

## ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

на диссертационную работу Рублева Георгия Дмитриевича

«Численный метод CSPH с корректировкой градиента сглаживающего ядра и его применение в механике деформируемых сред»,

представленную на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук по специальности 1.2.2.  
«Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Диссертация Рублева Георгия Дмитриевича посвящена развитию метода “гидродинамика сглаженных частиц” численного решения начально-краевых задач для уравнений математической физики (Smoothed Particle Hydrodynamics, SPH), а также созданию на его основе вычислительных модулей программного комплекса РуРНИА для моделирования ударно-волновых и диссипативных процессов в механике сплошных сред. Актуальность работы определяется интенсивным развитием подходов компьютерного проектирования в инженерии (CAE, Computer Aided Engineering), а также ростом количества публикаций, использующих метод SPH в качестве основного инструмента численного моделирования в таком проектировании. Так с 2021 года в базе данных Google Scholar ежегодно индексируется более 6000 новых научных статей, в названии которых фигурирует аббревиатура SPH. Кроме того, в настоящий момент научным сообществом развивается и поддерживается более десяти свободно-распространяемых пакетов прикладных программ для решения задач вычислительной механики сплошных сред методом SPH в астрофизике, биомеханике, гидротехнике и других областях. При этом SPH сохраняет потенциал для развития, например, как метод, в рамках которого могут быть реализованы и макроуровневые и мезоуровневые модели механики.

Диссертация Рублева Г.Д. состоит из введения, 4 глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 167 страниц, включая 60 рисунков и 7 таблиц. Список литературы содержит 108 наименований.

В *первой главе* приведено описание реализованных в диссертационной работе математических моделей сжимаемых и упругопластических сред. В этой же главе описаны численные модели механики сжимаемых сред на основе классического подхода SPH, содержащего искусственную вязкость, и контактного SPH (CSPH), использующего решения задачи Римана для распада разрыва. В третьей части первой главы приведён вывод полученного автором семейства осесимметричных схем метода CSPH.

Во *второй главе* выполнен анализ дискретной аппроксимации уравнений, лежащих в основе метода CSPH. А именно, выписаны приближенное дисперсионное соотношение (ПДС) для CSPH и первое дифференциальное приближение (ПДП) для него же. Показано, как из ПДП получена формула для оценки схемной вязкости метода и на ее основе выписаны антидиффузионные слагаемые для управления схемной вязкостью. Кроме того, показано, как анализ ПДП приводит к идее коррекции градиента сглаживающего ядра и приведены формулы, позволяющие выполнять коррекцию в CSPH в декартовом и цилиндрической системе координат. Показано, что коррекция градиента CSPH и осесимметричного CSPH сохраняет полный импульс и полную энергию во всей расчетной области.

Первые пять разделов *третьей главы* содержат описание структуры разрабатываемого при участии соискателя программного комплекса РуРНИА. В разделах 3.6-3.9 представлены результаты верификации разработанных алгоритмов, которые свидетельствуют о работоспособности новой версии CSPH и преимуществах над версией CSPH предыдущего поколения.

В четвертой главе сжато описаны результаты валидации моделей, разработанных в диссертации, в частности, моделирование обтекания цилиндров вязкой жидкостью, моделирование развития неустойчивости Рэлея-Плато и моделирование ослабления ударной волны с помощью разрушаемой песчаной преграды.

По мнению оппонента, полученное соискателем ПДП для CSPH-аппроксимации уравнений газовой динамики в декартовой и цилиндрической системе координат является новым научным результатом, имеющим прикладное значение. ПДП позволяет получать формулы для корректировки дискретного градиента в методе SPH. Эта корректировка в некоторых случаях уменьшает погрешность численного решения, причем в разработанном в диссертации осесимметричном случае практически без увеличения вычислительных затрат. Отмечу перспективность развития этого подхода за счет того, что процесс получения ПДП для SPH может быть алгоритмизирован и затем автоматизирован, поскольку уже разработана библиотека, решающая аналогичную задачу для метода конечных разностей [M. Karam, J. C. Sutherland, and T. Saad, "PyModPDE: A python software for modified equation analysis," *SoftwareX* 12 (2020)].

**По содержанию работы** имеются следующие замечания.

1. В главе 1 приведено уравнение неразрывности, записанное в терминах объемных деформаций (уравнение 1.1). Однако далее по тексту отсутствует обсуждение преимуществ такого подхода по сравнению с традиционной записью уравнения в терминах плотности. Отмечу, что при решении уравнений газовой динамики запись уравнения неразрывности в терминах плотности позволяет использовать альтернативный подход к его решению. В этом подходе плотность рассчитывается как сумма масс соседних частиц с весом, определяемым функцией сглаживающего ядра. Опыт рецензента показывает, что в некоторых случаях схема, основанная на таком подходе, имеет существенно более широкую область устойчивости, чем схема, в которой плотность находится из решения уравнения в частных производных.

2. В главе 2 приводятся обоснования свойств метода CSPH средствами вычислительной математики. При этом отсутствуют ссылки на аналогичные работы других авторов, в связи с чем из текста диссертации невозможно понять следующие факты.

2.1. Какие выкладки сделаны автором впервые, а какие приведены для системности изложения материала. В частности, дисперсионное соотношение (2.7) приводится также в работе S.-H. Cha and A. P. Whitworth, "Implementations and tests of Godunov-type particle hydrodynamics," *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 340, 73–90 (2003) (смотри уравнение (46)), ссылка на которую отсутствует в диссертации.

2.2 Как соотносятся результаты анализа, проделанного автором, с известными ранее результатами. В частности, при анализе погрешности CSPH с использованием разложения функции нескольких переменных в ряд Тэйлора автором диссертации показано, что метод имеет первый порядок аппроксимации по  $h$  - радиусу сглаживания. При этом как в теории (используя дисперсионный анализ), так и на практике (при решении одномерных уравнений газовой динамики) методом SPH (без использования решения задачи Римана) можно получить второй порядок аппроксимации по  $h$  на гладких решениях при равномерной упаковке частиц. Представляется целесообразным пояснить, является ли данный вывод результатом систематического занижения порядка погрешности за счет использования ряда

Тэйлора, предположения о неравномерности упаковки частиц или же первый порядок привносится за счет использования решателей Римана для гладких решений.

3. В подразделе 2.1.2 для контактного метода CSPH строится приближенное дисперсионное соотношение (ПДС), а в подразделе 2.2.2 для него же строится первое дифференциальное приближение (ПДП). Представляется логичным сопоставить результаты, то есть выделить свойства, о которых дают информацию ПДС и ПДП, и свойства, которые проявляются только в одном из подходов.

4. В главе 3 приведено описание большого количества тестов по верификации разработанного метода, но опущены несколько моментов, позволяющих оценить значимость результатов.

4.1 Не приведено сведений о том, насколько использование интерпретатора Python влияет на время счета задач.

4.2 При описании кейсов часто опущены ключевые данные по счетным параметрам метода, например, непонятно сколько частиц приходится на расчетную область практически во всех тестах главы 3.

4.3 На стр. 64 приведено определение квазиравномерной упаковки частиц и утверждение, что если частицы расположены квазиравномерно, то <<корректировка градиента ядра улучшает SPH-аппроксимацию>>, там же сказано, что в коде корректировка градиента выполняется только после того, как установлена квазиравномерность упаковки. При описании тестов на корректировку градиента в разделе 3.6 не указано, как часто частицы оказываются квазиупорядоченными и корректировка градиента действительно реализуется. Естественно предположить, что в тестах с разрывными решениями квазиравномерность расстановки частиц быстро утрачивается. Однако на практике погрешность расчетов разрывных решений также уменьшается. Предположения соискателя, разрешающие это противоречие, в диссертации отсутствуют.

5. В пункте 3.6.5 обсуждаются решения цилиндрической задачи Сода, полученные осесимметричным методом CSPH и осесимметричным методом с корректировкой градиента ТКС-CSPH. Показано, что ТКС-CSPH позволяет получать осесимметричные решения для таких счетных параметров, при которых в CSPH наблюдается нарушение симметрии. Есть ли у соискателя предположения, объясняющие эту разницу.

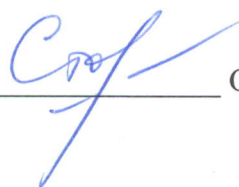
6. Глава 4 содержит результаты валидации реализованных моделей на известных экспериментальных данных. При этом глава называется “Примеры применения разработанных численных алгоритмов”, что по мнению рецензента не отражает содержания. Для того, чтобы содержание главы соответствовало названию, целесообразно либо дополнить содержание (конкретизировать, для каких предсказаний разработана модель и комплекс программ, а также указать текущие ограничения модели), либо поменять название на “Валидация модели”.

Несмотря на высказанные замечания диссертация Рублева Г.Д. представляет собой законченную научную работу, результаты которой являются новыми и могут быть использованы в дальнейших исследованиях и инженерном проектировании. Диссертационное исследование содержит все этапы, включенные в название специальности 1.2.2 - «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».


Полученные соискателем результаты опубликованы в 4 статьях, рекомендованных ВАК, а также прошли апробацию на российских конференциях и семинарах. Диссертационная работа Рублева Г.Д. соответствует требованиям «Положения о порядке присуждения учёных степеней», утверждённых постановлением Правительства Российской Федерации от 24.09.2013 г. № 842, предъявляемых ВАК РФ к кандидатским диссертациям. Считаю, что Рублев Георгий Дмитриевич заслуживает присуждения ему учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.2.2 - «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».

Я даю согласие на включение моих персональных данных в документы, связанные с деятельностью диссертационного совета, и на их последующую обработку.

Официальный оппонент, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук

  
О. П. Стояновская

Подпись старшего научного сотрудника Стояновской Ольги Петровны заверяю

Учёный секретарь ИГиЛ СО РАН  
к.фр.-м.н.  А. К. Хе

Дата 13 сентября 2026 г

