	Требования к знаниям и критерии выставления оценок
Незачет	Основное содержание учебного материала не раскрыто. Допущены грубые ошибки в определении понятий и при использовании терминологии. Не даны ответы на дополнительные вопросы.
Зачет	Раскрыто содержание материала, даны корректные определения понятий. Допускаются незначительные нарушения последовательности изложения. Допускаются небольшие неточности при использовании терминов или в логических выводах. При неточностях задаются дополнительные вопросы.

5. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Основная литература

1. Rockafellar, R. Tyrrell. Convex Analysis // Reprint of the 1970 original. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton Paperbacks. *Princeton University Press, Princeton, NJ,* 1997. XVIII+451 pp. ISBN: 0-691-01586-4
Перевод с английского А.Д. Иоффе и В.М. Тихомирова:
Р. Рокафеллар. Выпуклый анализ // М.: Мир, 1973 (УДК 512,513,517,519)

2. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи // М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1980. (УДК 519.6)

Дополнительная литература и Интернет-ресурсы

1. Болтянский В.Г. Оптимальное управление дискретными системами // М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1973. (УДК 519.9)

2. Пшеничный Б.Н. Необходимые условия экстремума – *(2-е изд., перераб. и доп.)* // М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1982. (УДК 519.6)

3. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию // М.: Наука, 1983.

4. Boyd S., Vanderberghe L. Convex Optimization // *Cambridge Univ. Press*, 2004.

5. Половинкин Е.С. Выпуклый анализ // *Учебно-методическое пособие*, М.: МФТИ, 2006.

6. Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Оптимизация, теория, примеры, задачи // М.: УРСС, 2000.

7. Измайлов А.Ф., Солодов М.В. Численные методы оптимизации // М.:Физматлит, 2005.

8. Нестеров Ю.Е. Введение в выпуклую оптимизацию // М.: МЦНМО, 2010

6. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Для обеспечения интерактивных методов обучения для чтения лекций требуется аудитория с мультимедиа (возможен вариант с интерактивной доской).

Для проведения дискуссий и круглых столов, возможно, использование аудиторий со специальным расположением столов и стульев.

ИСПОЛНИТЕЛИ (разработчики программы):
Голиков А.Р., ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, старший научный сотрудник, к.ф.-м.н.