

На правах рукописи

Рублев Георгий Дмитриевич

**Численный метод CSPH с корректировкой градиента
сглаживающего ядра и его применение в механике
деформируемых сред**

Специальность 1.2.2 —
«Математическое моделирование, численные методы и комплексы
программ»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2025

Работа выполнена в федеральном государственном унитарном предприятии «Всероссийский научно-исследовательский институт автоматики имени Н. Л. Духова».

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук
Дьячков Сергей Александрович

Официальные оппоненты: **Шаргатов Владимир Анатольевич**,
доктор физико-математических наук, доцент,
Национальный исследовательский ядерный
университет «МИФИ»,
Ведущий научный сотрудник

Стояновская Ольга Петровна,
кандидат физико-математических наук,
Федеральное государственное бюджетное
учреждение науки Институт гидродинамики
им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения
Российской академии наук,
Старший научный сотрудник

Ведущая организация: Российский Федеральный Ядерный Центр –
Всероссийский научно-исследовательский ин-
ститут технической физики имени академика
Е.И. Забабахина

Защита состоится «29» января 2026 г. в 11 час. 00 мин. на заседании диссер-
тационного совета 24.1.237.01, созданного на базе ИПМ им. М.В. Келдыша
РАН, расположенного по адресу: 125047, г. Москва, Миусская пл., д.4.

Автореферат разослан «___» _____ 2025 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
24.1.237.01,
к.ф.-м.н.

М.А. Корнилина

Общая характеристика работы

Актуальность темы. При моделировании задач механики сплошных многокомпонентных сред с большими относительными скоростями деформации использование сеточных численных методов затруднено ввиду быстрого изменения формы свободных границ и границ раздела материалов, возможного наличия таких явлений как откол и кавитация. К таким задачам относятся, например, пробитие преград, кумуляция, разрушение преград взрывом. При решении таких задач в рамках сеточного эйлерова подхода возникает необходимость расчёта смешанных ячеек, а лагранжев формализм невозможен без перестроения сетки. Оба метода требуют применения специальных методик. В качестве возможной альтернативы рассматривается переход к бессеточным лагранжевым методам частиц, таким, как метод гидродинамики сглаженных частиц (SPH). В методе SPH среда представляется произвольным набором точек, каждая из которых связана со своим малым объёмом фиксированной массы (так называемые “сглаженные” частицы). Такие частицы не имеют постоянных связей, а отслеживание контактных и свободных границ происходит при расчёте автоматически.

Метод CSPH обладает высокой схемной вязкостью и сравнительно низкой точностью аппроксимации пространственных производных, что препятствует его широкому распространению. Для реалистичного моделирования течений вязкой жидкости необходимы способы введения физической вязкости и компенсации схемной вязкости. Для моделирования поверхностных явлений требуются особые граничные условия. Некоторые задачи допускают переход к осесимметричному моделированию, что позволяет значительно снизить требования к вычислительным ресурсам (уменьшить объём используемой памяти и количество используемых вычислительных узлов) при сохранении высокой точности пространственной дискретизации расчётной области. Поэтому разработка осесимметричного контактного метода SPH в настоящее время также является актуальной задачей.

Целью данной работы является развитие семейства контактных методов гидродинамики сглаженных частиц CSPH с компенсацией ошибок аппроксимации и создание соответствующих модулей в рамках программного комплекса РупНИА, разработанного при участии автора диссертации, для достоверного моделирования вязких течений, поверхностных явлений, а также задач механики упругопластических сред в условиях больших деформаций.

Для достижения поставленной цели потребовалось решение следующих задач:

1. Формулировка моделей вязких и упругопластических сред для последующего применения метода CSPH.

2. Формулировка дискретной модели в соответствии с методом CSPH, определение источников ошибок аппроксимации и разработка подходов для их устранения.
3. Разработка осесимметричного метода CSPH, обеспечивающего сохранение полного импульса и полной энергии в замкнутых системах, для моделирования задач с осевой симметрией с высокой точностью пространственной дискретизации.
4. Разработка модели и алгоритма учёта поверхностного натяжения для семейства методов CSPH.
5. Создание модулей для программного комплекса РуРНИА для моделирования методом CSPH с компенсацией ошибок аппроксимации.

Методы исследования. При решении поставленных задач использовались: контактный метод гидродинамики сглаженных частиц для сжимаемой среды с использованием приближенных решений задачи Римана при аппроксимации законов сохранения массы, импульса и энергии, явный метод Эйлера для интегрирования по времени, дисперсионный анализ и формула Тейлора для исследования свойств численной схемы.

Достоверность и обоснованность полученных результатов обеспечивается строгостью используемого математического аппарата и подтверждается сравнением результатов с известными аналитическими решениями и экспериментальными данными, а также результатами, полученными ранее другими авторами.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые результаты:

1. В ходе анализа свойств схемы CSPH впервые установлено теоретическим путём, что схемная вязкость при моделировании сдвигового течения аналогична физической. Получена формула для оценки коэффициента схемной динамической сдвиговой вязкости метода CSPH.
2. Впервые процедура корректировки градиента сглаживающего ядра, которая улучшает аппроксимацию пространственных производных, распространена на семейство контактных методов CSPH.
3. Впервые получено семейство осесимметричных схем контактного метода CSPH, отвечающих законам сохранения импульса и энергии.
4. Впервые предложен алгоритм учета внешнего давления и поверхностного натяжения для семейства контактных методов CSPH с корректировкой веса фиктивных частиц, в том числе в осесимметричной постановке.
5. Созданы программные модули в рамках комплекса РуРНИА для моделирования вязких течений, поверхностных явлений, а также задач механики упругопластических сред в условиях сильной деформации как в декартовой, так и в осесимметричной геометрии.

Практическая значимость. Расширена область применимости контактного метода CSPH на вязкие сжимаемые среды. Использование компенсирующих слагаемых в правых частях уравнений позволяет снизить схемную вязкость до уровня физической вязкости среды.

Предложенная корректировка градиента сглаживающего ядра ТКС позволяет обеспечить лучшую аппроксимацию пространственных производных и сходимостью к точному решению при уменьшении размера частиц, что важно при верификации расчетов с различным пространственным разрешением.

Осесимметричный контактный метод CSPH позволяет решать прикладные задачи с осевой симметрией с высоким пространственным разрешением, недоступным для трёхмерного моделирования.

Реализованный алгоритм учета внешнего давления позволяет расширить область применимости метода CSPH на задачи с поверхностным натяжением, в том числе в осесимметричном случае.

Реализация предложенных методов и алгоритмов в рамках программного комплекса РуРНИА позволяет использовать передовые возможности моделирования на современных высокопроизводительных вычислительных системах в массивно-параллельном режиме и проводить расчеты с использованием миллиардов частиц.

Положения, выносимые на защиту:

1. Способ моделирования вязкой сжимаемой среды с использованием корректирующего тензора вязких напряжений в рамках метода CSPH.
2. Методика повышения точности аппроксимации пространственных производных путем корректировки градиента сглаживающего ядра ТКС для семейства контактных методов CSPH.
3. Осесимметричная численная схема CSPH, обеспечивающая сохранение полного импульса и полной энергии, для моделирования сжимаемых сред с высоким пространственным разрешением.
4. Алгоритм учета внешнего давления с корректировкой веса фиктивных частиц для моделирования поверхностного натяжения, в том числе в осесимметричной постановке.
5. Модули программного комплекса РуРНИА для математического моделирования вязких течений, поверхностных явлений, а также задач механики упругопластических сред в условиях сильной деформации как в декартовой, так и в осесимметричной геометрии.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях и семинарах: XXXVIII Fortov international conference on equation of state for matter (Эльбрус, Кабардино-Балкария, Россия, 2022); XVI Международная конференция “Забабахинские научные чтения” (Снежинск, Россия, 2023); XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике (Санкт-Петербург, Россия, 2023);

CFD-Уикенд 2023 (Москва, Россия, 2023); XXXIX Fortov international conference on equation of state for matter (Эльбрус, Кабардино-Балкария, Россия, 2024); CFD-Уикенд 2024 (Москва, Россия, 2024); XIX Международная конференция “Супервычисления и математическое моделирование” (Саров, Россия, 2024); Всероссийская конференция “Проблемы физики твердого тела и высоких давлений”, (пос. Вишневка, Россия, 2024); “Проблемы механики: теория, эксперимент и новые технологии” (пос. Шерегеш, Россия, 2025); XVII Международная конференция “Забабахинские научные чтения” (Снежинск, Россия, 2025); Научно-технический семинар ЦФПИ ВНИИА (Москва, Россия, 2025); семинар В.Ф. Тишкина и А.А. Кулешова в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (Москва, 2025); семинар ЛаПлаз в НИЯУ МИФИ (Москва, Россия, 2025).

Публикации. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 4-х научных статьях [1-4], в трёх статьях [1-2, 4] в изданиях, индексируемых в базах данных Scopus и Web of Science.

Личный вклад. Все изложенные в диссертации оригинальные результаты получены автором лично, либо при его непосредственном участии. Автор принимал непосредственное участие в выборе подходов к исследованию, разработке численных алгоритмов, реализации алгоритмов в рамках программного комплекса РурНИА, а также в обсуждении результатов моделирования. Численное моделирование проводилось лично автором.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 4 глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 167 страниц, включая 60 рисунков и 7 таблиц. Список литературы содержит 108 наименований.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, сформулирована цель, поставлены задачи работы, сформулированы научная новизна и практическая значимость диссертационной работы.

В первой главе приводится описание основных математических моделей и численных методов, используемых в работе для описания сплошных сред, а также граничного условия для моделирования поверхностного натяжения.

Для описания сплошных сред используются приведённые ниже уравнения выражающие законы сохранения массы, импульса и энергии:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{U}, \quad (1)$$

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (2)$$

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{U}), \quad (3)$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений, который представляется в виде суммы шаровой части $-P\mathbf{I}$ (\mathbf{I} — единичный тензор), тензора-девиатора упругих напряжений \mathbf{S} и тензора-девиатора вязких напряжений $\boldsymbol{\tau}$:

$$\boldsymbol{\sigma} = -P\mathbf{I} + \mathbf{S} + \boldsymbol{\tau}.$$

Тензор-девиатор упругих напряжений вычисляется как:

$$\frac{D\mathbf{S}}{Dt} = 2G \left(\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt} - \frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt} \right) \mathbf{I} \right), \quad (4)$$

где G — модуль сдвига, а $d\boldsymbol{\varepsilon}/dt$ — тензор скоростей деформаций:

$$\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt} = \frac{1}{2} \left(\nabla \otimes \mathbf{U} + (\nabla \otimes \mathbf{U})^T \right). \quad (5)$$

Тензор-девиатор вязких напряжений $\boldsymbol{\tau}$ имеет вид:

$$\boldsymbol{\tau} = \eta \left(2 \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{U}) \mathbf{I} \right),$$

где η — коэффициент динамической вязкости. Гидродинамическое давление считается равным среднему арифметическому нормальных напряжений, взятому со знаком “минус”:

$$P = -\frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\sigma}.$$

Во второй части первой главы приводится описание метода гидродинамики сглаженных частиц SPH. Особое внимание уделяется контактному методу SPH (CSPH), в который добавлена возможность введения физической вязкости. Обозначив ортогональную матрицу перехода из системы координат xyz в локальную систему координат RST (см. рисунок 1, единичные орты осей R , S и T обозначаются как \mathbf{e}_{ba}^R , \mathbf{e}_{ba}^S и \mathbf{e}_{ba}^T) как $\mathbf{M}_{ab}^{xyz \rightarrow RST}$ ($\mathbf{M}_{ab}^{RST \rightarrow xyz} = (\mathbf{M}_{ab}^{xyz \rightarrow RST})^T$) можно записать SPH-аппроксимацию уравнений (1)-(3), которые используются для моделирования вязких жидкостей, упругопластических и вязких упругопластических сред, в виде:

$$\frac{d\varepsilon_a}{dt} = -2 \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} (U_{ab}^{R*} - U_a^R) \frac{W'_{ab}}{h_{ab}}, \quad (6)$$

$$\frac{d\mathbf{U}_a}{dt} = -\frac{2}{\rho_a} \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} \mathbf{M}_{ab}^{RST \rightarrow xyz} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{ab}^{R*} \frac{W'_{ab}}{h_{ab}}, \quad (7)$$

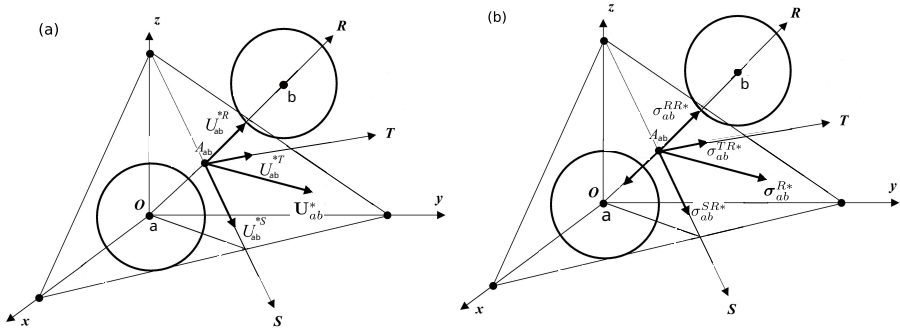


Рис. 1 — Локальная система координат RST. (а) Компоненты скорости в точке контакта. (б) Компоненты напряжений на контактной поверхности между частицами.

$$\frac{dE_a}{dt} = -\frac{2}{\rho_a} \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} \sigma_{ab}^{R*} \cdot \mathbf{U}_{ab}^* \frac{W'_{ab}}{h_{ab}}, \quad (8)$$

где для расчёта значений контактных векторов \mathbf{U}_{ab}^* и σ_{ab}^{R*} используются следующие выражения:

$$\mathbf{U}_{ab}^* = \begin{pmatrix} \frac{U_l^R \rho_l C_l^l + U_r^R \rho_r C_r^l - \sigma_r^{RR} + \sigma_l^{RR}}{\rho_l C_l^l + \rho_r C_r^l} \\ \frac{U_l^S \rho_l C_l^t + U_r^S \rho_r C_r^t - \sigma_r^{SR} + \sigma_l^{SR}}{\rho_l C_l^t + \rho_r C_r^t} \\ \frac{U_l^T \rho_l C_l^t + U_r^T \rho_r C_r^t - \sigma_r^{TR} + \sigma_l^{TR}}{\rho_l C_l^t + \rho_r C_r^t} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$\sigma_{ab}^{R*} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_r^{RR} \rho_l C_l^t + \sigma_l^{RR} \rho_r C_r^l - \rho_l C_l^l \rho_r C_r^l (U_r^R - U_l^R)}{\rho_l C_l^t + \rho_r C_r^l} + \tau_{ab}^{*RR} \\ \frac{\sigma_r^{SR} \rho_l C_l^t + \sigma_l^{SR} \rho_r C_r^t - \rho_l C_l^t \rho_r C_r^t (U_r^S - U_l^S)}{\rho_l C_l^t + \rho_r C_r^t} + \tau_{ab}^{*SR} \\ \frac{\sigma_r^{TR} \rho_l C_l^t + \sigma_l^{TR} \rho_r C_r^t - \rho_l C_l^t \rho_r C_r^t (U_r^T - U_l^T)}{\rho_l C_l^t + \rho_r C_r^t} + \tau_{ab}^{*TR} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Выражение для вектора напряжений на контакте (10) состоит из двух частей: это сумма упругой части напряжений, которые вычисляются в акустическом приближении с использованием напряжений в “правой” и “левой” частицах $(\sigma_{l,r}^{RR}, \sigma_{l,r}^{SR}, \sigma_{l,r}^{TR})^T = \mathbf{M}_{ab}^{xyz \rightarrow RST} \cdot ((-P_{l,r} \mathbf{I} + \mathbf{S}_{l,r}) \cdot \mathbf{e}_{ba}^R)$, и вязких напряжений (τ).

Описана схема CSPH с кусочно-линейной реконструкцией значений на контакте между частицами (MUSCL-SPH).

В третьей части первой главы приводится подробный вывод уравнений семейства схем осесимметричного метода CSPH, обеспечивающих сохранение полного импульса и полной энергии в замкнутых системах. Обсуждается граничное условие для частиц, находящихся вблизи оси

симметрии. Из построенного семейства схем выбрана схема “среднее гармоническое”:

$$\frac{d\varepsilon_a}{dt} = - \sum_b \frac{m_b}{2\pi\rho_b} \frac{(r_a + r_b)}{r_a r_b} (U_{ab}^{R*} - U_a^R) \frac{W'_{ab}}{h_{ab}} + \frac{U_a^r}{r_a}, \quad (11)$$

$$\frac{d\mathbf{U}_a}{dt} = - \sum_b \frac{m_b}{2\pi\rho_b\rho_a} \frac{r_b + r_a}{r_a r_b} \mathbf{M}_{ab}^{RT \rightarrow rz} \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{ab}^{R*} \frac{W'_{ab}}{h_{ab}} - \frac{\sigma_a^{\theta\theta}}{r_a \rho_a} \mathbf{e}^r, \quad (12)$$

$$\frac{dE_a}{dt} = - \sum_b \frac{m_b}{2\pi\rho_b\rho_a} \frac{r_b + r_a}{r_a r_b} \mathbf{U}_{ab}^* \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{ab}^{R*} \frac{W'_{ab}}{h_{ab}}, \quad (13)$$

где по аналогии со случаем декартовой системы координат $\mathbf{M}_{ab}^{rz \rightarrow RT}$ — матрица перехода из системы координат rz в локальную систему координат RT .

В четвёртой части данной главы приводится описание граничного условия внешнего давления, с помощью которого моделируется поверхностное натяжение.

Вторая глава посвящена методам повышения точности контактного метода SPH. В диссертационной работе приводится подробный анализ уравнений метода CSPH. В разделе 2.2.4 получена формула для оценки схемной вязкости метода CSPH, которая линейно зависит от размера частиц и акустического импеданса среды. В разделах 2.3, 2.4 и 2.5 вводится корректировка градиента сглаживающего ядра в уравнения контактного метода SPH. Корректировка затрагивает все уравнения (неразрывности, движения и энергии), из-за чего имеет название полной корректировки ядра (Total Kernel Correction (ТКС)). Скорректированные уравнения имеют следующий вид (верхний индекс “C” в приводимых ниже уравнениях означает модификацию контактных значений с помощью матрицы ренормализации \mathbf{L}_a^{-1} , а индекс “C2” означает модификацию контактных значений с помощью симметризованной комбинации $\mathbf{L}_{ab}^{-1} = 0.5(\mathbf{L}_a^{-1} + \mathbf{L}_b^{-1})$ матриц ренормализации частиц a и b):

$$\frac{d\varepsilon_a}{dt} = 2 \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} \left(\mathbf{M}_{ab}^{RST \rightarrow xyz} \cdot \mathbf{U}_{ab}^* - \mathbf{U}_a \right) \cdot (\mathbf{L}_a^{-1} \cdot \nabla_a W_{ab}), \quad (14)$$

$$\frac{d\mathbf{U}_a}{dt} = - \frac{2}{\rho_a} \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} \mathbf{M}_{ab}^{RST \rightarrow xyz} \cdot (\boldsymbol{\sigma}_{ab}^{*R})^{C2} \frac{W'_{ab}}{h_{ab}}, \quad (15)$$

$$\frac{dE_a}{dt} = - \frac{2}{\rho_a} \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} (\boldsymbol{\sigma}_{ab}^{*R})^{C2} \cdot \mathbf{U}_{ab}^* \frac{W'_{ab}}{h_{ab}}, \quad (16)$$

Расчёт значений контактных векторов \mathbf{U}_{ab}^* и $(\sigma_{ab}^{*R})^{C2}$ в схеме (14)-(16) в акустическом приближении имеет вид:

$$\mathbf{U}_{ab}^* = \begin{pmatrix} \frac{U_l^R \rho_l C_l^l + U_r^R \rho_r C_r^l - (\sigma_r^{RR})^{C2} + (\sigma_l^{RR})^{C2}}{\rho_l C_l^l + \rho_r C_r^l} \\ \frac{U_l^S \rho_l C_l^t + U_r^S \rho_r C_r^t - (\sigma_r^{SR})^{C2} + (\sigma_l^{SR})^{C2}}{\rho_l C_l^t + \rho_r C_r^t} \\ \frac{U_l^T \rho_l C_l^t + U_r^T \rho_r C_r^t - (\sigma_r^{TR})^{C2} + (\sigma_l^{TR})^{C2}}{\rho_l C_l^t + \rho_r C_r^t} \end{pmatrix},$$

$$(\sigma_{ab}^{*R})^{C2} = \begin{pmatrix} \frac{(\sigma_r^{RR})^{C2} \rho_l C_l^l + (\sigma_l^{RR})^{C2} \rho_r C_r^l - \rho_l C_l^l \rho_r C_r^l (U_r^R - U_l^R)}{\rho_l C_l^l + \rho_r C_r^l} \\ \frac{(\sigma_r^{SR})^{C2} \rho_l C_l^t + (\sigma_l^{SR})^{C2} \rho_r C_r^t - \rho_l C_l^t \rho_r C_r^t (U_r^S - U_l^S)}{\rho_l C_l^t + \rho_r C_r^t} \\ \frac{(\sigma_r^{TR})^{C2} \rho_l C_l^t + (\sigma_l^{TR})^{C2} \rho_r C_r^t - \rho_l C_l^t \rho_r C_r^t (U_r^T - U_l^T)}{\rho_l C_l^t + \rho_r C_r^t} \end{pmatrix},$$

где вектор напряжений корректируется симметричной относительно перестановки частиц комбинацией матриц ренормализации

$$\begin{pmatrix} (\sigma_{l,r}^{RR})^{C2} \\ (\sigma_{l,r}^{SR})^{C2} \\ (\sigma_{l,r}^{TR})^{C2} \end{pmatrix} = \mathbf{M}_{ab}^{xyz \rightarrow RST} \cdot ((-P_{l,r} \mathbf{I} + \mathbf{S}_{l,r}) \cdot (\mathbf{L}_{ab}^{-1} \cdot \mathbf{e}_{ba}^R)),$$

$$\begin{pmatrix} U_{l,r}^R \\ U_{l,r}^S \\ U_{l,r}^T \end{pmatrix} = \mathbf{M}_{ab}^{xyz \rightarrow RST} \cdot \begin{pmatrix} U_{l,r}^x \\ U_{l,r}^y \\ U_{l,r}^z \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{L}_a = \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} \nabla_a W_{ab} \otimes (\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a).$$

В разделе 2.6 вводится метод управления схемной вязкостью, позволяющий избавиться от избыточной схемной вязкости метода CSPH.

В **третьей главе** приводится описание реализации разработанных алгоритмов в рамках программного комплекса РурНИА. В разделе 3.4 приведены алгоритмы дробления и слияния SPH-частиц. На ряде тестовых задач показано, что разработанные алгоритмы позволяют достигать высокой точности результатов моделирования, значительно лучших, чем при использовании стандартного метода CSPH. Примеры расчётов тестовых задач показаны на рисунках 2-5.

В **четвертой главе** приведены результаты моделирования практических задач с помощью разработанных численных методов. С помощью осесимметричного метода ТКС-CSPH с применением алгоритмов дробления/слияния и сдвига SPH-частиц проводилось моделирование взрыва

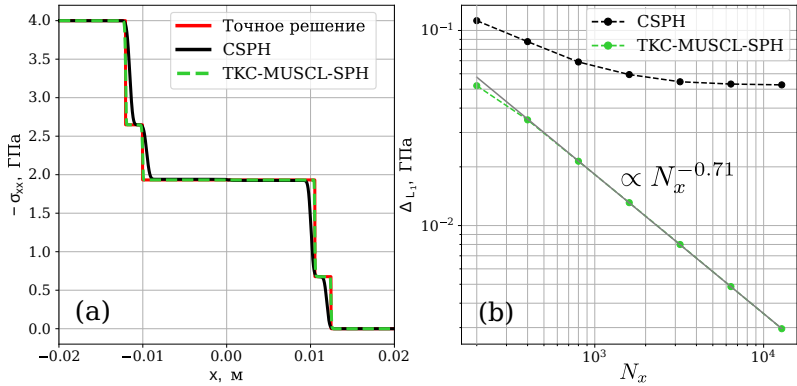


Рис. 2 — (a) Профили напряжения в задаче о распаде упругопластического разрыва в меди, полученные стандартным методом CSPH и предлагаемым методом ТКМ-MUSCL-SPH. (b) Зависимость ошибки в L_1 норме по напряжению σ_{xx} от числа частиц по оси x для стандартного метода CSPH и предложенного метода ТКМ-MUSCL-SPH.

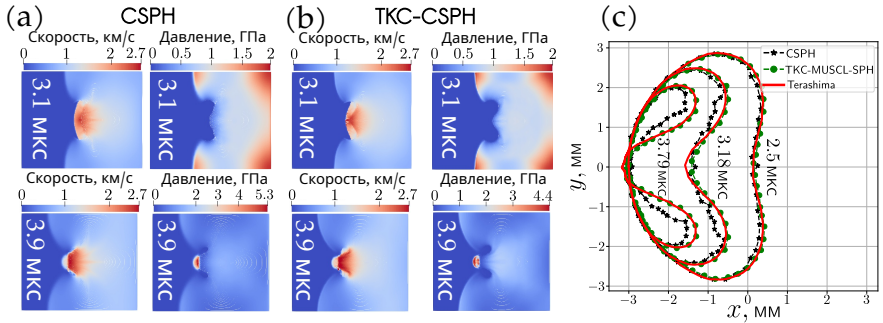


Рис. 3 — (a,b) Распределения скорости и давления в задаче о схлопывании воздушной полости в воде ударной волной. Сравнение результатов моделирования методами CSPH и ТКМ-MUSCL-SPH. (c) Форма границы воздушной полости в разные моменты времени. Сравнение результатов моделирования методами CSPH, ТКМ-MUSCL-SPH с референсными результатами (Terashima, 2009) (красная сплошная линия).

внутри защитного песчаного цилиндра. Было произведено моделирование четырёх экспериментов: два эксперимента по взрыву в воздухе и два эксперимента по взрыву внутри защитного песчаного цилиндра. Рассматривалось два типа защитных песчаных цилиндров. Графическое представление постановок задач показано на рисунке 6.

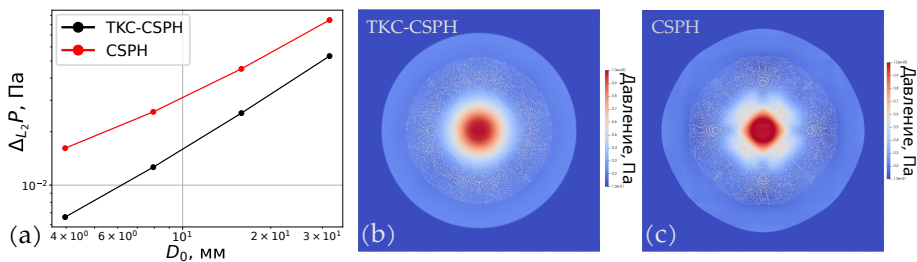


Рис. 4 — Цилиндрический тест Сода (в трёхмерной постановке). (a) Результаты по сходимости к референсному решению по давлению в норме L_2 . (b) Распределение давления в момент времени 0.25 с при использовании метода ТКК-ССПН. (c) Распределение давления в момент времени 0.25 с при использовании метода ССПН.

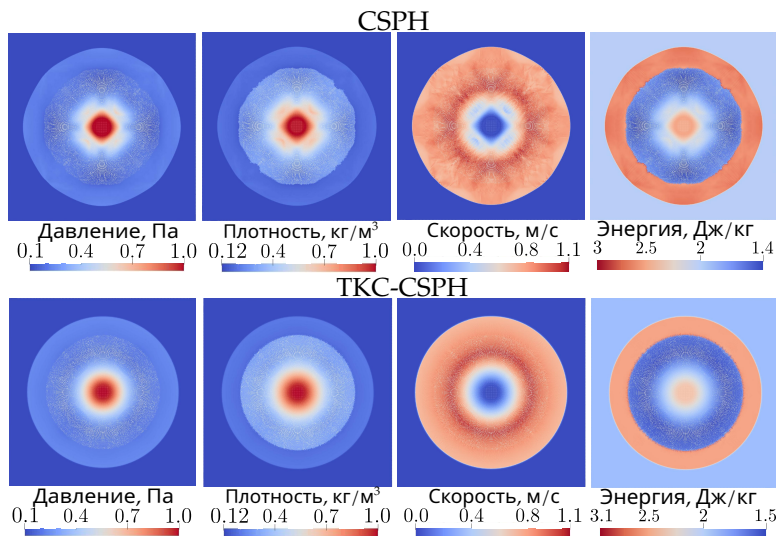


Рис. 5 — Сравнение полей физических величин при моделировании цилиндрического теста Сода (распад разрыва в идеальном газе) в трёхмерной постановке с использованием методов ССПН и ТКК-ССПН.

На рисунках 7 и 8 показаны результаты экспериментов по взрыву в воздухе и взрыву в песчаном цилиндре и результаты моделирования этих экспериментов осесимметричным методом гидродинамики сглаженных частиц ССПН с корректировкой градиента сглаживающего ядра (ТКК-ССПН). Показан максимальный прирост ΔP давления P в датчиках по отношению к атмосферному давлению P_{atm} , $\Delta P = P - P_{atm}$.

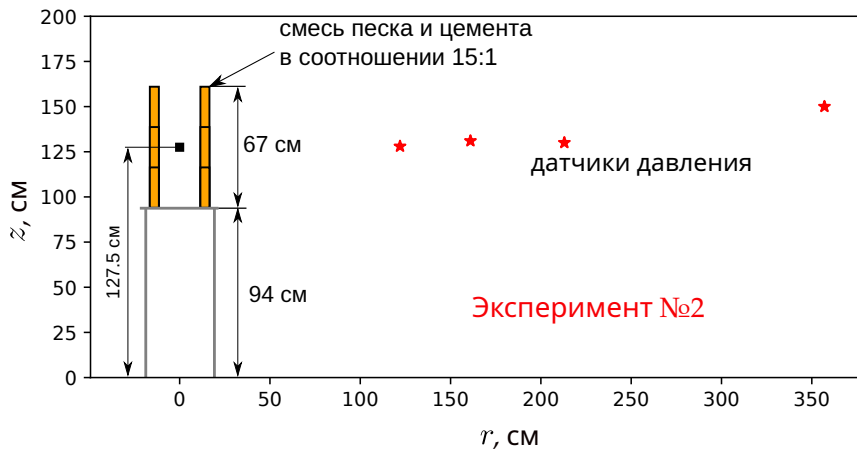
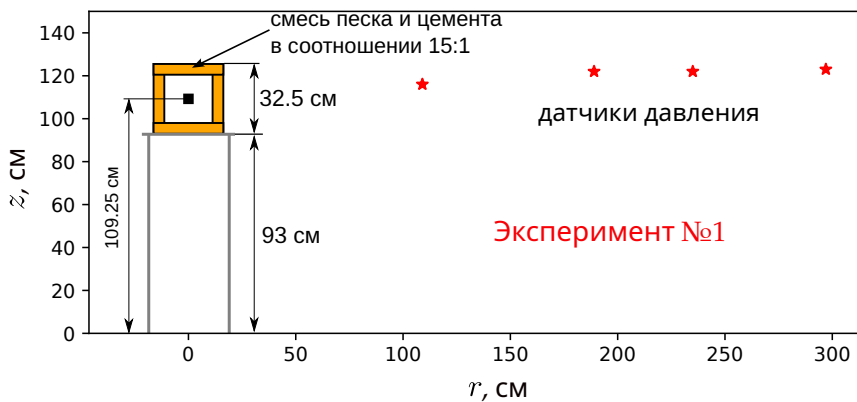


Рис. 6 — Постановки задач о взрыве внутри песчаного цилиндра.

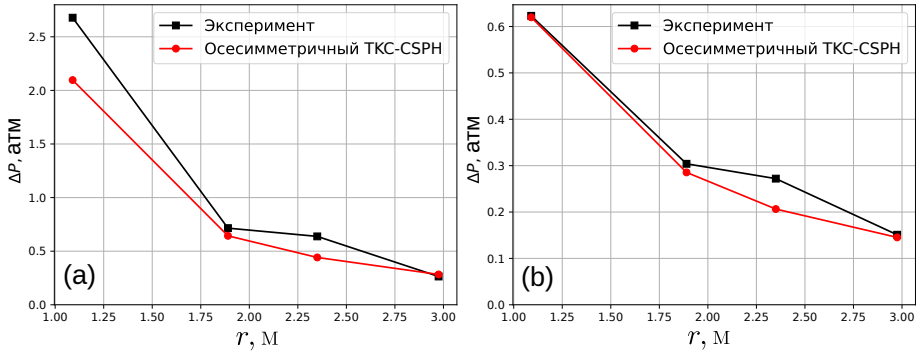


Рис. 7 — Результаты моделирования первого эксперимента. Максимальный прирост давления в датчиках по отношению к атмосферному давлению: (а) взрыв в воздухе, (б) взрыв в защитном песчаном цилиндре.

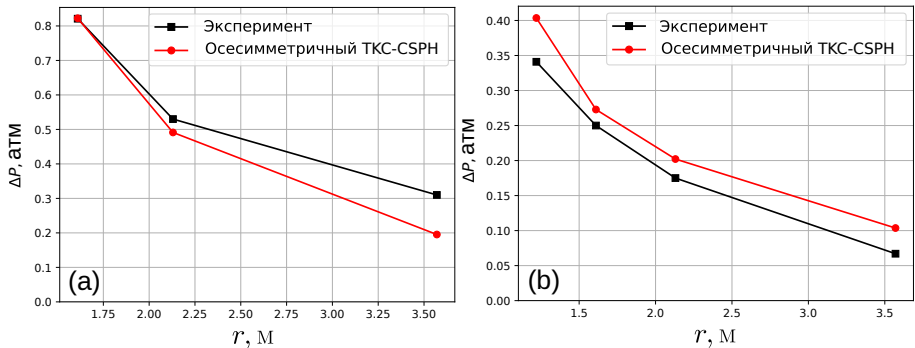


Рис. 8 — Результаты моделирования второго эксперимента. Максимальный прирост давления в датчиках по отношению к атмосферному давлению: (а) взрыв в воздухе, (б) взрыв в защитном песчаном цилиндре.

В **заклучении** приведены основные результаты работы, которые за-
ключаются в следующем:

1. В ходе анализа свойств схемы CSPH впервые установлено тео-
ретическим путём, что схемная вязкость при моделировании
сдвигового течения аналогична физической. Получена формула
для оценки коэффициента схемной динамической сдвиговой вяз-
кости метода CSPH.
2. Впервые предложена процедура корректировки градиента сглажи-
вающего ядра для семейства контактных методов CSPH, которая
улучшает аппроксимацию пространственных производных.
3. Впервые получено семейство осесимметричных схем метода CSPH,
отвечающих законам сохранения импульса и энергии.
4. Впервые предложен алгоритм учета внешнего давления и поверх-
ностного натяжения для семейства контактных методов CSPH с
корректировкой веса фиктивных частиц, в том числе в осесиммет-
ричной постановке.
5. Созданы программные модули в рамках комплекса PyPHIA для
моделирования вязких течений, поверхностных явлений, а также
задач механики упругопластических сред в условиях сильной де-
формации как в декартовой, так и в осесимметричной геометрии.

Публикации автора по теме диссертации

1. Parshikov A. N., Medin S. A., Rublev G. D., Dyachkov S. A. Numerical
viscosity control in Godunov-like smoothed particle hydrodynamics for
realistic flows modeling // *Physics of fluids*. — 2024. — Vol. 36, no. 1.
2. Rublev G. D., Parshikov A. N., Dyachkov S. A. Improving
approximation accuracy in Godunov type smoothed particle
hydrodynamics methods // *Applied Mathematics and Computation*.
— 2024. — Vol. 488.
3. Рублев Г. Д., Мурзов С. А. Моделирование прохождения удар-
ной волны через пористую медь с помощью метода подвижного
окна для сглаженных частиц с корректировкой градиента сгла-
живающего ядра // *Вопросы атомной науки и техники. Серия:
математическое моделирование физических процессов*. — 2025. —
№ 1. — С. 51–69.
4. Rublev G. D. Surface tension modeling using the axisymmetric contact
smoothed particle hydrodynamics method // *Journal of Applied and
Computational Mechanics*. — 2025. — Vol. 11, no. 1.

Рублев Георгий Дмитриевич

Численный метод CSPH с корректировкой градиента сглаживающего ядра и
его применение в механике деформируемых сред

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать 07.11.2025. Заказ № REQ-84237

Объем 1,0 печ.л. Тираж 100 экз.

Типография ФГУП «ВНИИА»

127030, Москва, Сушеская ул., д.22

Тел.: 8 (499) 978-78-03