

Федеральное государственное учреждение
«Федеральный исследовательский центр
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша
Российской академии наук»

На правах рукописи

Плаксин Глеб Максимович

**Метод численного бимформинга
в вычислительном эксперименте в аэроакустике**

Специальность 1.2.2 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
старший научный сотрудник
Козубская Татьяна Константиновна

Научный консультант:
доктор физико-математических наук,
доцент
Софронов Иван Львович

Москва – 2026

Оглавление

Введение	5
Глава 1. Модель распределенного акустического источника в задачах численного бимформинга	21
1.1 Прямая задача	21
1.1.1 Вычислительный эксперимент в аэроакустике	21
1.1.2 Линейные модели в прямой задаче	23
1.2 Обратная задача для распределенного источника	26
1.2.1 Обратная задача для распределенного источника монополярного типа	26
1.2.2 Обратная задача для распределенного источника дипольного типа	29
Глава 2. Методы решения задач численного бимформинга	32
2.1 Метод для источника монополярного типа	32
2.1.1 Построение дискретной модели	32
2.1.2 Выбор параметров дискретизации	35
2.2 Тестирование метода для источника монополярного типа на синтетических данных	39
2.2.1 Оценка параметров для бимформинга	39
2.2.2 Конфигурация тестовых задач	43
2.2.3 Тесты для линии источника при низкой частоте	44
2.2.4 Тесты с плоскостью источника при высокой частоте	47
2.3 Метод для источника дипольного типа	50
2.3.1 Задача для плотностей простого и двойного слоя	51
2.3.2 Задача для компонент дипольного момента	52
2.4 Тестирование метода для источника дипольного типа на синтетических данных	53
2.4.1 Общий случай	53
2.4.2 Задача для монополя и нормальной компоненты диполя	57
2.4.3 Задача для одной касательной и нормальной компонент диполя	59

Глава 3. Реализация метода численного бимформинга в программном комплексе NOISEtte	61
3.1 Общая структура модуля	61
3.2 Алгоритм решения задачи численного бимформинга	62
3.2.1 Этап подготовки к вычислениям	62
3.2.2 Основные вычисления	63
3.2.3 Вывод результатов	65
3.3 Итоговый алгоритм	66
3.4 Параллельная реализация	69
Глава 4. Численный бимформинг для задачи внешнего обтекания сегмента модельного прямого крыла самолета	72
4.1 Постановка задачи	72
4.1.1 Физический эксперимент	72
4.1.2 Традиционный бимформинг	73
4.1.3 Вычислительный эксперимент	74
4.1.4 Сопоставление результатов численного и физического экспериментов	75
4.2 Выбор конфигурации для бимформинга	76
4.2.1 Описание тестовых задач на устойчивость метода для конфигураций сегмента прямого крыла	78
4.2.2 Тесты на устойчивость для источника монопольного типа	79
4.2.3 Тесты на устойчивость для источника дипольного типа	80
4.2.4 Тесты на устойчивость для источника смешанного типа	82
4.3 Результаты численного бимформинга	85
4.3.1 Источник монопольного типа	86
4.3.2 Построение амплитудно-частотной характеристики акустического источника монопольного типа. Массовый бимформинг для диапазона частот	88
4.3.3 Источник дипольного типа с вертикальной и горизонтальной компонентами момента	90
4.3.4 Источник смешанного типа, сумма монополя и нормальной компоненты диполя	93
4.3.5 Анализ пространственного акустического поля для найденного источника дипольного типа	96

4.3.6	Влияние использования априорной информации на качество решения задачи	98
Глава 5. Идентификация распределенного акустического источника на крыле модели прототипа сверхзвукового пассажирского самолета		102
5.1	Вычислительный эксперимент по нестационарному турбулентному обтеканию крыла модельного сверхзвукового пассажирского самолета	102
5.2	Выбор конфигураций для бимформинга	104
5.3	Результаты численного бимформинга	107
5.3.1	Идентификация акустических источников на крыле СПС107	
5.3.2	Проверка корректности полученных результатов	111
Заключение		115
Список литературы		116
Публикации автора по теме диссертации		124

Введение

Актуальность темы исследования

Объем гражданских авиаперевозок неуклонно растет, и все больше людей становится вовлечено в процессы, связанные с гражданской авиацией, как непосредственно в роли пассажиров, персонала обслуживания аэродромов, специалистов промышленно-технического обеспечения, так и опосредованно через проживание на территориях, прилегающих к аэропортам. Поэтому все более остро стоит вопрос шумового загрязнения, создаваемого летательными аппаратами как внутри них, так и в приаэропортовых зонах, поскольку длительное воздействие подобного шума может негативно сказываться на качестве жизни их жителей. Авиационный шум становится все более значимым фактором, обуславливающим конструирование новых самолетов, и требуется разработка актуальных научно обоснованных методов оценки производимого шума и способов его снижения.

Международная организация гражданской авиации (ИКАО/ICAO) вводит новые, все более строгие нормы по шуму, создаваемому летательными аппаратами на местности. Современные воздушные суда должны проходить обязательную сертификацию по акустическим характеристикам. Для снижения финансовых и временных затрат на создание самолета необходимо иметь возможность анализировать потенциально создаваемый шум еще на этапе проектирования, а не опираться только на измерения постфактум. Более того, требуется разработка все более точных средств оценки акустических характеристик.

Одним из способов получения предварительных оценок аэродинамических и аэроакустических свойств является численное моделирование процессов обтекания воздушным потоком модели летательного аппарата или его конструктивных элементов, называемое CFD (Computational Fluid Dynamics) моделированием. CFD-моделирование задействует широкий спектр технологий, включая численные методы решения системы уравнений Навье-Стокса, модели турбулентности, построение дискретных сеток, параллель-

ные вычисления на суперкомпьютерах. Во многих случаях вычислительный CFD-эксперимент можно рассматривать как менее затратное дополнение к экспериментам натурным, подразумевающим продувку модели в аэродинамической трубе или испытания полноразмерного самолета. Одной из особенностей вычислительного эксперимента является возможность получать объемные массивы пространственно-временных данных об изучаемой задаче. Тем не менее, в настоящий момент существует не так много методов, позволяющих анализировать эти данные, в частности, извлекать из них информацию об акустических источниках.

Для идентификации акустических источников на основе данных физических экспериментов используется технология бимформинга. Эта технология хорошо развита и изучена, существует множество ее вариаций. Однако она не всегда может быть применима к данным эксперимента вычислительного. Естественные ограничения физического эксперимента в виде, например, малого числа записывающих шум микрофонов, существенным образом влияют на построение самого метода. В итоге натурный бимформинг не учитывает представленные вычислительным экспериментом особенности, заключающиеся в возможности записывать значения акустического поля в большом количестве точек пространства, расположенных в произвольных конфигурациях, а также перемещать микрофоны в потоке вместе с исследуемым телом. Поэтому для обработки данных, получаемых в ходе CFD-моделирования, требуется разработка нового подхода.

Задача по нахождению акустического источника может быть сформулирована в виде обратной задачи по нахождению правой части уравнений акустики. С этой точки зрения задача бимформинга обладает свойствами некорректности и высокой чувствительностью к погрешностям исходных данных. Таким задачам посвящено множество теоретических работ и численных исследований; в частности, задачи по нахождению правой части являются хорошо изученными. Однако значительная часть подходов теории обратных задач не получила практического применения в настоящее время, особенно в рамках анализа данных CFD-моделирования. Численный бимформинг обладает высоким потенциалом к решению практических задач.

Анализ данных CFD-эксперимента для идентификации акустических источников является продолжением идеи исследования акустических характе-

ристик летательных аппаратов на этапе проектирования. Численный бимформинг может выступать как в роли дополнения к бимформингу натурному, так и самостоятельного инструмента, позволяя получать предварительные оценки мощности и локализации акустических источников, формируемых при обтекании воздушного судна. Как и любой численный подход, численный бимформинг должен обладать свойствами устойчивости, вычислительной эффективности и физической интерпретируемости. Меньшая стоимость вычислительного эксперимента, по сравнению с физическим, дает потенциальную возможность анализировать доминирующие механизмы генерации шума за счет проведения расчетов для разных конфигураций летательного аппарата.

Сочетание нормативных требований, увеличения вычислительных возможностей и существующих методических подходов формируют актуальный круг задач, связанных со снижением авиационного шума. Ужесточение стандартов конструирования летательных аппаратов, развитие вычислительного эксперимента и ограниченность подходов к анализу его результатов создают потребность в разработке новой технологии, а именно численного бимформинга, то есть бимформинга, применяемого к данным вычислительного эксперимента. Тематика диссертационного исследования непосредственно связана с актуальными задачами авиационной науки и техники, направленными на снижение шумовой загрязненности, создаваемой летательными аппаратами, и, в целом, оптимизацию их акустических характеристик.

Степень разработанности темы исследования

Бимформинг, применяемый к данным физического эксперимента (натурный бимформинг) представляет собой хорошо изученную и развитую технологию, ему посвящено множество исследований и научных работ. Современные подходы натурального бимформинга позволяют оценивать акустические источники, возникающие, например, при летных испытаниях полноразмерного самолета, с высокой точностью. Тем не менее, работ, посвященных бимформингу в вычислительном эксперименте не так много, и при росте запроса на развитие такой технологии возникает необходимость в проведении дополнительных исследований.

Первые подходы бимформинга начали формулироваться в рамках задач радиолокации и гидроакустики и представляли из себя алгоритмы [1], позво-

ляющие оценить локализацию источника, но не его интенсивность. Рост вычислительных возможностей и развитие подходов к сбору и обработке данных впоследствии дали возможность разработать методы, в рамках которых стало возможно определять и интенсивность источника. Современный вид методов бимформинга начал формироваться на основе использования фазированных микрофонных решеток (phased arrays) [2; 3], предполагающих наведение на исследуемую в поисках источника область пространства не физическим поворотом антенны, как линзы, а заданием фазовых сдвигов. В частности, был разработан delay-and-sum бимформинг – подход, изначально приведенный для временной области, сочетающий в себе временное выравнивание сигналов, полученных на микрофонах, и их последующее суммирование. Его смысл заключается в следующем предположении. Если в исследуемой точке пространства действительно находится акустический источник, то сигналы на микрофонах от него сложатся, усиливая друг друга, в то время как некоррелированные компоненты (шум и другие источники) будут частично подавлены. В частотной области сдвиг по времени заменяется на фазовый множитель, то есть delay-and-sum бимформинг представляет собой простейшую реализацию фазированных решеток.

Свою чаще всего используемую на практике основу натурный бимформинг получил в виде технологии, называемой *традиционным бимформингом* (Conventional Beamforming – CB) [4]. Задача традиционного бимформинга формулируется в частотной области для представления распределенного источника в виде набора некоррелированных (следовательно, некогерентных) точечных монополюсных излучателей. В рамках CB в опоре на предположение о некоррелированности источников используется кросс-спектральная матрица (Cross-Spectral Matrix – CSM) сигналов на микрофонах. Впоследствии решается задача на поиск минимума функционала нормы невязки между CSM сигналов и модельной CSM для рассматриваемого точечного монополя. Данный подход позволяет получать устойчивую оценку мощности источников, однако он не учитывает их интерференцию, что может приводить к искажениям результата, в частности, размытию источников по пространству и появлению ложных максимумов. Тем не менее, предположение о некоррелированности вполне допустимо в физических экспериментах. Во-первых, в большинстве задач аэроакустики считается, что турбулентные источники

слабо коррелированы. Во-вторых, применение кросс-спектральной матрицы приводит к тому, что некоррелированные вклады на микрофонах в процессе усреднения не накапливаются при обработке и проявляются в виде фонового шума. Традиционный бимформинг представляет собой оптимальную базовую технологию для обработки данных физического эксперимента с учетом его естественных ограничений, в частности малого числа регистрирующих сигналы устройств.

Попытка устранить недостатки СВ была осуществлена при помощи деконволюционных техник, таких как CLEAN [5] и DAMAS [6]. Их целью является получение карт акустических источников с повышенным пространственным разрешением по сравнению с результатами традиционного бимформинга, который размывает точечные источники. Характер размытия точечного источника при его восстановлении бимформингом определяется свойствами микрофонной решетки и может быть представлен в виде функции рассеяния точки (Point Spread Function – PSF). Метод CLEAN заключается в итерационном вычитании из карт источника аппроксимируемых при помощи PSF вкладов точечных источников с наибольшей амплитудой при последующем сохранении вычитаемых источников в отдельной результирующей карте. Такой подход считается эвристическим и не представляет собой строго обоснованное решение обратной задачи. Более строгой в этом смысле техникой является DAMAS. В рамках DAMAS считается, что карта СВ – это сумма вкладов (PSF) от всех источников сразу, что приводит к решению системы линейных алгебраических уравнений. Такой подход имеет в своей основе более строгую математическую постановку, однако имеет высокую вычислительную стоимость. Более того, ни метод CLEAN, ни DAMAS в первоначальном варианте не учитывают возможную пространственную коррелированность источников, которая рассматривается в CLEAN-SC [7] и DAMAS-C [8]. CLEAN-SC отличается от оригинального метода тем, что вычитаются вклады не точечных источников, а целых когерентных структур при помощи анализа CSM. DAMAS-C, в свою очередь, является обобщением DAMAS и вместо вычисления скалярных мощностей каждого точечного источника осуществляет поиск матрицы источника, которая содержит еще и перекрестные члены, отражающие когерентность пар точечных излучателей. Усиленная строгость математических формулировок, в свою очередь, приводит к достаточно большой

вычислительной сложности.

Потребность в подходе с малой вычислительной стоимостью, способном работать с коррелированными источниками, привела к разработке *функционального бимформинга* (Functional Beamforming – FB) [9]. Функциональный бимформинг имеет в своей основе метод традиционного бимформинга, но при этом кросс-спектральная матрица возводится в степень большую, чем единица. Это приводит к нелинейному усилению вклада когерентных структур при уменьшении вторичных максимумов PSF, что позволяет получить карты источника с высоким разрешением. Тем не менее, FB позволяет получить только качественное распределение источника, но не количественное: физические мощности излучателей не восстанавливаются.

Отдельно стоящим методом натурального бимформинга является *обобщенный обратный бимформинг* (Generalized Inverse Beamforming – GIB) [10; 11]. Он отличается от методов семейства СВ отказом от предположения о некоррелированности источника при формулировании математической постановки, которая представляет собой решение обратной задачи восстановления правой части для уравнения Гельмгольца, моделируемой набором точечных монополей. Метод сводится к построению *матрицы переноса излучения*, которая определяет решение уравнения Гельмгольца в точках расположения микрофонов в случае точечных источников. В дополнение к этому метод предлагает итерационную технику улучшения разрешения карт источников за счет устранения на каждом шаге из рассматриваемой сетки тех из них, что имеют мощность меньше заданной величины. Алгоритм GIB учитывает возможную коррелированность излучателей, но при этом является неустойчивым и требует явной стабилизации, которая не позволяет априорно оценить ошибку решения.

Отдельно стоящим является вопрос разработки методов бимформинга для источников дипольного типа. Традиционный бимформинг, адаптированный к решению задачи для точечных диполей, рассматривается в работе [12]. Основная идея заключается в замене функции Грина для монопольных источников на функцию Грина для диполя. Однако для поиска решения по модифицированному алгоритму требуется априорное знание направления дипольных моментов, как и при использовании GIB, который также в большинстве случаев адаптируется к дипольным источникам. В работе [13]

приводится пример расчетов при помощи GIB для получения приближенной оценки направления вектора дипольного момента, но при условии наличия информации о плоскости, в которой данный вектор расположен. В работе [14] предложена модификация традиционного бимформинга, направленная на отказ от априорного задания направления дипольного момента и позволяющая оценивать его ориентацию в трехмерном пространстве. Подход основан на многократном применении бимформинга для заранее заданного набора возможных направлений дипольного момента с последующим выбором направления, обеспечивающего максимальное значение оцененной мощности источника.

Разработка и оптимизация микрофонных решеток необходима для изменения свойств PSF с целью уменьшения пространственного размытия точечных источников при восстановлении их различными подходами бимформинга. В рамках выбора геометрической конфигурации решёток в литературе предлагаются сложные схемы расположения микрофонов [15]. Кроме того, исследуются и способы настройки решеток для улучшения качества визуализации восстановленных источников, некоторые из которых рассматриваются, например, в статье [16].

Разработанные методы натурального бимформинга широко применяются для обработки данных физических экспериментов. В работе [17] приведён пример использования традиционного бимформинга и метода DAMAS для анализа результатов эксперимента по продувке модели прямого крыла 30P30N с выпущенной механизацией в аэродинамической трубе. Для данных натурального эксперимента по проведению летного испытания полноразмерного пассажирского самолета бимформинг применяется, например, в [18; 19].

При сильной развитости методов натурального бимформинга, бимформингу в вычислительном эксперименте посвящено не так много работ. В работе [20] предлагается методология вычислительного акустического бимформинга (Computational Acoustic Beamforming – CAB). Она заключается в проведении CFD-моделирования, вычисления акустического давления на микрофонах при помощи использования акустических аналогий и последующего применения бимформинга к этим данным. В статье рассматривается применение delay-and-sum бимформинга во временной области. Микрофонные решетки имеют конфигурации, характерные для натурального бимформинга. Техноло-

гия валидируется на эксперименте по обтеканию профиля NASA 0012, при этом демонстрируется согласованность полученных результатов с экспериментальными данными. Впоследствии САВ применяется для идентификации источников, формирующихся при обтекании ветроэнергетической установки. В работе [21] приводится пример применения бимформинга к данным вычислительного эксперимента по обтеканию цилиндра для его различных пространственных ориентаций. Используется традиционный бимформинг и свойственные для него решетки виртуальных микрофонов. И мощности, и пространственные локализации восстановленных источников хорошо согласуются с данными других исследований.

В строгом математическом смысле задача бимформинга представляет собой обратную задачу по восстановлению правой части для уравнения Гельмгольца. Исследования подобных обратных задач для уравнений математической физики в совокупности представляют собой хорошо изученное направление. Фундаментальные представления о некорректности таких задач (неустойчивость решения к малым возмущениям данных, неединственность решения) приводятся в работе [22]. Там же рассматривается понятие регуляризации Тихонова и некоторые принципы решения таких задач при наличии неточных данных. Отдельные элементы общей теории регуляризации для случая как линейных, так и нелинейных моделей, в частности, использование итерационных методов и исследование вопросов сходимости, рассматриваются в работе [23].

Обратная задача по нахождению правой части для уравнения Гельмгольца рассматривается как существенно некорректная: при восстановлении источника по измеренному полю вне области источника может присутствовать сильная неустойчивость и неединственность решения. Поэтому на практике справиться с этими трудностями могут помочь априорные ограничения на носитель и класс функции источника, либо регуляризация. Такие подходы для решения обратных задач для гармонических волн и акустического рассеяния рассматриваются в [24], где подчеркиваются теоретические ограничения таких процедур и их роль в вычислениях. В частности, в работе [25] рассматривается пример использования априорной информации об ограниченности решения и его первой производной при численном решении обратных коэффициентных задач для гиперболических уравнений. Наличие априорной

информации может оказаться важным и при решении уравнений параболического типа, например уравнения типа реакции-диффузии-адвекции [26].

В прикладной части теории обратных задач накоплено большое количество работ по регуляризирующим алгоритмам для восстановления источника для уравнения Гельмгольца. В частности, может быть использована естественная регуляризация, не требующая задания параметра в явном виде, например, при помощи продолжения по волновому числу [23; 24; 27]. В этом случае задача многократно решается для разных волновых чисел, начиная от меньшего, когда решение более устойчиво, и заканчивая более высоким. Решение, получаемое на предыдущем шаге для меньшего волнового числа становится начальным приближением итерационного метода для следующего. Это обеспечивает восстановление грубой структуры источника за счет решения задачи для низких частот и улучшенное разрешение – для высоких частот. В целом, обратные задачи по восстановлению источника для уравнения Гельмгольца остаются некорректными, и качество получаемых решений сильно зависит от выбора априорных ограничений, состава измерений и способа обработки входных данных, а также подхода к регуляризации [28].

Теория обратных задач часто применяется в различных практических областях. Например, классическим классом обратных задач является задача томографии [29]. В работах [30; 31] в постановке обратных задач рассматривается проблема контроля процессов напыления оптических покрытий. В основе активно развивающегося машинного обучения и нейросетевого подхода также лежит теория обратных задач. В частности, глубокое обучение может применяться для решения задач обработки изображений [32] и задач гравитационной и магнитной разведки [33]. Статья [34], опубликованная в 2020 году в разгар пандемии COVID-19, отражает высокую актуальность применения методов обратных задач для оперативной идентификации параметров исследуемых процессов по реальным данным.

Цель работы

Целью настоящей работы является разработка, верификация и валидация метода численного бимформинга для анализа данных, полученных в ходе вычислительного эксперимента.

Задачи работы

С целью достижения цели настоящей работы выделяются и решаются следующие задачи:

1. Разработать математическую модель распределенного акустического источника, формирующегося при численном моделировании турбулентного обтекания различных тел. Сформулировать математическую задачу по идентификации источника.
2. Разработать численный метод решения поставленной задачи, верифицировать его.
3. Реализовать метод в составе программного комплекса NOISEtte [35].
4. Провести расчеты для промышленно-ориентированной тестовой задачи, проверить корректность получаемых результатов, сопоставить результаты с результатами натурного бимформинга.
5. С использованием разработанного подхода решить задачу идентификации акустического источника, возникающего при турбулентном обтекании крыла модели прототипа сверхзвукового пассажирского самолета.

Методы исследования

Для построения модели акустического источника, формируемого в задачах обтекания при проведении вычислительного эксперимента, использовалась теория обратных задач по восстановлению правой части для уравнения Гельмгольца в подвижной среде [22], [36]. В основе численного метода лежит применение конечно-элементного представления [37] функции источника для аппроксимации оператора переноса излучения. При этом аппроксимация оператора переноса излучения сводится к вычислению интегральных сверток при помощи квадратурных/кубатурных формул Гаусса. Используется метод наименьших квадратов [38], а также численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений [39], в частности метод сопряженных градиентов [40]. Алгоритм реализован в составе программного комплекса NOISEtte [35] на языке C++ с использованием технологий параллельных

вычислений MPI, OpenMP для проведения расчетов на центральном процессоре, OpenCL – на графическом. Проверка метода на работоспособность производится путем сравнения приближенного решения с точным на тестовых примерах, а также путем сравнения с результатами натурного бимформинга. Проверка обоснованности получаемых результатов для практической задачи реализуется за счет анализа ближнего поля, получаемого в ходе проведения CFD-расчета, сравнения с теоретическими предположениями и практическими исследованиями о расположении источника для подобного типа крыльев, сравнения результатов для прямого и обратного методов.

Научная новизна

Научная новизна представленной работы состоит в следующем:

1. Впервые разработана специфическая математическая модель распределенного источника, формирующегося в процессе обтекания воздушным потоком летательного аппарата или его конструктивных элементов в рамках вычислительного эксперимента.
2. Разработан новый комплексный способ дискретизации поставленной задачи, включающий в себя численный метод и ограничения на геометрические параметры рассматриваемой конфигурации бимформинга, позволяющие получать устойчивые решения без использования явной регуляризации.
3. Впервые получены результаты идентификации акустического источника на крыле модели прототипа сверхзвукового пассажирского самолета на режиме посадки по результатам вихреразрешающего суперкомпьютерного моделирования.

Достоверность результатов

Корректность дискретной постановки задачи и численного метода ее решения проверяется на тестовых примерах с синтетическими данными как для модельных геометрических конфигураций, так и для применяемой для расчетов конфигурации из задачи по идентификации акустического источника

на сегменте прямого крыла 30P30N с выпущенной механизацией. Сравнение приближенных решений с модельными демонстрируют устойчивость и единственность решения, а также высокую точность. Адекватность математической модели в совокупности с ее дискретизацией подтверждается путем сравнения получаемого решения с экспериментальными данными, полученными для той же задачи обтекания сегмента прямого крыла 30P30N с выпущенной механизацией на режиме посадки. Согласованность результатов для задачи по идентификации источника на крыле модели прототипа сверхзвукового пассажирского самолета показывается за счет сравнения решения обратной задачи с прямыми методами, а также анализа ближнего поля течения. Локализация полученного источника хорошо согласуется с теоретическими предположениями и практическими исследованиями механизмов генерации шума крыльями подобного типа.

Вычислительные эксперименты, результаты которых используются для проведения численного бимформинга, также прошли проверку на достоверность результатов [41; 42] по итогам анализа полей течения, шума в дальнем поле и сравнения с экспериментальными данными.

Практическая значимость работы

Разработанный подход может применяться для идентификации акустических источников, возникающих при обтекании летательных аппаратов, на основе данных вычислительного эксперимента. Это, в свою очередь, означает возможность их предварительной оценки на этапе проектирования ЛА, что может сократить расходы на его разработку и производство. Потенциальная возможность оптимизации акустических характеристик может достигаться за счет проведения серии CFD-расчетов и применения подхода численного бимформинга для различных конфигураций конструктивных элементов самолета. По результатам таких серий расчетов могут возникнуть предпосылки к выбору тех конфигураций, которые обеспечивают минимальный шум на местности, создаваемый летательным аппаратом.

Полученные численные оценки локализации и интенсивности акустических источников, возникающих на крыле модели прототипа сверхзвукового самолета, могут оказаться практически полезны при проектировке реального прототипа СПС. Результаты локализации акустических источников вдоль зад-

ней кромки крыла для разных полос частот могут повлиять на последующую оптимизацию акустических характеристик данного крыла для соответствия самолета сертификационным нормам.

Положения, выносимые на защиту

1. Разработана специфическая математическая модель распределенного акустического источника, допускающая наличие корреляции, в отличие от традиционных моделей, используемых в задачах натурального бимформинга.
2. Сформулированы дискретные постановки задачи численного бимформинга, обладающие свойствами единственности и устойчивости решения. Предложен численный метод решения задачи бимформинга, применяемого к данным вычислительного эксперимента, который в совокупности с ограничениями на параметры дискретизации не требует использования явной регуляризации для получения устойчивого решения.
3. Разработана параллельная программная реализация метода численного бимформинга в составе программного комплекса NOISEtte.
4. Представлены результаты сравнения решения, полученного методом численного бимформинга, с экспериментальными данными для задачи идентификации акустического источника, формирующегося при обтекании прямого крыла 30P30N с выпущенной механизацией на режиме посадки, а также с данными, получаемыми при анализе полей течения для той же задачи. Показано, что полученные результаты хорошо согласуются как с экспериментальными наблюдениями, так и с результатами анализа структур численно воспроизведенного турбулентного течения.
5. Представлены результаты решения задачи идентификации акустического источника, формирующегося при обтекании крыла сверхзвукового самолета, на основе данных вихреразрешающего суперкомпьютерного CFD-расчета. Полученные результаты хорошо согласуются с существующими представлениями о локализации акустического источника в области задней кромки крыла.

Апробация результатов

Основные результаты, касающиеся как теории обратных задач, так и прикладной аэроакустики были изложены на следующих российских и международных конференциях:

1. Всероссийский аэроакустический форум (2021, г. Геленджик)
2. Круглый Стол НЦМУ «Сверхзвук» на VI Всероссийском молодежном научном форуме «Наука будущего – наука молодых и V Международной научной конференции «Наука будущего» (2021, виртуальная конференция)
3. IX российская конференция «Вычислительный эксперимент в аэроакустике и аэродинамике» (2022, г. Светлогорск)
4. XX научно-техническая конференция по аэроакустике (2023, г. Суздаль)
5. Конференция «Современные проблемы обратных задач», посвященная 85-летию академика РАН В.Г. Романова (2023, г. Новосибирск, Академгородок)
6. X российская конференция «Вычислительный эксперимент в аэроакустике и аэродинамике» (2024, г. Светлогорск)
7. «Обратные некорректные задачи и машинное обучение» (2024, г. Сочи, Сириус)
8. XXI научно-техническая конференция по аэроакустике (2023, г. Суздаль)
9. XVII международная молодежная научная школа-конференция "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач посвященная 80-летию со дня рождения профессора А.Г. Яголы, 29 сентября – 1 октября 2025 года, Новосибирск, Академгородок
10. IV международная научная конференция "Современные проблемы обратных задач посвященная 100-летию со дня рождения академика Г.И. Марчука, 2 – 4 октября 2025 года, Новосибирск, Академгородок

Публикации

Результаты исследований, представленные в диссертации, опубликованы в шести научных статьях, перечень которых приведён в конце работы. Из них 4 статьи входят в перечень изданий, рекомендованных ВАК, 4 индексируются в базе Web of Science (WoS) и 5 — в базе Scopus.

На программный модуль численного бимформинга NumBeamForm в составе комплекса NOISEtte при совместной работе с другими соавторами получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2020665710 (30.11.2020). Авторы: Плаксин Г.М., Софронов И.Л., Козубская Т.К.

Личный вклад автора

Автор самостоятельно провел анализ литературы и существующих подходов, совместно с научным руководителем сформулировал цель и задачи исследования. В ходе научных обсуждений с руководителем и консультантом разработал математическую модель и численный метод решения задачи. Реализация разработанного численного метода в виде программного модуля, проведение верификационных и валидационных экспериментов, решение прикладной промышленной задачи и анализ полученных результатов выполнены автором лично.

Благодарности

Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю д.ф.-м.н. Татьяне Константиновне Козубской за постановку задачи, задание направления в работе, ценные консультации и внимание к рабочему процессу. Автор также выражает искреннюю благодарность научному консультанту д.ф.-м.н. Ивану Львовичу Софронову за плодотворные обсуждения возникающих проблем, впоследствии сыгравшие роль в их решении. Автор благодарит к.ф.-м.н. Павла Алексеевича Бахвалова и д.ф.-м.н. Михаила Дмитриевича Сурначева за ключевые замечания и предложения по улучшению подхода, к.ф.-м.н. Павла Вадимовича Родионова и к.ф.-м.н. Алексея Петровича Дубеня за предоставленные результаты суперкомпьютерных расчетов, помощь в их обработке, ценные замечания и обсуждения.

Объем и структура диссертации

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы и списка публикаций автора по теме диссертации. Полный объем диссертации составляет 125 страниц, включая 66 рисунков, 4 таблицы. Список литературы содержит 63 наименования.

Поддержка работы

Диссертационная работа выполнена при поддержке Программы создания и развития научного центра мирового уровня «Сверхзвук» на 2020-2025 годы при финансовой поддержке Минобрнауки России (Соглашение от 25.04.2022 № 075-15-2022-330). Ресурсоемкие вычисления проводились с помощью гибридного суперкомпьютера К60, установленного в Суперкомпьютерном Центре коллективного пользования ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.

Глава 1. Модель распределенного акустического источника в задачах численного бимформинга

1.1 Прямая задача

1.1.1 Вычислительный эксперимент в аэроакустике

В данной работе рассматривается метод численного бимформинга для идентификации акустических источников на основе данных вычислительного эксперимента. Под вычислительным экспериментом здесь и далее подразумевается численное моделирование (Computational Fluid Dynamics, CFD) турбулентного обтекания воздушным потоком различных тел, которые могут представлять из себя летательные аппараты или их конструктивные элементы, с последующим получением акустических полей.

В основе CFD-моделирования лежит численное решение системы уравнений Навье-Стокса. Для сжимаемой среды они имеют вид:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{Q}) = \nabla \cdot \mathbf{F}^v(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q}), \quad (1.1)$$

где

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{u} \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho \mathbf{u} \\ \rho \mathbf{u} \mathbf{u} + p \mathbf{I} \\ (E + p) \mathbf{u} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}^v = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma \\ \sigma \cdot \mathbf{u} - \mathbf{q} \end{pmatrix},$$

ρ – плотность, \mathbf{u} – вектор скорости, p – давление, $E = \rho \varepsilon + \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} / 2$ – полная энергия, ε – удельная внутренняя энергия, \mathbf{I} – единичная матрица, σ – тензор вязких напряжений, $\mathbf{q} = -k \nabla T$ – вектор теплового потока, T – температура, k – коэффициент теплопроводности.

При моделировании дозвукового внешнего обтекания тел воздушным по-

током часто используют уравнения состояния совершенного газа:

$$p = \rho R_{\text{sp}} T, \quad \varepsilon = R_{\text{sp}} T / (\gamma - 1),$$

где для воздуха показатель адиабаты $\gamma = 1.4$, и газовая постоянная $R_{\text{sp}} = 287.05$ Дж/(кг · К).

Численное решение уравнений Навье-Стокса – это отдельная область науки с большим количеством исследуемых явлений и разработанных подходов. В их число входит построение дискретных схем и расчетных сеток, использование моделей турбулентности, реализация программных алгоритмов, проведение расчетов, а также интерпретация результатов.

В рамках прикладных задач вычислительной аэроакустики часто требуется осуществить измерение акустического давления в контрольных точках пространства вокруг обтекаемого тела, рис. 1.1. Для этого требуется произвести численное решение уравнений Навье-Стокса в некоторой области с последующим сохранением значений искомым функций. Значения акустических полей в контрольных точках могут быть получены непосредственно из решения уравнений Навье-Стокса, однако такой подход связан с существенными вычислительными ресурсами. В связи с этим на практике часто применяются линейные модели (см. параграф 1.1.2), которые позволяют вычислять пульсации давления в дальнем поле на основе относительно небольшого объема данных, получаемых в процессе CFD-моделирования. Тем не менее, вне зависимости от выбранного способа проведения вычислений целью вычислительного эксперимента в аэроакустике является получение акустического поля.

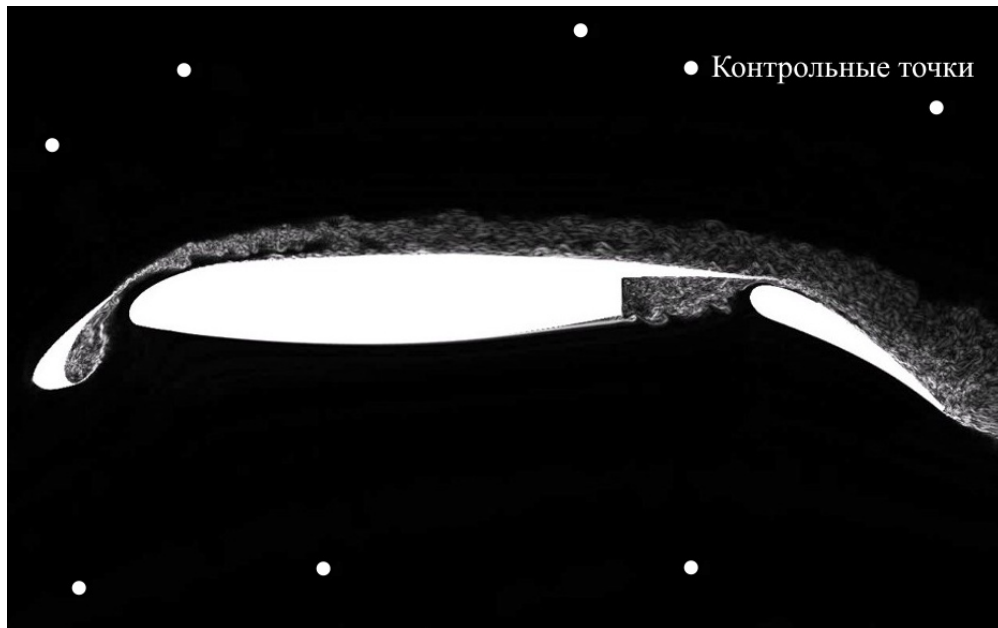


Рисунок 1.1. Иллюстрация вычислительного эксперимента в аэроакустике

Таким образом, под **прямой задачей** далее будет подразумеваться вычисление акустического поля в выбранных точках пространства \mathbb{R}^3 , не принадлежащих области нелинейного течения, путем численного решения уравнений Навье-Стокса (при возможном использовании линейных моделей) при моделировании турбулентного обтекания некоторого тела.

Решение прямой задачи позволяет получать большие массивы результирующих данных. Их можно использовать, например, для произведения необходимой для сертификации оценки шума, создаваемого летательным аппаратом на местности, и для построения диаграмм направленности излучения. Однако наличие большого набора данных подразумевает и наличие потенциально большого числа путей их анализа для получения исчерпывающей информации об исследуемом объекте.

1.1.2 Линейные модели в прямой задаче

Уравнения Навье-Стокса при их численном решении позволяют получить акустическое поле в любой области расчетной сетки. Однако в случае задачи по нахождению акустического поля на сильном удалении от обтекаемого объекта, в дальнем поле, такой подход может оказаться неудобным. Во-первых, возможен случай, когда сетка не покрывает область интереса с контрольными точками. Во-вторых, как правило, при удалении от обтекаемого объекта сетка становится более грубой, что означает быстрое затухание, в силу на-

личия диссипации, высокочастотных гармоник. В-третьих, на практике часто возникает необходимость пересчитать значения акустического поля в других контрольных точках. Хранить соответствующий массив данных или перезапускать расчет было бы очень трудоемко. Линейные модели акустического приближения описывают распространение звука линейными уравнениями, моделирующими акустические процессы на удалении от обтекаемого объекта с высокой точностью и с относительно малыми вычислительными затратами.

В основе акустических приближений в решении задач газовой динамики лежит рассмотрение волнового уравнения, описывающего распространение звука в сплошной среде. В частности, оно выводится в рамках линейного приближения уравнений Эйлера в адиабатическом течении [43] при разложении по малому параметру:

$$p = p_0 + p',$$

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c^2 \Delta p' = 0,$$

где p – давление, p_0 – постоянное равновесное давление, p' – малое изменение давления, $c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}$ – скорость звука, ρ – плотность, s – энтропия.

При рассмотрении уравнений Навье-Стокса для сжимаемой среды (1.1) для описания акустических возмущений, создаваемых турбулентным полем в свободном пространстве без твердых границ, часто используется акустическая аналогия Лайтхилла [44], [45], сохраняющая, в отличие от акустического приближения уравнений Эйлера, нелинейные члены исходного уравнения:

$$\rho = \rho_0 + \rho',$$

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c^2 \Delta \rho' = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j},$$

где ρ_0 – постоянная равновесная плотность, ρ' – малое изменение плотности, T_{ij} – тензор Лайтхилла, $T_{ij} = \rho u_i u_j + \delta_{ij}(p' - c^2 \rho') - \sigma_{ij}$, u_i – компонента вектора скорости в направлении x_i прямоугольной системы координат $Ox_1x_2x_3$, σ – как и ранее, тензор вязких напряжений. В данном случае, как и в случае акустического приближения уравнений Эйлера, изначально нелинейная задача вне турбулентного поля так же заменяется линейным уравнением, но в

аналогии Лайтхилла вся исходная нелинейность содержится в тензоре T_{ij} , который определяет квадрупольный источник, характеризующий акустическое излучение турбулентности.

Наличие твердых границ учитывает уже акустическая аналогия Фокса Уильямса-Хокинга [46]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = & \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (T_{ij} H(f)) - \\ & - \frac{\partial}{\partial x_i} ([\sigma_{ij} n_j + \rho u_i (u_n - v_n)] \delta(f)) + \\ & + \frac{\partial}{\partial t} ([\rho_0 v_n + \rho (u_n - v_n)] \delta(f)). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь $H(f)$ – функция Хевисайда граничной поверхности, задаваемой уравнением $f = 0$, $\delta(f)$ – дельта-функция Дирака граничной поверхности, u_n – нормальная к граничной поверхности компонента вектора скорости, v_i – компонента вектора скорости граничной поверхности в направлении x_i , v_n – нормальная компонента вектора скорости граничной поверхности, n_i – компонента внешней нормали к граничной поверхности в направлении x_i . Здесь помимо квадрупольного источника возникают поверхностные монополюсный и дипольный источники.

Прикладное значение акустической аналогии FWH заключается в том, что при численном решении уравнений Навье-Стокса в некоторой области $B \subset \mathbb{R}^3$ (рис. 1.2), содержащей область нелинейного течения, с границей Γ и накоплении набора данных об акустическом поле в наборе точек, покрывающих поверхность Γ , становится возможным вычислять пульсации давления в любой точке внешней области A путем применения интегральных формул, выражающих решение уравнения (1.2).

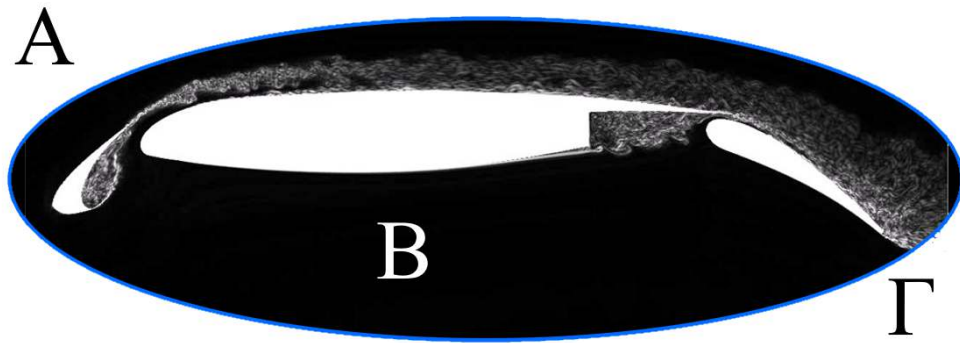


Рисунок 1.2. Схема использования акустической аналогии Фокса Уильямса-Хокинга

1.2 Обратная задача для распределенного источника

1.2.1 Обратная задача для распределенного источника монопольного типа

В соответствии с формулировкой прямой задачи, заключающейся в вычислении акустического давления в точках дальнего (и среднего) поля, а также в связи с наличием большого объема результирующих данных, возникает возможность использовать эти данные для выявления акустических свойств обтекаемого объекта, в частности, идентификации возникающих акустических источников. Такая задача называется задачей **бимформинга**.

Описанные ранее в параграфе 1.1.2 подходы подразумевают сведение нелинейной системы уравнений к волновому уравнению с некоторой правой частью для описания распространения акустических возмущений. Однако данный подход обычно практикуется для области, не включающей в себя зону нелинейного течения. В основе традиционного бимформинга (conventional beamforming, СВ) [4] лежит приближение описания акустического процесса волновым уравнением (для движущейся со скоростью $\mathbf{U} = \text{const}$ среды) во всем пространстве, включая нелинейную область:

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \right)^2 p'(\mathbf{x}, t) - \Delta p'(\mathbf{x}, t) = \sum_j q_j(t) \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_j), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (1.3)$$

Уравнение (1.3) приведено для случая, когда в качестве источника выступа-

ет набор точечных монопольных излучателей с неизвестными амплитудами $q_j(t)$, расположенных в точках ξ_j . При этом уравнение (1.3) рассматривается в свободном пространстве, обтекаемое тело отсутствует. Пусть накоплен ансамбль K реализаций $p'_k(t)$, удовлетворяющих волновому уравнению (1.3) с точечными источниками с амплитудами $q_j^k(t)$ в правой части, $k = 1, \dots, K$. При переходе в частотную область при установившихся гармонических колебаниях $p'_k(\mathbf{x}, t) = P_k(\mathbf{x})e^{i\omega t}$, $q_j^k(t) = a_j^k e^{i\omega t}$ для фиксированной частоты ω можно получить уравнение Гельмгольца для движущейся среды:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c^2} (i\omega + \mathbf{U} \cdot \nabla)^2 P_k(\mathbf{x}) + \Delta P_k(\mathbf{x}) = \\ = - \sum_j a_j^k \delta(\mathbf{x} - \xi_j), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, k = 1, \dots, K. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Традиционный бимформинг подразумевает предположение о *некоррелированности* (следовательно, некогерентности) точечных излучателей. Это формализуется в виде:

$$\overline{a_i a_j^*} = \begin{cases} |a_i|^2, & i = j; \\ 0, & i \neq j; \end{cases}$$

где горизонтальная черта сверху означает усреднение по ансамблю:

$\overline{a_i a_j^*} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K a_i^k (a_j^k)^*$. Таким образом, задача традиционного бимформинга формулируется в виде задачи по нахождению мощностей $A_i = \frac{1}{2} \overline{|a_i|^2}$ точечных источников, определяемых в правой части уравнения (1.4). При этом предполагается, что источники являются некоррелированными, и мощность каждого источника оценивается независимо, в предположении отсутствия вкладов остальных источников. Важно отметить, что традиционный бимформинг не предполагает строгого решения обратной задачи.

Приведенное предположение является достаточно сильным. С одной стороны, благодаря ему метод традиционного бимформинга позволяет обрабатывать данные с достаточно малого числа микрофонов, удовлетворяя, тем самым, ограничениям физического эксперимента. При этом он остается устойчивым по отношению к ошибкам в измерениях. Недостатком же такого предположения является отсутствие учета интерференции акустических источ-

ников, что может сказываться на точности получаемых результатов. Это не единственный возможный подход. Например, в работах [10], [11] в рамках той же модели источника, представимого в виде набора точечных излучателей, рассматривается более общий случай коррелированных источников. Однако метод неустойчив и требует регуляризации, что, в свою очередь, также сказывается на точности при получении решения.

Вычислительный эксперимент предоставляет возможность записывать данные об акустическом поле в достаточно большом числе точек (то есть размещать достаточно большое число виртуальных микрофонов), что потенциально должно повышать устойчивость разрабатываемого подхода. Это, в свою очередь, позволяет рассматривать более общий случай и отказаться от предположения о некоррелированности источников. Также можно выбрать и другое представление источника: вместо дискретного набора точечных излучателей рассмотреть распределенный источник с непрерывной функцией интенсивности, локализованный на некоторой поверхности в трехмерном пространстве. Выбор именно поверхности в качестве носителя источника обусловлен стремлением к соответствию с натурным бимформингом, в рамках которого источники часто представляются на плоскости [19], [17], [18]. При этом обтекаемое тело, как и в случае традиционного бимформинга, отсутствует, задача формулируется для свободного пространства.

Пусть S – некоторая поверхность в трехмерном пространстве, на которой отыскивается акустический источник. Пусть δ_S – дельта-функция, определяющая поверхность S . Обозначим непрерывную комплекснозначную функцию интенсивности искомого источника как $Q(\mathbf{x})$. Тогда под задачей **численного бимформинга для источника монопольного типа** будем понимать обратную задачу по нахождению плотности Q простого слоя в правой части уравнения Гельмгольца для движущейся среды в свободном пространстве по известному в некоторой области D акустическому полю P , удовлетворяющих уравнению:

$$-\frac{1}{c^2} (i\omega + \mathbf{U} \cdot \nabla)^2 P(\mathbf{x}) + \Delta P(\mathbf{x}) = -Q(\mathbf{x})\delta_S, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (1.5)$$

Поверхность S является фиксированной, а ее выбор может быть обусловлен наличием априорной информации об акустическом источнике, полученной из физически обусловленных представлений о течении или из результатов

анализа численных данных, полученных в ходе CFD-моделирования, и может быть уточнена в соответствии с промежуточными результатами численного бимформинга.

1.2.2 Обратная задача для распределенного источника дипольного типа

Распространение звука в покоящейся среде в свободном пространстве с распределенным дипольным источником, порождаемым дифференцируемым в \mathbb{R}^3 векторным полем силы \mathbf{F} , соответствующей дипольному моменту, описывается уравнением [36]:

$$k^2 P(\mathbf{x}) + \Delta P(\mathbf{x}) = -\operatorname{div}(\mathbf{F}(\mathbf{x})), \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (1.6)$$

Из уравнения (1.6) следует неединственность решения обратной задачи по определению векторного поля \mathbf{F} , поскольку оператор $\operatorname{div} \operatorname{rot} \equiv 0$. Последнее означает, что источники, определяемые силами \mathbf{F} и $\mathbf{F} + \operatorname{rot} \mathbf{A}$, где \mathbf{A} – произвольное векторное поле, задают одинаковое акустическое поле P .

При переходе к задаче отыскания дипольного момента \mathbf{F} на поверхности S в движущейся среде неединственность решения сохраняется. В данном случае уравнение имеет вид:

$$-\frac{1}{c^2} (i\omega + \mathbf{U} \cdot \nabla)^2 P(\mathbf{x}) + \Delta P(\mathbf{x}) = -\operatorname{div}(\mathbf{F}(\mathbf{x})\delta_S), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (1.7)$$

Введем прямоугольную систему координат $Ox_1x_2x_3$. Далее без ограничения общности рассмотрим случай, когда поверхность S лежит в плоскости Ox_1x_2 . Пусть $\mathbf{F} = \{F_1, F_2, F_3\}$. Тогда

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}\delta_S) = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \right) \delta_S + \frac{\partial (F_3\delta_S)}{\partial x_3}.$$

Отсюда следует, во-первых, возможность представить поверхностный дипольный источник в виде суммы простого и двойного слоя, а во-вторых, неединственность решения при определении касательных компонент дипольного момента.

В таком случае, можно сформулировать задачу **численного бимформин-**

га для источника дипольного типа в виде обратной задачи по поиску плотности простого Q и двойного F слоя по известному в некоторой области D акустическому полю P , удовлетворяющих уравнению Гельмгольца для движущейся среды в свободном пространстве:

$$-\frac{1}{c^2} (i\omega + \mathbf{U} \cdot \nabla)^2 P(\mathbf{x}) + \Delta P(\mathbf{x}) = -Q(\mathbf{x})\delta_S - \frac{\partial(F(\mathbf{x})\delta_S)}{\partial \mathbf{n}_S}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad (1.8)$$

где \mathbf{n}_S – заранее выбранная нормаль к поверхности S .

Следует отметить, что представление источника в виде суммы простого и двойного слоя соответствует не только дипольному, но и смешанному типу источника, состоящему из распределенных поверхностных монополя и диполя. Поэтому задача нахождения правой части в уравнении (1.8) также может называться задачей **численного бимформинга для источника смешанного типа**.

Область D , для которой известно поле P , с точки зрения рассматриваемых уравнений, не имеет ограничений на конкретный вид, однако, в практических целях далее будет являться поверхностью, которую будем называть поверхностью микрофонов. Важно отметить, что она не должна иметь пересечения с поверхностью S . Возможная конфигурация поверхностей источника и микрофонов представлена на рис. 1.3.

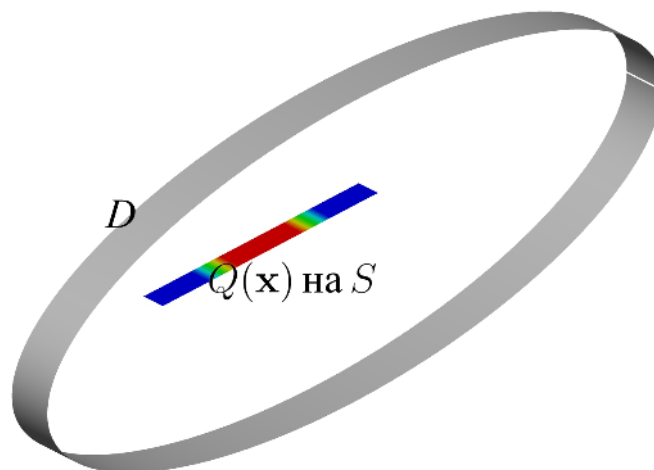


Рисунок 1.3. Возможная конфигурация поверхностей источника S и микрофонов D

В реальных задачах в силу возникающих физически обусловленных ограничений, рассматриваемых в Главе 2, не всегда является возможным отыскать источник на поверхности. В некоторых случаях источник может быть размещен только на линии, так же в трехмерном пространстве. При этом в силу симметрии, как, например, в случае, рассматриваемом в Главе 4, рассматривается зависимость функций источника только от двух координат, а по третьей координате ставятся условия, аналогичные периодическим граничным условиям в соответствующем вычислительном эксперименте. Постановки задач численного бимформинга в этом случае не терпят кардинальных изменений. Вместо поверхностей источника S и микрофонов D рассматриваются линии, лежащие в одной плоскости, поверхностная дельта-функция заменяется на дельта-функцию для линии, а нормаль выбирается в плоскости линий S и D .

Глава 2. Методы решения задач численного бимформинга

2.1 Метод для источника монопольного типа

2.1.1 Построение дискретной модели

Рассмотрим задачу численного бимформинга для источника монопольного типа, заключающуюся в нахождении плотности Q простого слоя в правой части уравнения (1.5) в случае постоянного вектора скорости \mathbf{U} движения среды по известному в некоторой области D акустическому полю P . Данное уравнение имеет решение, связывающее P и Q в виде потенциала простого слоя [36], [4]:

$$\begin{aligned}
 P(\mathbf{x}) &= \int_S Q(\mathbf{y}) G_M(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{x} \in D, \\
 G_M(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-ik'\tilde{x}}}{x'}, \\
 x' &= \sqrt{(\mathbf{M} \cdot \mathbf{x})^2 + \beta^2 |\mathbf{x}|^2}, \quad \beta^2 = 1 - |\mathbf{M}|^2, \quad k' = \frac{\omega}{c\beta^2}, \\
 \tilde{x} &= -(\mathbf{M} \cdot \mathbf{x}) + x', \quad \mathbf{M} = \frac{1}{c} \mathbf{U}
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

или в операторном виде:

$$P = \mathcal{T}Q. \tag{2.2}$$

Оператор \mathcal{T} далее будем называть *оператором переноса излучения*. Таким образом, исходная задача численного бимформинга сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода. В силу того, что поверхности микрофонов D и источника S не пересекаются по построению модели, ядро $G_M(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ является бесконечно дифференцируемым; функция $Q(\mathbf{x})$ непрерывна на S также по построению модели, и, следовательно, оператор $\mathcal{T} : C(S) \rightarrow C(D)$ компактный [47]. Тогда он не имеет ограниченного обратного оператора, задача по нахождению функции Q в уравнении (2.2) является некорректной. Тем не менее, рассматриваемая далее дискретизация задачи

(2.2) имеет регуляризирующие свойства и позволяет получить дискретную задачу численного бимформинга, имеющую единственное и устойчивое решение.

Для построения численного метода решения задачи бимформинга, описанного в [48], на поверхности источника S вводится сетка, состоящая из N узлов $\{\mathbf{y}_n\}_{n=1}^N$, а на поверхности микрофонов D выбирается решетка из M узлов $\{\mathbf{x}_m\}_{m=1}^M$, причем $M \gg N$. Под микрофонной решеткой подразумевается конфигурация расположения в общем случае никак между собой не связанных точечных микрофонов. Функция интенсивности распределенного монополюсного источника представляется своими значениями в виде вектора $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_N)^T$, $s_n = Q(\mathbf{y}_n)$ с использованием разложения по кусочно-линейным базисным функциям $\{\psi_n(\mathbf{y})\}_{n=1}^N$:

$$Q(\mathbf{y}) = \sum_{n=1}^N s_n \psi_n(\mathbf{y}), \quad (2.3)$$

тогда как давление P в точках расположения микрофонов – в виде вектора $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_M)^T$, $d_m = P(\mathbf{x}_m)$. Таким образом, излучение от источника к микрофонам переносится согласно

$$\mathbf{d} = \mathcal{T}_a \mathbf{s}, \quad (2.4)$$

где \mathcal{T}_a – дискретная аппроксимация (матрица) оператора переноса излучения \mathcal{T} , которую можно получить, подставив выражение (2.3) в (2.1):

$$d_m = \sum_{n=1}^N s_n \int_S \psi_n(\mathbf{y}) G_M(\mathbf{x}_m - \mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}}.$$

Следовательно,

$$(\mathcal{T}_a)_{mn} = \int_S \psi_n(\mathbf{y}) G_M(\mathbf{x}_m - \mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}}. \quad (2.5)$$

В случае поиска источника на линии, для которой заданы узлы $\{Y_n\}_{n=1}^N$ одномерной сетки источника, базисные функции ψ_n кусочно-линейного вос-

полнения имеют простейшую треугольную форму, см. рис. 2.1:

$$\psi_n(Y) = \begin{cases} 0, & Y \notin [Y_{n-1}, Y_{n+1}]; \\ \frac{Y-Y_{n-1}}{Y_n-Y_{n-1}}, & Y \in [Y_{n-1}, Y_n]; \\ \frac{Y_{n+1}-Y}{Y_{n+1}-Y_n}, & Y \in [Y_n, Y_{n+1}]; \end{cases}$$

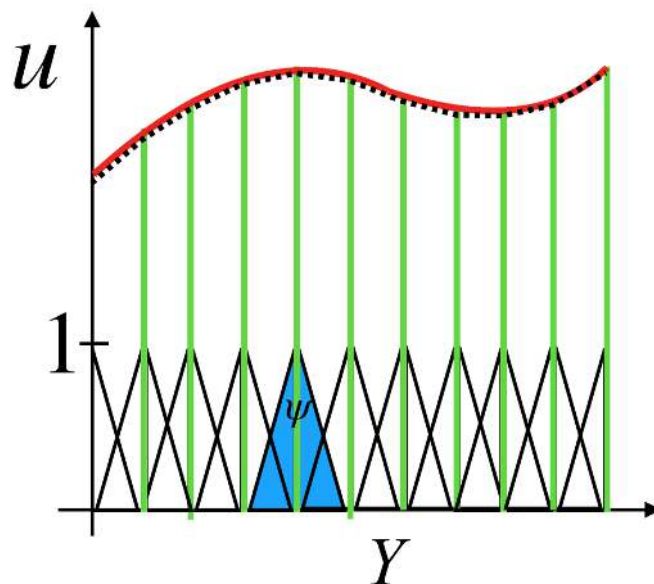


Рисунок 2.1. Вид кусочно-линейных базисных функций в одномерном случае

В случае рассмотрения поверхности источника используется треугольная сетка и соответствующая кусочно-треугольная поверхность. Узлы сетки источника в этом случае размещаются в вершинах треугольников, а базисные функции ψ_n для двумерного кусочно-линейного восполнения имеют пирамидальную форму.

Для вычисления интегралов (2.5) используются формулы Гаусса. В тестах, рассматриваемых в параграфе 2.2, наблюдается сильное влияние количества узлов k в носителе базисной функции на получаемое приближенное решение задачи численного бимформинга. Оптимальными по соотношению точности и вычислительных затрат являются формулы с $k = 4$ для отрезка и $k = 7$ для треугольника. Отдельно стоит отметить важность конечно-элементного способа вычисления матрицы \mathcal{T}_a при идентификации распределенного источника по сравнению со случаем точечных источников [10], [11], когда $(\mathcal{T}_a)_{mn} = G_M(\mathbf{x}_m - \mathbf{y}_n)$, поскольку он приводит к существенному повыше-

нию устойчивости метода.

Для нахождения вектора интенсивностей источника \mathbf{s} при использовании данных бимформинга $\tilde{\mathbf{d}}$ в узлах решетки микрофонов ставится условие минимизации нормы невязки $\tilde{\mathbf{d}} - \mathbf{d}$, см. (2.4), с возможным добавлением стабилизирующего параметра $\gamma \geq 0$:

$$\|\tilde{\mathbf{d}} - \mathcal{T}_a \mathbf{s}\|_2^2 + \gamma \|\mathbf{s}\|_2^2 \rightarrow \min_{\mathbf{s}}. \quad (2.6)$$

Решение такой задачи имеет вид:

$$\mathbf{s} = (\mathcal{T}_a^* \mathcal{T}_a + \gamma I)^{-1} \mathcal{T}_a^* \tilde{\mathbf{d}}. \quad (2.7)$$

2.1.2 Выбор параметров дискретизации

Выбор параметров дискретизации задачи численного бимформинга, а именно шагов сеток источника, микрофонной решетки и расстояния между поверхностями источника и микрофонов, существенно влияет на устойчивость решения. Слишком сильное измельчение сетки источника может привести к взрывному росту числа обусловленности C_a матрицы $\mathcal{T}_a^* \mathcal{T}_a$ и необходимости вводить стабилизационный параметр, уравнение (2.6), (2.7). Введение стабилизационного параметра влияет на точность решения задачи, причем априорно оценить погрешность решения не представляется возможным. Далее приводятся рассуждения, позволяющие строить такие *матрицы переноса излучения* \mathcal{T}_a , что число обусловленности C_a не превышает 10^5 , а погрешность ε вычисления характерных тестовых функций источника удовлетворяет заданной величине, и стабилизация не требуется. Такие сетки и матрицы далее для простоты будем называть **корректными**. Представленные рассуждения не являются строгими, но вполне могут давать представления о порядке значений C_a и ε , чего может быть достаточно для решения практических задач.

Сетка для аппроксимации функции источника

Во-первых, необходимо потребовать различимость соседних узлов сетки с точки зрения вклада значений функции источника в этих узлах в акустическое поле. Это означает, что расстояние между ними не должно быть существенно меньше, чем длина волны λ для рассматриваемой частоты. Это

ограничение связано с дифракционным пределом, соответствующий пример проиллюстрирован на рис. 2.2, где dist_S обозначает шаг сетки источника. Таким образом, первое условие формулируется в виде $\text{dist}_S \gtrsim \lambda$. Во-вторых, для получения как можно большей точности приближенного решения не следует располагать узлы на расстоянии, существенно превышающем длину волны, то есть $\text{dist}_S \lesssim \lambda$. Отсюда следует, что шаг сетки источника должен быть сопоставим с длиной волны:

$$\text{dist}_S \sim \lambda. \quad (2.8)$$

Конкретные практические оценки пределов сопоставимости рассматриваются в параграфе 2.2.

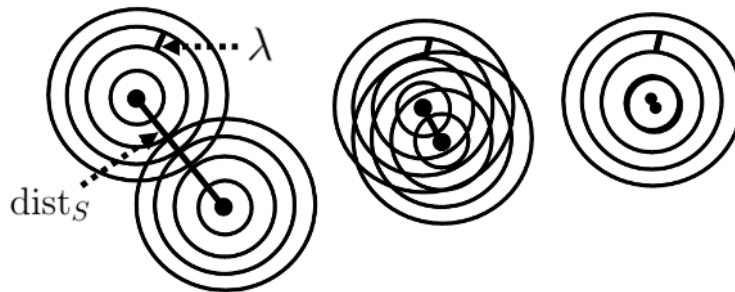


Рисунок 2.2. Иллюстрация дифракционного предела

Сетка микрофонов

Поверхность микрофонов D характеризуется расстоянием между соседними микрофонами dist_D и расстоянием от поверхности S dist_{SD} . Для простоты проведения дальнейших рассуждений будем считать, что микрофоны D и источник S расположены на двух параллельных плоскостях, причем $\text{dist}_{SD} \gg \text{dist}_S$.

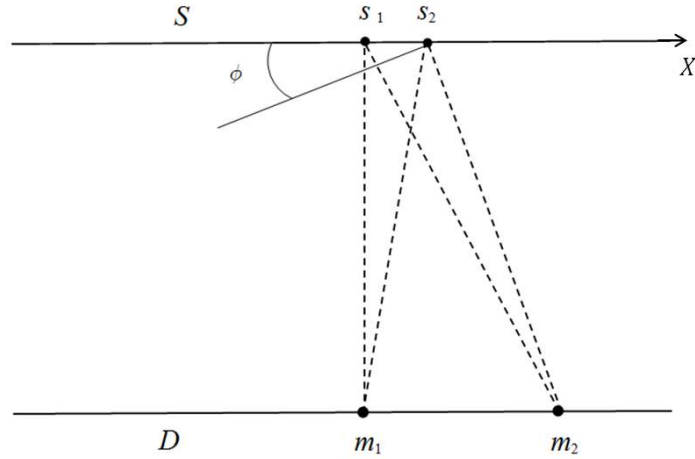


Рисунок 2.3. Схема расположения соседних узлов сетки источника на поверхности S и микрофонов на поверхности D

На рис. 2.3 приведена схема расположения соседних точек s_1 и s_2 на поверхности источника S , а также двух соседних микрофонов m_1 и m_2 на поверхности D . Тогда $\text{dist}_S = |s_1 s_2|$, $\text{dist}_D = |m_1 m_2|$. Каждый из микрофонов принимает сигнал от функции источника на отрезке $[s_1, s_2]$. Сигналы, поступающие из узлов s_1 и s_2 на какой-либо из микрофонов, должны быть различимы, то есть разность расстояний должна составлять величину $\text{const} \lambda$ вне зависимости от dist_{SD} . То есть,

$$|s_1 m_2| - |s_2 m_2| = \text{const} \lambda.$$

С учетом $\text{dist}_{SD} \gg \text{dist}_S$, эту разность можно оценить как $\text{dist}_S \sin \varphi$, где $\sin \varphi \approx (\angle m_2 s_1 m_1) = \frac{\text{dist}_D}{\text{dist}_{SD}}$. Тогда

$$\text{dist}_D \approx \frac{\text{dist}_{SD}}{\text{dist}_S} \text{const} \lambda, \quad (2.9)$$

то есть расстояние, с учетом уже зафиксированного ограничения $\text{dist}_S \sim \lambda$, между микрофонами должно быть пропорционально расстоянию между поверхностями источника и микрофонов.

Для оценки расстояния между поверхностями источника S и микрофонов D приведем следующие рассуждения. Поверхность микрофонов должна быть расположена таким образом, чтобы разрешить сигнал даже в том случае, когда функция источника принимает два одинаковых по амплитуде, но разных по знаку значения в двух соседних узлах. Моделью такой ситуации может

служить диполь с базой dist_S . Тогда в силу того, что $\text{dist}_{SD} \gg \text{dist}_S$ отклик на микрофоне m_1 от такого диполя будет иметь порядок $d_1 \sim \frac{\text{dist}_S}{\lambda} \frac{1}{\text{dist}_{SD}} |\cos \theta|$, где $\theta = \angle(m_1 s_1 s_2)$. Последнее верно, поскольку фундаментальное решение для точечного диполя $|\nabla G_M(\mathbf{x})|$ имеет превалирующий член порядка $\frac{k}{|\mathbf{x}|}$ при $k|\mathbf{x}| = 2\pi|\mathbf{x}|/\lambda \gg 1$. В свою очередь, $\cos \theta = \frac{\Delta x}{\text{dist}_{SD}}$, Δx – смещение микрофона m_1 относительно центра отрезка $s_1 s_2$ по оси Ox_1 . Пусть $\Delta x = \text{const}$, $\Delta x \sim \text{dist}_S \sim \lambda$, то есть шаг сетки микрофонов фиксирован. Тогда $d_1^2 \sim \frac{\lambda^2}{(\text{dist}_{SD})^4}$.

Остается оценить асимптотику для максимального собственного значения $\mathcal{T}_a^* \mathcal{T}_a$, определяемого максимумом отклика $\|\mathcal{T}_a \tilde{\mathbf{s}}\|$ по нормированным распределенным источникам. В такой постановке он асимптотически достигается в случае согласованных фаз в узлах s_1 и s_2 , что соответствует когерентному суммированию сигналов на микрофоне m_1 . Отклик от такого источника имеет порядок $D_1 \sim \frac{1}{\text{dist}_{SD}}$. Тогда рост числа обусловленности C_a матрицы $\mathcal{T}_a^* \mathcal{T}_a$ можно оценить как

$$C_a = \frac{D_1^2}{d_1^2} \sim \left(\frac{\text{dist}_{SD}}{\lambda} \right)^2. \quad (2.10)$$

Это объясняет требование линейной зависимости расстояния между линией (поверхностью) микрофонов и линией (поверхностью) источника от длины волны:

$$\text{dist}_{SD} = \text{const} \lambda. \quad (2.11)$$

Также в силу наличия физической вязкости, модельной и сеточной диссипации при численном решении уравнений Навье-Стокса (1.1), наблюдается быстрое затухание высокочастотных колебаний по мере удаления от источника. Поэтому в практических целях при исследовании коротковолновых режимов удобно располагать поверхность микрофонов ближе к поверхности источника, что позволяет увеличить уровень измеряемого сигнала и отношение сигнал/шум. Последнее утверждение также делает выбор зависимости (2.11) обоснованным.

Наконец, число микрофонов M должно превышать число узлов сетки источника N для устойчивой разрешимости задачи:

$$M > N. \quad (2.12)$$

Соблюдение представленных условий (2.8), (2.9), (2.12) позволяет получать матрицы переноса излучения \mathcal{T}_a с умеренным числом обусловленности $C_a = \text{cond}(\mathcal{T}_a^* \mathcal{T}_a)$ и, соответственно, устойчивые решения без использования стабилизирующих параметров. Это утверждение проверяется на тестовых задачах, параграф 2.2. То есть, ограничения на параметры дискретизации сетки источника и решетки микрофонов выступают в роли неявного предобуславливателя системы (2.7).

2.2 Тестирование метода для источника монопольного типа на синтетических данных

2.2.1 Оценка параметров для бимформинга

В параграфе 2.1.2 приведены теоретические рассуждения о характере параметров дискретизации поверхностей источника S и микрофонов D . Вывести аналитические оценки характерных расстояний, позволяющие гарантированно формировать корректные матрицы переноса излучения, затруднительно. Тем не менее, далее приводятся численные оценки шагов сетки источника, микрофонной решетки и расстояний между ними, полученные на основе проведенных тестов. Рассмотрим эти тесты.

Основным входным параметром метода является максимальная длина волны $\lambda = (1 + |\mathbf{M}|) \frac{c}{f}$, где $f = \frac{\omega}{2\pi}$ – рассматриваемая частота. Введем подборочные коэффициенты a_{SD} , a_S , a_D , которые согласно (2.11), (2.8), (2.9) определяют расстояние между поверхностями микрофонной решетки и источника, шаги сеток и микрофонов соответственно:

$$\begin{aligned} \text{dist}_{SD} &= a_{SD} \lambda; \\ \text{dist}_S &= a_S \lambda; \\ \text{dist}_D &= \frac{a_D}{a_S} \text{dist}_{SD}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Случай источника на линии

Рассмотрим случай расположения источника и микрофонов на параллель-

ных отрезках S и D согласно схеме, приведенной на рис. 2.3. Зафиксируем $a_S = 1$, число узлов сетки источника $N = 10$, число микрофонов $M = 15$ и будем подыскивать значения a_D в интервале $0 < a_D < 1$, обеспечивающие умеренную величину числа обусловленности C_a . При этом рассматриваются разные значения параметра $a_{SD} = 3, 5, 10, 20, 30$, характеризующего расстояние между линией микрофонов и источника. Для выбранных значений параметров a_D, a_S, a_{SD} строится сетка источника и микрофонная решетка, вычисляется матрица \mathcal{T}_a и число обусловленности $C_a = \text{cond}(\mathcal{T}_a^* \mathcal{T}_a)$. Характерный график зависимости числа C_a от параметра a_D из такого эксперимента приведен на рис. 2.4 (слева). Отсюда видно, что подходящим является интервал значений $0.08 < a_D < 0.3$. Теперь выберем значение $a_D = 0.16$ и будем подбирать параметр a_S , также доставляющий умеренную величину числа C_a . Типичный график зависимости числа C_a от параметра a_S приведен на рис. 2.4 (справа). Из графика видно, что величину a_S можно взять из диапазона $0.4 < a_S < 1.5$.

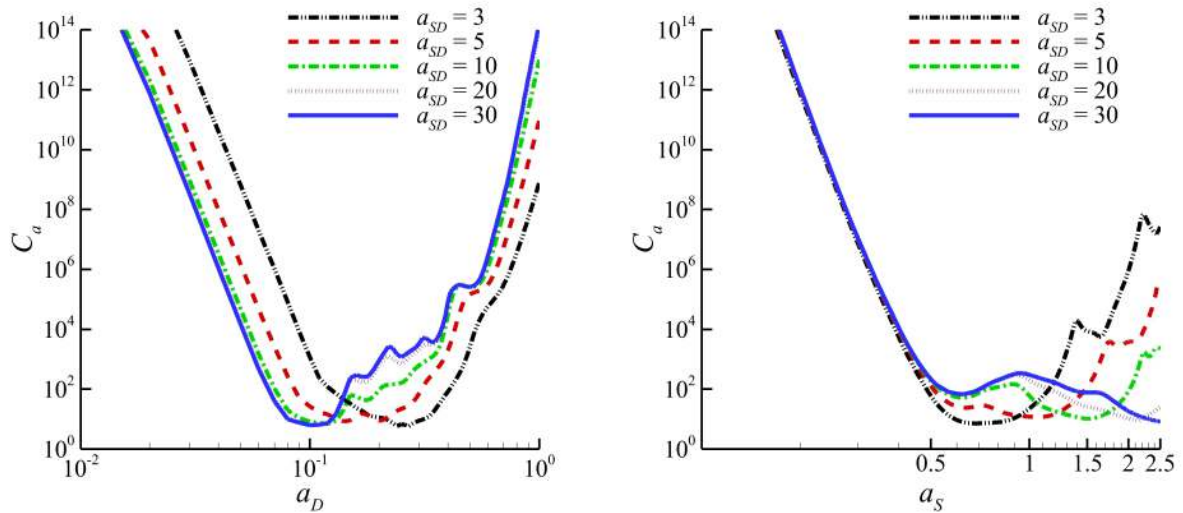


Рисунок 2.4. Источник на линии: зависимость числа обусловленности C_a от коэффициентов a_D (слева) и a_S (справа) при различных значениях a_{SD}

Осталось из выбранного интервала выбрать те значения параметра a_D , которые бы обеспечивали низкую погрешность решения на тестовых функциях источника. В качестве таких тестовых функций рассматривается гауссиан с полушириной 2λ :

$$\text{Gauss}(Y) = \exp -0.5(Y - Y_0)^2/\sigma^2, \quad \sigma^2 = (2\lambda)^2/(8 \ln 2),$$

где Y – координата вдоль линии источника. Выберем $a_S = 0.6$, построим сетку с заданной функцией источника и для каждого a_D в диапазоне $0.01 < a_D < 0.3$ будем строить микрофонную решетку со сгенерированными от функции источника сигналами. Решая обратную задачу, получим графики зависимости C -нормы погрешности ε_{1D}^1 от параметра a_D , рис. 2.5 (слева). Видно, что погрешность составляет несколько процентов в интервале $0.08 < a_D < 0.15$. Для более широкой тестовой функции, гауссиана с полушириной 3λ , ошибка уменьшается, см. рис. 2.5 (справа). В последнем расчете использовалось $N = 20$ узлов сетки источника и $M = 30$ микрофонов.

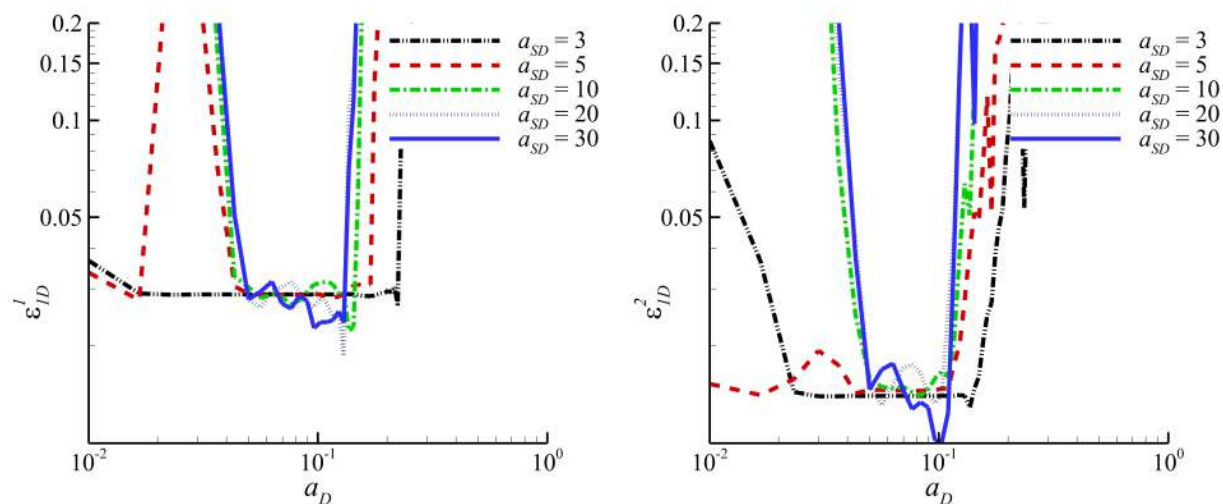


Рисунок 2.5. Источник на линии: зависимость C -нормы погрешности ε_{1D}^1 и ε_{1D}^2 от коэффициентов a_D . Полуширина гауссиана 2λ (слева) и 3λ (справа)

Отметим, что нижняя оценка корректного параметра a_D возникает из-за фиксированного числа микрофонов M . Тогда при уменьшении значения a_D , начиная с некоторого момента, длины линии микрофонов становится недостаточно, и задача разрешается хуже. Если не фиксировать M , но зафиксировать длину линии микрофонов, то падения ошибки не происходит даже при малом расстоянии между микрофонами. Это одна из особенностей численного бимформинга, позволяющая использовать сколь угодно мелкую решетку микрофонов. С другой стороны, это является не всегда оправданным: точность от этого может не возрастать, в отличие от вычислительных затрат.

Случай источника на поверхности

Аналогичный анализ проводится для случая поверхностей S и D , полагая их квадратными областями, расположенными на параллельных плоскостях. Сетка источника имеет $N = 10^2$ узлов, число микрофонов $M = 15^2$.

Выберем $a_S = 1$ и построим график зависимости числа C_a от параметра a_D (слева). Видно, что подходящим является интервал $0.07 < a_D < 0.2$. При $a_D = 0.12$ ищем подходящий интервал для параметра a_S : $0.5 < a_S < 1.3$, см. рис. 2.6 (справа). Зафиксировав, например, $a_S = 0.8$, уточним интервал для a_D , проанализировав C -нормы погрешности ε_{2D}^1 и ε_{2D}^2 для тестовых функций-гауссианов с полушириной 3λ и 4λ соответственно, см. рис. 2.7. Полуширина гауссианов отличается от случая линии источника в силу более грубой сетки.

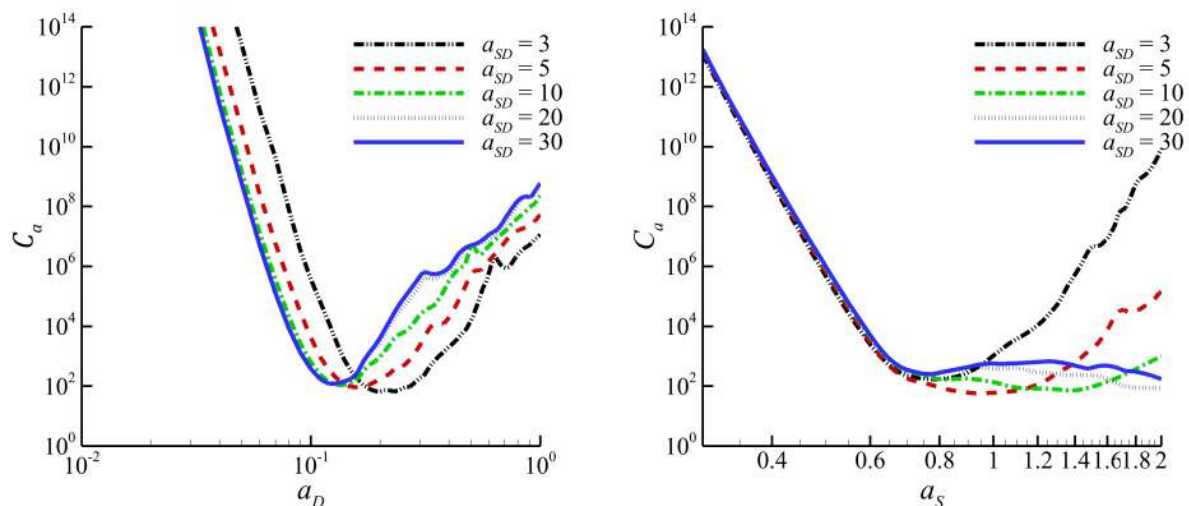


Рисунок 2.6. Источник на линии: зависимость числа обусловленности C_a от коэффициентов a_D (слева) и a_S (справа) при различных значениях a_{SD}

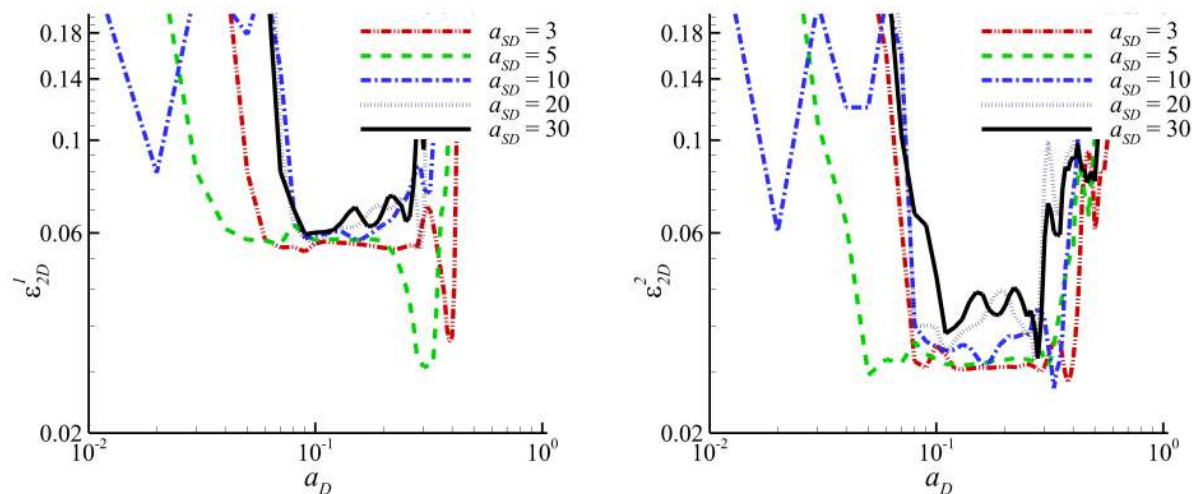


Рисунок 2.7. Источник на линии: зависимость C -нормы погрешности ε_{2D}^1 и ε_{2D}^2 от коэффициентов a_D . Полуширина гауссиана 3λ (слева) и 4λ (справа)

Таким образом, получаем следующие подходящие значения коэффициентов:

- для случая источника на линии:

$$0.4 < a_S < 1.5, \quad 0.08 < a_D < 0.15. \quad (2.14)$$

- для случая источника на поверхности:

$$0.6 < a_S < 1.5, \quad 0.08 < a_D < 0.15. \quad (2.15)$$

При этом численные оценки точности, проведенные на примере функции источника в виде гауссиана с полушириной 3λ , дают примерно $\varepsilon_{1D} \in [0.02, 0.03]$, $\varepsilon_{2D} \in [0.04, 0.07]$.

2.2.2 Конфигурация тестовых задач

Для проведения тестирования метода на корректность работы выбирается конфигурация с плоскостью (линией) источника S и двумя вариантами (D_1 и D_2) поверхностей микрофонов (рис. 2.8). Поверхности D_1 и D_2 являются поверхностями Фокса Уильямса-Хокинга из расчета по турбулентному обтеканию сегмента прямого крыла 30P30N с выпущенной механизацией на режиме посадки (описание расчета будет приводится в Главе 4). Ширина D_1 и D_2 составляет $1/9L_{ch}$, где L_{ch} – длина хорды крыла (см. Главу 4), полоса

S имеет длину $0.7L_{ch}$ по оси x_1 (вдоль хорды крыла) и ширину $0.06L_{ch}$ по поперечному направлению x_3 .

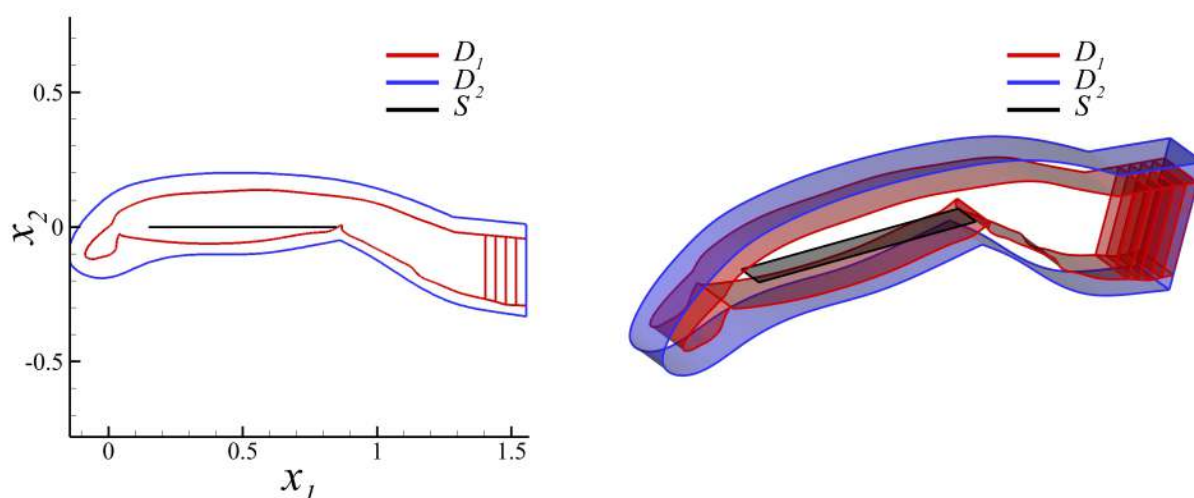


Рисунок 2.8. Геометрические конфигурации источника S и микрофонов D_1, D_2 , используемые для проведения тестов. Линии источника и микрофонов (слева), плоскость источника и поверхности микрофонов (справа)

2.2.3 Тесты для линии источника при низкой частоте

Для первой тестовой задачи выберем длину волны $\lambda = 0.1$ и вектор Маха $\mathbf{M} = 0$. В таком случае $\lambda > 0.06$ – ширины поверхности S . Тогда, согласно ограничениям на шаг сетки, приведенным выше, по поперечному направлению x_3 может располагаться не более одного узла сетки источника, длина же S достаточна для расположения нескольких узлов. Тогда необходимо располагать источники и микрофоны на линиях.

В качестве референсного источника на отрезке S задается кусочно-линейная функция со значениями 1 в трех узлах $x_1 = 0.4, 0.5, 0.6$ и 0 в остальных. Микрофоны располагаются на линии D_1 (число микрофонов $M = 1663$). Для генерации синтетических данных на микрофонах по формуле (2.4) с аппроксимацией оператора переноса излучения (2.5) выбирается достаточно подробная равномерная сетка S_h^g , состоящая из 101 узла. Восстановление функции источника производится на трех сетках S_h^1, S_h^2, S_h^3 , для которых количество узлов N , шаг сетки dist_S , число обусловленности $C_a = \text{cond}(\mathcal{T}_a^* \mathcal{T}_a)$ и L_2 -нормы ошибок приведены в таблице ниже.

Сетка источника	N	dist_S	C_a	$\ \varepsilon\ _{L_2}$
S_h^1	8	0.1	17	0.072
S_h^2	15	0.05	22	0.00056
S_h^3	29	0.025	$6.5 \cdot 10^7$	0.0031

Таблица 2.1: Количество узлов N , шаг сетки dist_S , числа обусловленности C_a и L_2 -нормы ошибок, возникающие при приближенном восстановлении функции источника на сетках S_h^1, S_h^2, S_h^3 , в случае линии источника

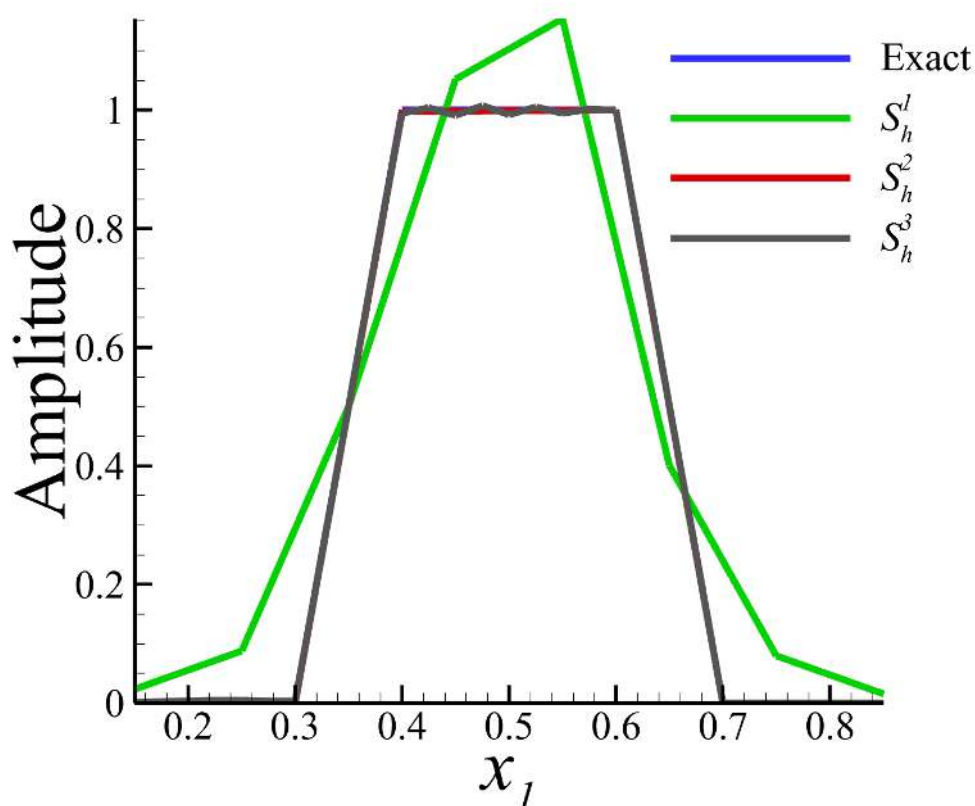


Рисунок 2.9. Графики точного и приближенных решений, полученных на сетках S_h^1, S_h^2, S_h^3

Из табл. 2.1 и рис. 2.9 видно, что приближенные решения хорошо аппроксимируют референсную трапециевидную функцию. Отметим, что довольно сильное расхождение решения, полученного на сетке S_h^1 , и точного происходит из-за сдвига узлов сетки S_h^1 на полшага относительно сетки S_h^g , с которой происходила генерация синтетических данных на микрофонах. Дополнительный эксперимент показал, что при совпадении узлов сетки графики точного и полученного решений близки.

Необходимо отметить сильный рост числа обусловленности при поиске приближенного решения на сетке S_h^3 . Это связано с тем, что шаг сетки $\text{dist}_{S_h^3}$ довольно мал по сравнению с длиной волны $\lambda = 0.1$. Тем не менее, при отсутствии зашумления данных на микрофонах, полученное решение хорошо приближает точное.

На этой же задаче исследуется важность использования интегрирования и его необходимая точность при вычислении элементов матрицы переноса излучения (2.5). На рис. 2.10 приводятся графики приближенных решений, полученные при разном количестве узлов квадратур Гаусса k . Хорошо видно, что при малых k решение на грубой сетке S_h^1 оказывается неудовлетворительным. В табл. 2.2 приведены значения числа обусловленности C_a для различного числа узлов квадратуры и соответствующие им L_2 -нормы погрешности решений. Оптимальным для случая линии источника оказывается значение $k = 3$.

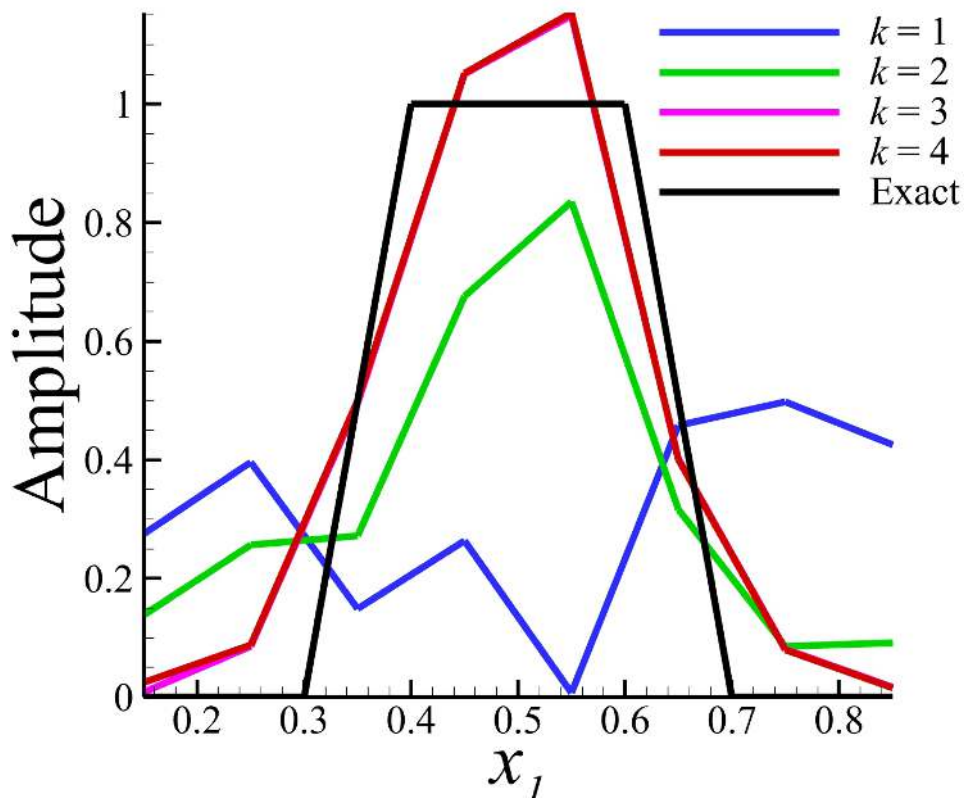


Рисунок 2.10. Зависимость решения от числа узлов квадратуры на сетке S_h^1

k	$\ \varepsilon\ _{L_2}$	C_a
1	0.47	$1.1 \cdot 10^{16}$
2	0.18	16
3	0.070	17
4	0.071	17
8	0.071	17

Таблица 2.2: Погрешность решение и число обусловленности C_a для различного числа узлов квадратуры k в случае источника на линии

Тесты, выполненные для линии микрофонов D_2 , полностью повторяют описанные выше результаты для линии D_1 .

2.2.4 Тесты с плоскостью источника при высокой частоте

Аналогичные тесты проводятся для длины волны $\lambda = 0.01$. В данном случае ширина плоскости S ее превышает, что делает возможным размещение нескольких узлов сетки источника в направлении x_3 , таким образом, приводя к постановке тестовой задачи с плоскостью источника.

В качестве референсной функции источника выбрана та же трапециевидная функция, что и в случае для линии источника, но сжатая в 10 раз, постоянная вдоль x_3 , со значениями 1 в узлах $x_1 = 0.49, 0.50, 0.51$ и 0 в остальных (рис. 2.11). Данные на микрофонах генерируются с равномерной сетки S_h^g с 281×25 узлами. Микрофоны расположены на поверхности D_1 , их количество $M = 83150$.

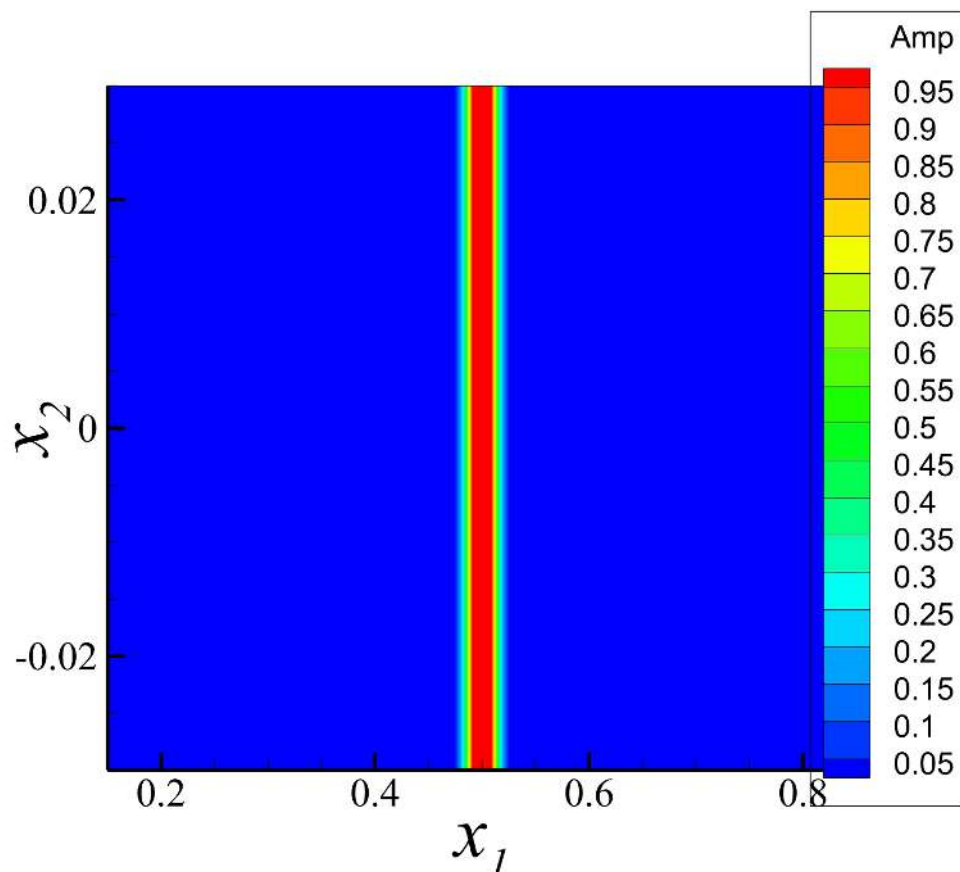


Рисунок 2.11. Точное решение для синтетических тестов в случае источника, размещенного на плоскости

Результаты тестов полностью аналогичны случаю линии источника. В качестве сеток для восстановления функции источника выбираются три сетки $S_{h,3D}^1, S_{h,3D}^2, S_{h,3D}^3$. При измельчении шага сетки (см. табл. 2.3) до значений, определяемых ограничениями (2.13), (2.15), можно получить высокую точность решения, однако, при слишком сильном измельчении погрешность сильно возрастает.

Сетка источника	N	dist_S	C_a	$\ \varepsilon\ _{L_2}$
$S_{h,3D}^1$	71×12	0.1	81	0.00054
$S_{h,3D}^2$	83×14	0.0085	111	0.0036
$S_{h,3D}^3$	141×23	0.005	$2.1 \cdot 10^{17}$	0.014

Таблица 2.3: Количество узлов N , шаг сетки dist_S , числа обусловленности C_a и L_2 -нормы ошибок, возникающие при приближенном восстановлении функции источника на сетках $S_{h,3D}^1, S_{h,3D}^2, S_{h,3D}^3$, в случае плоскости источника

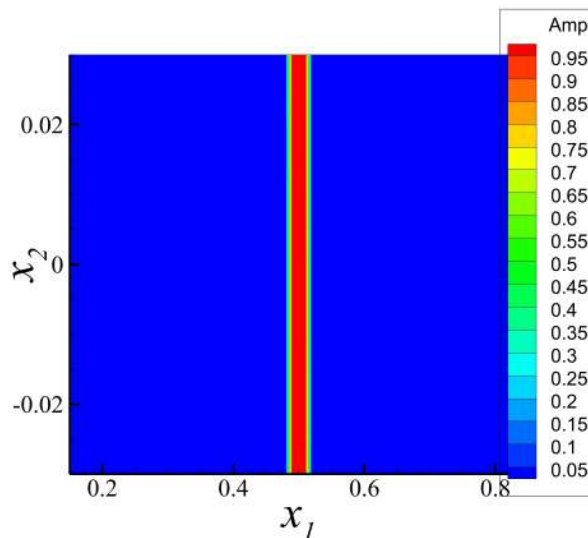


Рисунок 2.12. Приближенное решение, полученное на сетке $S_{h,3D}^1$

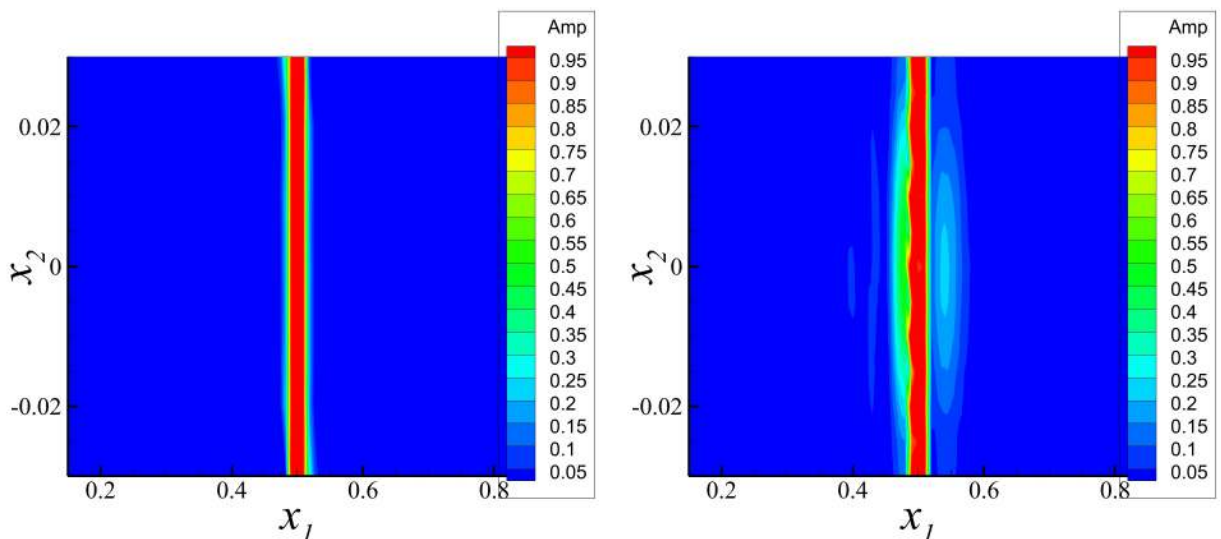


Рисунок 2.13. Приближенное решение, полученное на сетке $S_{h,3D}^2$ (слева) и $S_{h,3D}^3$ (справа)

На рис. 2.12, рис. 2.13 видно, что при восстановлении источника на сетке $S_{h,3D}^1$, а так же предельно для соблюдения условий корректности (2.13), (2.15) измельченной сетке источника $S_{h,3D}^2$, приближенные решения визуально неотличимы от точного (рис. 2.11). При этом при вычислении источника на сетке $S_{h,3D}^3$, шаг которой сильно меньше длины звуковой волны, в приближенном решении возникают пространственные структуры, которые отсутствуют в референсном решении. Аналогичные результаты получаются и при проведении тестов для поверхности микрофонов D_2 .

Как и в случае источника на линии, интегрирование при вычислении матрицы переноса излучения (2.5) оказывается важным. На рис. 2.14 приводится

визуализация приближенных решений, полученных на сетке $S_{h,3D}^1$ при числе узлов формул Гаусса $k = 1$ (слева) и $k = 3$ (справа). В табл. 2.4 приведены значения числа обусловленности C_a и L_2 -нормы погрешности решений. Оптимальным для случая источника на поверхности оказывается значение $k = 7$.

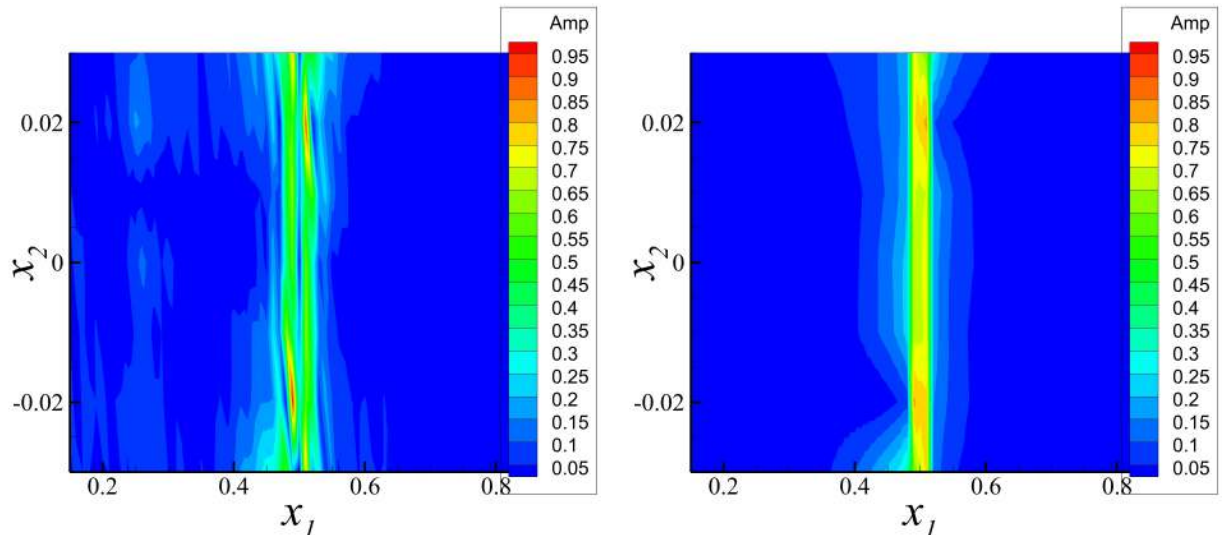


Рисунок 2.14. Численное решение на сетке $S_{h,3D}^1$ для $k = 1$ (слева) и $k = 3$ (справа)

k	$\ \varepsilon\ _{L_2}$	C_a
1	0.0326	$4.8 \cdot 10^{17}$
3	0.0169	150
6	0.00113	85
7	0.000535	81
15	0.000183	81

Таблица 2.4: Погрешность решение и число обусловленности C_a для различного числа узлов квадратуры k в случае источника на плоскости

2.3 Метод для источника дипольного типа

Задача для дипольного распределенного поверхностного источника может иметь два представления решения: для плотностей простого и двойного слоя и для компонент дипольного момента.

2.3.1 Задача для плотностей простого и двойного слоя

Из (1.8) следует связь акустического давления P и плотностей простого Q и двойного F слоя [36], [4]:

$$P(\mathbf{x}) = (Q * G_M)(\mathbf{x}) + (F * G_M^n)(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in D, \quad (2.16)$$

где $G_M^n = (\nabla G_M, \mathbf{n}_S)$, G_M – функция Грина для монопольного типа источника (2.1), \mathbf{n}_S – выбранная в (1.8) нормаль к поверхности источника S , а под знаком $(\cdot * \cdot)$ подразумевается операция свертки.

В операторном виде:

$$P = \mathcal{T}^{(0)}Q + \mathcal{T}^n F, \quad (2.17)$$

где $\mathcal{T}^{(0)}$ – рассматриваемый ранее оператор переноса излучения для монопольного типа источника (2.2), а

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^n &= \mathcal{T}^{(1)}n_1 + \mathcal{T}^{(2)}n_2 + \mathcal{T}^{(3)}n_3, \\ (\mathcal{T}^{(l)}F)(\mathbf{x}) &= \int_S F(\mathbf{y}) G_M^{(l)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}}, \quad l = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Здесь $G_M^{(l)}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_l} G_M(\mathbf{x})$ – фундаментальное решение уравнения Гельмгольца для движущейся среды (1.7) для дипольного источника, n_i – компоненты вектора нормали к поверхности источника $\mathbf{n}_S = \{n_1, n_2, n_3\}$.

Численный метод строится аналогично случаю монопольного типа источника. Вводится сетка источника $\{\mathbf{y}_n\}_{n=1}^N$, состоящая из N узлов, и векторы плотностей простого слоя $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_N)^T$, $s_n = Q(\mathbf{y}_n)$, и двойного слоя $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_N)^T$, $f_n = F(\mathbf{y}_n)$. Решетка микрофонов состоит из M узлов $\{\mathbf{x}_m\}_{m=1}^M$, $M \gg 2N$, вектор сигналов $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_M)^T$, $d_m = P(\mathbf{x}_m)$. Используется кусочно-линейное восполнение плотностей простого и двойного слоя:

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{y}) &= \sum_{n=1}^N s_n \psi_n(\mathbf{y}), \\ F(\mathbf{y}) &= \sum_{n=1}^N f_n \psi_n(\mathbf{y}), \end{aligned}$$

где ψ_n – базисные функции пространства кусочно-линейных функций.

Тогда можно выписать следующие дискретные приближения операторов \mathcal{T}^n , $\mathcal{T}^{(l)}$ соответственно:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_a^n &= \mathcal{T}_a^{(1)}n_1 + \mathcal{T}_a^{(2)}n_2 + \mathcal{T}_a^{(3)}n_3, \\ (\mathcal{T}_a^{(l)})_{mn} &= \int_S \psi_n(\mathbf{y}) G_M^{(l)}(\mathbf{x}_m - \mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}}, \quad l = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Тогда акустическое давление P связано с векторами плотностей как

$$\mathbf{d} = \mathcal{T}_a^{(0)}\mathbf{s} + \mathcal{T}_a^n\mathbf{f}.$$

Учитывая зашумленность данных на микрофонах $\tilde{\mathbf{d}}$, можно сформулировать следующую дискретную задачу численного дипольного бимформинга по нахождению плотностей простого и двойного слоя в виде задачи минимизации нормы невязки $\tilde{\mathbf{d}} - \mathbf{d}$:

$$\|\tilde{\mathbf{d}} - \mathcal{T}_a^{(0)}\mathbf{s} - \mathcal{T}_a^n\mathbf{f}\|_2^2 \rightarrow \min_{\mathbf{s}, \mathbf{f}}. \quad (2.19)$$

Данная задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений с матрицей $\mathcal{T}_a = [\mathcal{T}_a^{(0)} \quad \mathcal{T}_a^n]$ и вектором неизвестных

$$\mathbf{s}' = \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{f} \end{bmatrix}$$

аналогично (2.7).

2.3.2 Задача для компонент дипольного момента

Из (1.7) следует другое представление акустического давления P в зависимости от компонент дипольного момента F_l , $l = 1, 2, 3$ [36], [4]:

$$P = F_1 * G_M^{(1)} + F_2 * G_M^{(2)} + F_3 * G_M^{(3)}, \quad (2.20)$$

или в операторном виде:

$$P = \mathcal{T}^{(l)}F_l, \quad (2.21)$$

операторы $\mathcal{T}^{(l)}$ определены ранее.

В Главе 1 показано, что такая задача по поиску полного набора компонент дипольного момента имеет неединственное решение при определении касательных к поверхности источника составляющих. Однако в Главе 4 рассматривается задача, в рамках которой, в силу симметрии течения, одна из касательных компонент приравнивается к нулю. Такая задача уже может быть однозначно разрешимой, а поиск непосредственно компонент дипольного момента может являться предметом интереса, в связи с этим обосновано построение численного метода для такой постановки (2.20).

Рассмотрим для простоты случай, когда поверхность источника S лежит в плоскости Ox_1x_2 . В таком случае касательными компонентами являются F_1, F_2 . Сообразно задаче из Главы 4, будем считать, что $F_2 = 0$. Для такой постановки введем дискретизацию, аналогичную описанной в параграфе 2.3.1. Отличием будет являться обозначение для векторов интенсивности компонент дипольного момента: $\mathbf{f}^l = (f_1^l, f_2^l, \dots, f_N^l)^T$, $f_n^l = F_l(\mathbf{y}_n)$, $l = 1, 3$. При использовании той же аппроксимации дипольных операторов переноса излучения $\mathcal{T}_a^{(l)}$, $l = 1, 3$ дискретная задача численного дипольного бимформинга по нахождению одной касательной и нормальной компонент дипольного момента имеет вид:

$$\|\tilde{\mathbf{d}} - \mathcal{T}_a^{(1)}\mathbf{f}^1 - \mathcal{T}_a^{(3)}\mathbf{f}^3\|_2^2 \rightarrow \min_{\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^3}. \quad (2.22)$$

2.4 Тестирование метода для источника дипольного типа на синтетических данных

2.4.1 Общий случай

Следующий тест проводится для длины волны $\lambda = 0.1$, вектора Маха $\mathbf{M} = 0$. Введем геометрическую конфигурацию поверхности источника и микрофонов для проведения тестовых расчетов на синтетических данных: область источника S представляет собой квадрат со стороной 1 в плоскости Ox_1x_2 , область микрофонов – сфера D радиуса 1.2 (рис. 2.15).

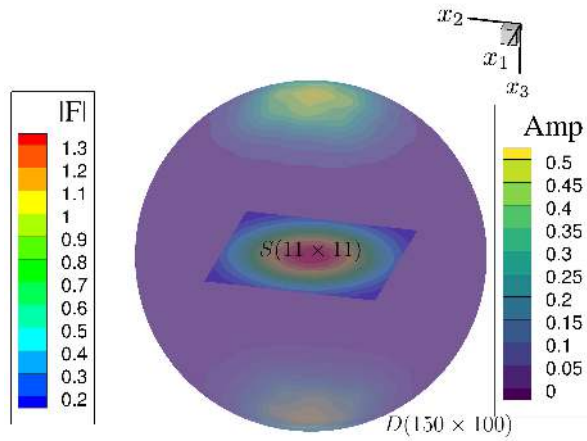


Рисунок 2.15. Геометрическая конфигурация области источника S и микрофонов D для решения дискретной задачи общего вида на синтетических данных

В качестве референсной функции на сетке 81×81 задается дипольный момент с ненулевыми компонентами F_1, F_3 , распределенными в виде гауссиана, и нулевой компонентой $F_2 = 0$ (рис. 2.16):

$$\text{Gauss}(x_1, x_2, x_3) = e^{-\frac{(x_1-0.5)^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{x_2^2}{2\sigma^2}}, \sigma = \frac{0.7}{2\sqrt{2\ln 2}}$$

$$F_{1,3}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} i \text{Gauss}(x_1, x_2, x_3)$$

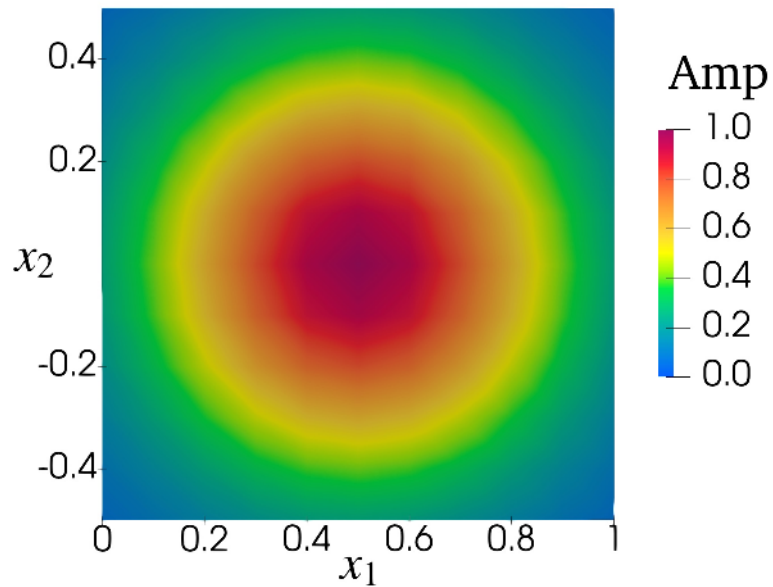


Рисунок 2.16. Амплитуда референсной функции источника

От излучения таким образом заданного дипольного источника генерируются синтетические данные \mathbf{d} на решетке микрофонов размером 150×100 . Результаты восстановления функции источника на сетке 11×11 представлены на рис. 2.17 (изображена функция нормальной к плоскости источника компоненты F_3) и рис. 2.18 (изображены восстановленные функции касательных компонент источника F_1 и F_2). Нормальная к плоскости источника компонента F_3 дипольного момента восстанавливается с относительной точностью 3.5%, в то время как решение для компоненты F_1 не похоже на гауссиан, а решение для F_2 является ненулевым.

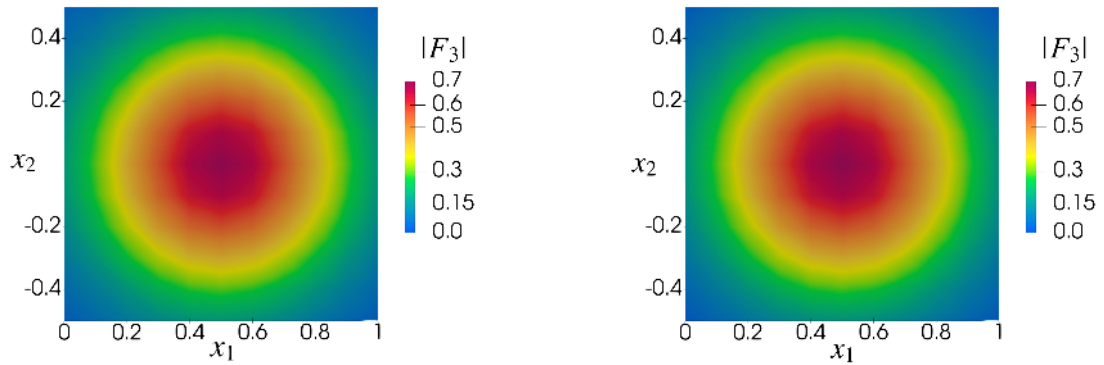


Рисунок 2.17. Восстановленная (слева) и заданная (справа) амплитуды нормальной к плоскости источника компоненты искомого дипольного момента

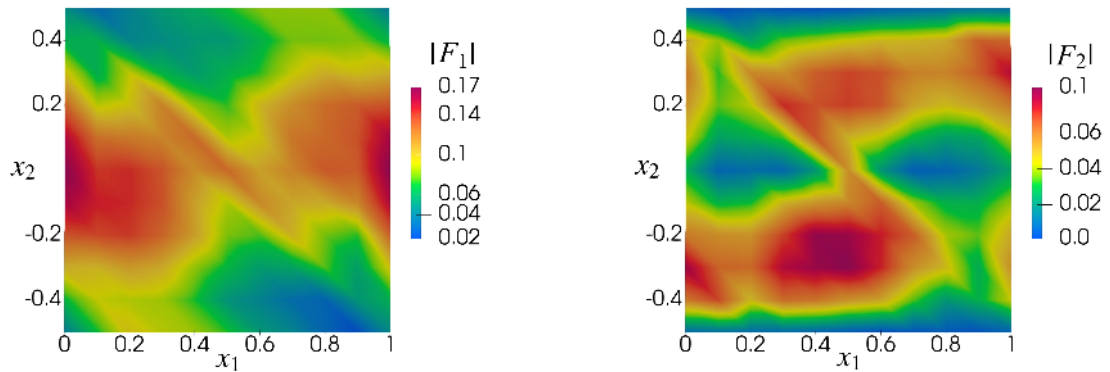


Рисунок 2.18. Восстановленные касательные к плоскости источника амплитуды компонент (F_1 слева, F_2 справа) дипольного момента

Такая ситуация происходит из-за наличия в правой части уравнения Гельмгольца (1.7) оператора поверхностной дивергенции, что приводит к наличию неединственности решения при восстановлении касательных к плоскости источника компонент. Однако заметим, что в случае восстановления источника на линии, такой проблемы не возникает, и решение для данной задачи вычисляется с высокой точностью (результаты экспериментов аналогичны монополюному случаю).

Таким образом, данную постановку задачи сложно рассматривать при обработке данных, накопленных в вычислительном эксперименте. Однако при решении задачи бимформинга на реальных данных может быть доступна априорная информация о характере течения, и, возможно, информация об источнике. В некоторых случаях это позволяет устранить неединственность

решения. Поэтому необходимо рассмотреть дополнительные постановки задач бимформинга для дипольных источников.

2.4.2 Задача для монополя и нормальной компоненты диполя

Без ограничения общности предположим, что область источника, как и ранее, лежит в плоскости Ox_1x_2 , тогда компоненты F_1, F_2 являются касательными к плоскости источника, а F_3 – нормальной.

Рассматривается дискретная задача численного бимформинга по нахождению плотностей простого и двойного слоя (2.19). В данных тестах нормаль к поверхности \mathbf{n}_S сонаправлена с осью Ox_3 , поэтому $\mathcal{T}_a^n = \mathcal{T}_a^{(3)}$, $F = F_3$.

Тестирование работоспособности алгоритма для решения тестовой задачи по нахождению плотностей простого и двойного слоя проводится при той же геометрической конфигурации областей источника и микрофонов и тех же параметрах, что и при рассмотрении общей задачи в параграфе 2.4.1, в качестве референсной функции выбран тот же гауссиан (рис. 2.19):

$$\begin{aligned} F_3(x_1, x_2, x_3) &= (1 - i) \text{Gauss}(x_1, x_2, x_3) \\ Q(x_1, x_2, x_3) &= (1 - i) \text{Gauss}(x_1, x_2, x_3). \end{aligned} \tag{2.23}$$

Данные на микрофонах \mathbf{d} сгенерированы согласно расчету излучения от источника, определяемого референсной функцией, заданной на сетке 81×81 , после чего производится его восстановление на сетке 11×11 .

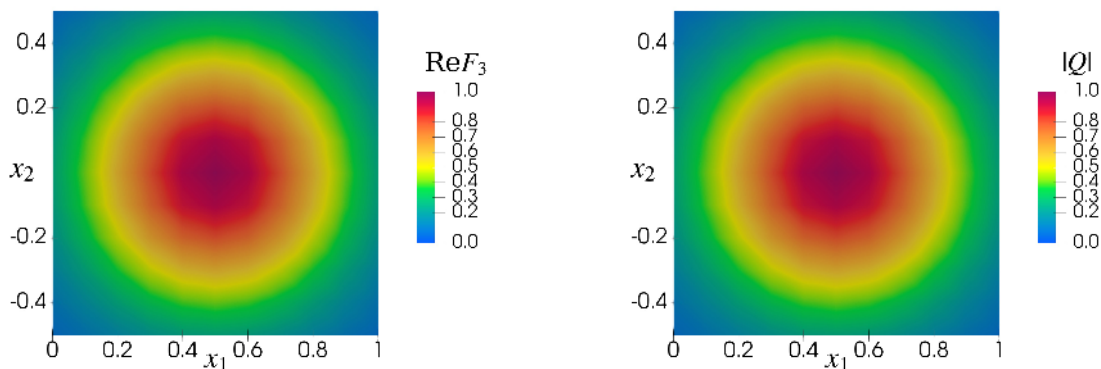


Рисунок 2.19. Референсная функция источника. Вещественная часть нормальной компоненты дипольного момента (слева) и амплитуда функции монополярного источника (справа)

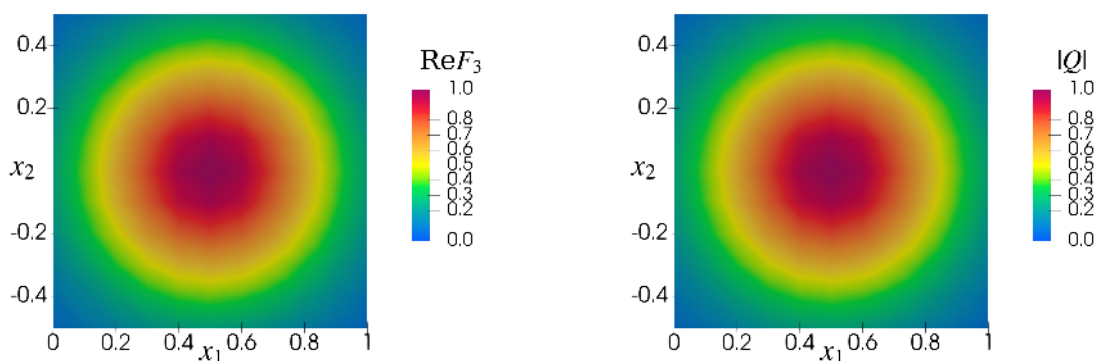


Рисунок 2.20. Восстановленная функция источника. Вещественная часть нормальной компоненты дипольного момента (слева) и амплитуда функции монополярного источника (справа)

На рис. 2.20 приведено приближенное решение тестовой дискретной задачи по нахождению плотностей простого и двойной слоя. Видно, что приближенное решение визуально трудно отличимо от точного решения, рис. 2.19. Ошибка в C -норме составляет 1.5% (после нахождения решения и интерполяции результата с сетки 11×11 на референсную сетку 81×81). Таким образом, алгоритм корректно разрешает задачу бимформинга в данной постановке на синтетических данных.

2.4.3 Задача для одной касательной и нормальной компонент диполя

Рассматривается дискретная задача численного бимформинга по нахождению одной касательной и нормальной компонент дипольного момента (2.22). Для проведения тестовых расчетов на синтетических данных используется та же геометрическая конфигурация (рис. 2.15), та же сетка на плоскости S и решетка на поверхности D , а также референсная функция источника

$$F_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - i) \text{Gauss}(x_1, x_2, x_3),$$

$$F_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - i) \text{Gauss}(x_1, x_2, x_3).$$

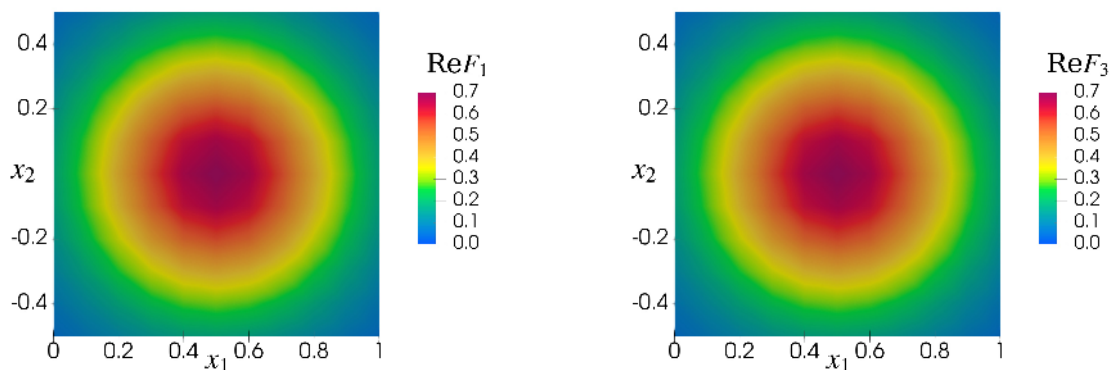


Рисунок 2.21. Референсная функция источника. Вещественная часть касательной (слева) и нормальной (справа) компонент дипольного момента

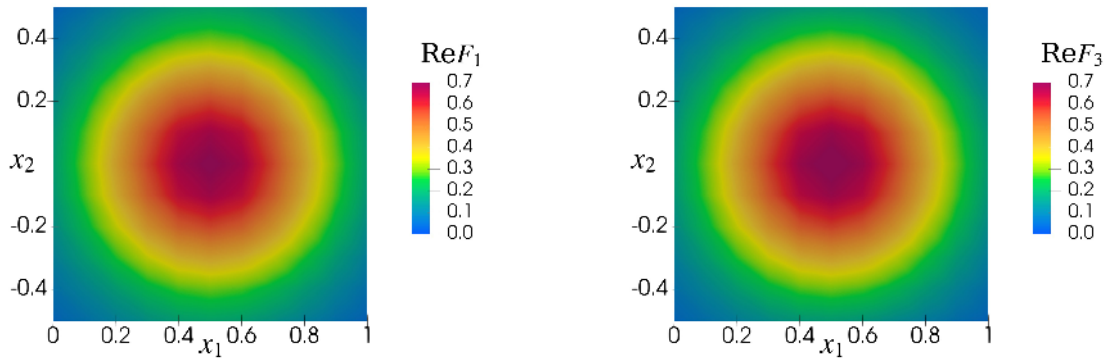


Рисунок 2.22. Восстановленная функция источника. Вещественная часть касательной (слева) и нормальной (справа) компонент дипольного момента

Приближенное решение представлено на рис. 2.22. Как и в случае задачи по нахождению плотностей простого и двойного слоя обе компоненты решения воспроизводятся с высокой точностью. Ошибка в C -норме после нахождения решения и интерполяции результата с сетки 11×11 на референсную сетку 81×81 составляет 1.7%.

Таким образом, несмотря на невозможность получить единственность решения задачи для диполя общего вида 2.4.1, отыскиваемого на поверхности, априорная информация о характере течения в задаче обтекания и, как следствие, информация об источнике может помочь в устранении неединственности решения для дипольного источника.

Глава 3. Реализация метода численного бимформинга в программном комплексе NOISEtte

3.1 Общая структура модуля

Метод численного бимформинга, описанный в Главе 2, реализован на языке C++ в виде модуля NumBeamForm в составе программного комплекса NOISEtte [35] (Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2020665710 (30.11.2020) «Программный модуль NumBeamForm численного бимформинга». Авторы: Плаксин Г.М, Софронов И.Л, Козубская Т.К).

Модуль NumBeamForm обрабатывает данные, полученные в ходе расчетов при помощи основного газодинамического солвера NOISEtte. Поэтому необходимо соблюсти для них единый формат входных и выходных данных. Для этого к NumBeamForm в виде библиотеки подключается часть программного комплекса NOISEtte, содержащая описание необходимых структур данных, таких как, например, класс сетки, сеточных данных, реализации массивов, а также методы вывода итоговых файлов, пригодных для визуализации.

Алгоритм численного бимформинга в программе реализован в параллельном виде. Он поддерживает многопоточные и многопроцессорные вычисления, а также расчеты на графических процессорах. Для этого NumBeamForm использует модули NOISEtte, отвечающие за инициализацию параллельных вычислений, и подключает их как библиотеки. Это, возможно, не единственный способ организовать вычисления, однако в рамках модуля NumBeamForm он оказывается самым прямым.

Модуль NumBeamForm включает две подпрограммы: предобработку данных и основную вычислительную часть. Предобработка охватывает операции подготовки, например, усреднение сигналов по временным окнам, прореживание микрофонной сетки и преобразования сеток. В данной работе эта часть не рассматривается. В основной вычислительной подпрограмме приводится описание, например, класса сетки источника и микрофонной решетки, солве-

ров систем линейных алгебраических уравнений, а также основного солвера бимформинга и структур, связанных с параллельными алгоритмами.

Значительная часть вычислений выполняется в комплексной арифметике. Комплексные числа реализованы с использованием класса, наследуемого от `std::complex<double>`. Для решения задач линейной алгебры применяется библиотека Eigen, из которой используются классы комплекснозначных матриц и векторов.

3.2 Алгоритм решения задачи численного бимформинга

3.2.1 Этап подготовки к вычислениям

В качестве ключевых входных структур данных используются классы сетки источника и микрофонной решётки.

Микрофонная решетка представляет собой совокупность микрофонных «слоев». Каждый слой задается пространственной сеткой, а также массивами сигналов во временной и частотной областях. Реализованная возможность использовать несколько микрофонных «слоев» связана с необходимостью тестирования работы алгоритма на составных сетках, определяемых несколькими наборами файлов. Также несколько «слоев» алгоритмически удобно использовать при проведении тестов с усреднением сигналов по ансамблям. Ключевыми методами класса микрофонной решетки являются метод чтения сигналов во временной области из набора выходных файлов NOISEtte и выполнение быстрого преобразования Фурье. Быстрое преобразование Фурье реализовано с использованием библиотеки FFTW.

Основную вычислительную нагрузку модуля бимформинга несет инициализация класса сетки источника, в ходе которой производится построение кусочно-линейных базисных функций, сопоставленных отдельным ячейкам сетки. Под ячейкой подразумевается совокупность треугольных элементов (или сегментов в случае линии источника), инцидентных некоторому узлу. Соответствующая кусочно-линейная базисная функция состоит из набора линейных функций, определенных на треугольниках (или сегментах), входящих в данную ячейку. Каждая такая линейная функция на треугольнике за-

даётся коэффициентами, которые находятся из решения системы линейных алгебраических уравнений: в вершине треугольника, совпадающей с центром ячейки, значение функции равно 1, а в остальных вершинах – 0. Построенные кусочно-линейные базисные функции далее используются при вычислении свертков с фундаментальным решением уравнения Гельмгольца (2.5).

3.2.2 Основные вычисления

Центральной ролью в модуле бимформинге играет вычислительный блок, в котором по формулам (3.1) вычисляются элементы матрицы переноса излучения. Далее алгоритм излагается только для источников монопольного типа и треугольных поверхностных сеток источника. Для сеток, заданных на линии, и источников дипольного типа схема вычисления матрицы переноса излучения строится аналогично.

Рассмотрим фиксированный индекс n , $n = 1, \dots, N$, – номер узла сетки источника. Пусть $\Delta_n = \bigcup_{j=1}^{K_n} \Delta_n^j$ – ячейка источника, представляющая собой объединение K_n треугольных элементов $\{\Delta_n^j\}_{j=1}^{K_n}$, инцидентных вершине с номером n . На ячейке Δ_n определяется кусочно-линейная базисная функция $\psi_n(\mathbf{y})$, линейные составляющие которой на j -м треугольнике Δ_n^j задаются как $\psi_n^j(\mathbf{y}) = \psi(\mathbf{y})|_{\Delta_n^j}$. Функция $G_M(\mathbf{x})$, как и ранее, – фундаментальное решение уравнения Гельмгольца, \mathbf{x}_m – координаты m -го микрофона.

$$(\mathcal{T}_a)_{mn} = \int_{\Delta_n} \psi_n(\mathbf{y}) G_M(\mathbf{x}_m - \mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}} = \sum_{j=1}^{K_n} \int_{\Delta_n^j} \psi_n^j(\mathbf{y}) G_M(\mathbf{x}_m - \mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}}. \quad (3.1)$$

Вычисления каждого элемента матрицы в реализованном алгоритме производятся при помощи кубатурных формул Гаусса на каждом треугольном элементе Δ_n^j , входящем в соответствующую ячейку источника. Алгоритм вычисления интеграла (3.1) имеет следующий вид.

1. Выбирается треугольный элемент Δ_n^j , фиксируется микрофон с номером m . Для элемента Δ_n^j записывается уравнение плоскости, в которой он расположен, в виде $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0$; определяются коэффициенты A, B, C, D . Далее, при описании алгоритма, не ограничивая общности, предполагаем, что $C \neq 0$.

2. Для проекции треугольника Δ_n^j на плоскость Ox_1x_2 строится матрица перехода P из системы координат мастер-элемента – треугольника с вершинами $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$. Пусть вершины проекции треугольника Δ_n^j имеют координаты (y_1^1, y_2^1) , (y_1^2, y_2^2) , (y_1^3, y_2^3) . Тогда

$$P = \begin{pmatrix} y_1^1 & y_1^2 & y_1^3 \\ y_2^1 & y_2^2 & y_2^3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Выполняется перебор всех узлов кубатуры Гаусса. Рассмотрим фиксированный узел с координатами (ξ_1, ξ_2) в системе координат, связанной с мастер-элементом. Тогда в исходной системе координат ему соответствуют координаты (y_1^G, y_2^G, y_3^G) , где y_1^G, y_2^G находятся из соотношения:

$$\begin{pmatrix} y_1^G \\ y_2^G \\ 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ 1 - \xi_1 - \xi_2 \end{pmatrix}.$$

Третья координата вычисляется из уравнения плоскости, содержащей треугольник Δ_n^j :

$$y_3^G = -(D + Ay_1^G + By_2^G)/C.$$

4. В результате для треугольника Δ_n^j получаем отображение узла кубатуры в исходную систему координат:

$$\mathbf{y}(\xi_1, \xi_2) = (y_1^G(\xi_1, \xi_2), y_2^G(\xi_1, \xi_2), y_3^G(\xi_1, \xi_2))^T,$$

и приближенное значение интеграла

$$I_{mn}^j = \sum_{(\xi_1, \xi_2)} \psi_n^j(\mathbf{y}(\xi_1, \xi_2)) G_M(\mathbf{x}_m - \mathbf{y}(\xi_1, \xi_2)) |J| a_r,$$

где $J = \det(P)$, $a_r = \sqrt{(A/C)^2 + (B/C)^2 + 1}$ – множитель, обеспечивающий переход от поверхностного интеграла 1-го рода к двойному, а (ξ_1, ξ_2) – узлы кубатуры Гаусса.

Путем последовательного перебора по микрофонам (индекс m) и ячейкам источника (индекс n) формируется матрица переноса излучения:

$$(\mathcal{T}_a)_{mn} = \sum_{j=1}^{K_n} I_{mn}^j, \quad m = 1, \dots, M, \quad n = 1, \dots, N.$$

Описанный алгоритм применим как для источников монопольного типа, так и для дипольного, поскольку в ходе его построения не фиксируется вид функции Грина. Также потенциально он допускает использование любых базисных функций, определяемых на треугольных элементах.

Для получения итогового вектора плотности простого слоя s далее требуется решить задачу минимизации (2.6), решение которой задается выражением (2.7).

Таким образом, после построения матрицы переноса излучения исходная задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. Для этого используется библиотека численных методов линейной алгебры Eigen. Однако в программном коде модуля NumBeamForm также реализован метод сопряженных градиентов для решения СЛАУ [40], который позволяет быстрее получать искомое решение при большом числе узлов сетки источника.

3.2.3 Вывод результатов

При выводе результатов требуется представить плотность простого (и двойного) слоя в величинах, удобных для интерпретации. Обычно при решении задачи натурального бимформинга в качестве итогового результата рассматривается оценка уровня звукового давления (SPL), выраженная в децибелах и рассчитанная на некотором референсном расстоянии от источника [12], [49]. Аналогичный способ представления результатов используется и в программном модуле NumBeamForm.

Для источника монопольного типа оценка SPL выполняется следующим образом. Итоговым результатом работы программы является комплексный вектор интенсивности источника $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_N)^T$, где компонент s_j относится к j -му узлу сетки источника с координатами \mathbf{u}_j . Далее для каждого узла вводится квадратная площадка Σ_j , причем длина ее стороны выбирается равной рассматриваемой длине волны, а центр этой площадки находится в

точке \mathbf{y}_j . Предполагается, что на этой площадке расположен распределенный источник, задаваемый функцией $Q(\mathbf{y}) = s_j \Psi_j(\mathbf{y})$, где $\Psi_j(\mathbf{y})$ представляет собой пирамидальную кусочно-линейную функцию. В центре Σ_j она принимает значение 1, а 0 – на границе $\partial\Sigma_j$.

Для выбранного узла j акустическое давление в точке наблюдения \mathbf{x} , находящейся на заданном референсном расстоянии от построенного источника, определяется выражением

$$P_j = \int_{\Sigma_j} Q(\mathbf{y}) G_M(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}}.$$

Этот интеграл имеет приближенную оценку:

$$P_j \approx \frac{1}{3} s_j G_M(\mathbf{x} - \mathbf{y}_j) |\Sigma_j|.$$

После нахождения P_j уровень звукового давления (SPL) в децибелах вычисляется по формуле

$$S_j = 20 \lg \frac{P_j P_{ref}}{P_0},$$

где P_{ref} – референсное давление (размерный множитель), $P_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ Па.

Отметим, что такая схема оценки SPL является упрощенной и не претендует на высокую точность. Однако для целей визуализации и анализа распределения относительной интенсивности источника, то есть для локализации областей с максимальными значениями, она оказывается достаточно удобной и практически применимой.

3.3 Итоговый алгоритм

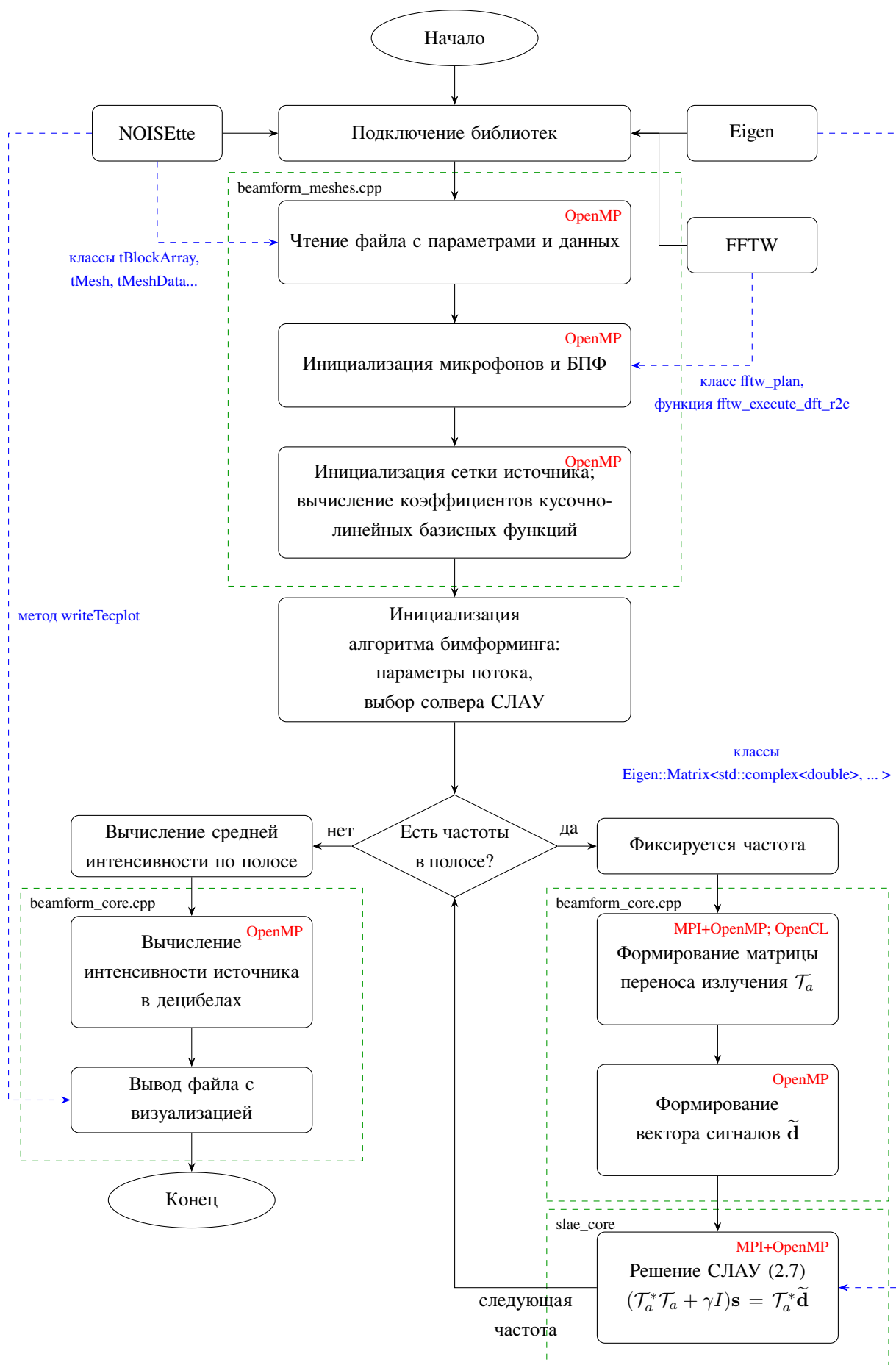
Таким образом, простейшая схема реализации алгоритма численного бимформинга может иметь вид:

1. Считывание файла параметров и исходных данных.
2. Инициализация микрофонной решетки и выполнение быстрого преобразования Фурье.
3. Инициализация сетки источника и вычисление коэффициентов кусочно-линейных базисных функций.

4. Настройка алгоритма бимформинга: задание параметров потока и выбор солвера СЛАУ.
5. Фиксация требуемой частоты.
6. Построение матрицы переноса излучения \mathcal{T}_a .
7. Формирование вектора сигналов $\tilde{\mathbf{d}}$.
8. Решение задачи (2.6) посредством решения СЛАУ (2.7).
9. Вычисление интенсивности источника в децибелах.
10. Запись выходного файла для визуализации результатов.

Отдельно стоит отметить изменения в алгоритме при проведении массового бимформинга для полосы частот. В этом случае расчеты производятся в цикле по дискретным частотам. Получаемые для каждой частоты данные накапливаются и усредняются. Таким образом, в приведенной выше схеме численного бимформинга в цикле выполняются пункты (5)–(8), а интенсивность источника в децибелах рассчитывается для усредненного решения.

Далее приводится схема основной вычислительной части программного модуля NumBeamForm.



3.4 Параллельная реализация

Основная вычислительная нагрузка возникает при вычислении матрицы переноса излучения (параграф 3.2.2). Однако для данной процедуры может быть приведен простой и эффективный параллельный алгоритм в силу наличия большого числа независимых обращений к памяти.

Самая простая многопоточная и многопроцессорная реализация алгоритма вычисления матрицы переноса излучения заключается в параллельном вычислении ее строк (или блоков строк). В многопоточном случае достаточно указания компилятору директивы `#pragma omp parallel for` перед циклом по строкам. Ускорение, характерное для многопоточного режима, приведено на рис. 3.1. В случае вычислений блоков строк на независимых процессорах необходимо заранее определить, какие из них и в каком порядке будут использоваться при дальнейших вычислениях, например, при транспонировании и умножении матриц, а также решения СЛАУ (2.7). Однако и в этом случае доступна схема обменов, позволяющая получить эффективную многопроцессорную реализацию.

При использовании реализованного в модуле метода сопряженных градиентов для решения СЛАУ хранение всей матрицы на каждом вычислительном узле не является необходимым. Все вычисления ведутся только с тем блоком матрицы, который изначально был получен. Метод сопряженных градиентов подразумевает многократное вычисление умножений матрицы на вектор. Умножение лишь блока матрицы позволяет получить блок результирующего вектора, обмен которыми происходит впоследствии при помощи средств MPI. В случае применения других солверов СЛАУ, подключаемых из библиотеки Eigen, необходимо уже произвести полный обмен строк матрицы при помощи команды `MPI_Allgatherv`.

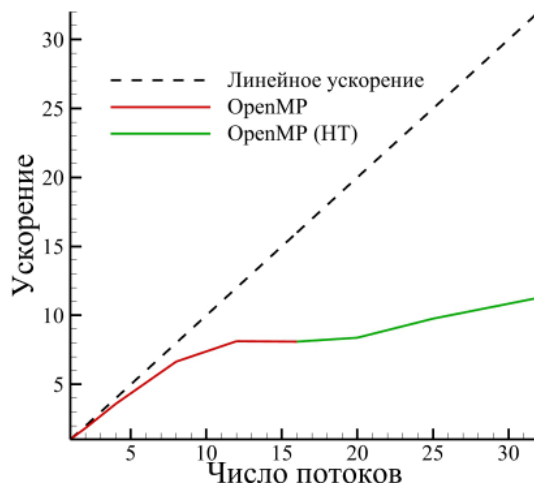


Рисунок 3.1. Зависимость ускорения от числа потоков в режиме OpenMP. Зеленая линия показывает ускорение при использовании технологии Hyper-Threading (HT)

Основные вычислительные затраты приходятся на вычисление интегралов по элементам сетки источника. Расчетные сетки источника, как правило, состоят из небольшого числа узлов в силу ограничений (2.13), (2.14), (2.15). Поэтому расчет и получение итогового результата для одной частоты не занимает много времени и может проводиться на персональном компьютере. Тем не менее, при проведении массового бимформинга для полосы, содержащей достаточно много дискретных частот, имеющегося ускорения может быть недостаточно. Поэтому алгоритм численного бимформинга, а именно вычисление матрицы переноса излучения, может быть перенесен на стандарт OpenCL для вычислений на графических процессорах (GPU) при помощи средств, реализованных в программном комплексе NOISEtte.

Для удовлетворения стандарту OpenCL необходимо изменить лишь некоторые структуры данных; сам алгоритм при переносе на GPU, в целом, остается без изменений. Из модификаций можно выделить только то, что распараллеливание производится еще и по столбцам матрицы.

Отдельного внимания заслуживает возможность реализации гетерогенного варианта получения матрицы переноса излучения. За счет структуры рассматриваемых расчетов удастся организовать вычисления таким образом, что блок матрицы, включающий достаточно большое число строк, вычисляется на GPU, тогда как оставшиеся строки обрабатываются на центральном процессоре. Для системы, состоящей из NVIDIA RTX 4070 Ti Super и AMD

Ryzen 9 9950X3D, ускорение такой реализации при использовании 32 потоков CPU по сравнению с вариантом, выполняемым только на ЦП (при том же числе потоков), составило 5.25: время выполнения всей программы уменьшилось с 274.0 секунд до 52.2 секунд. Измерения проводились при решении задачи массового дипольного бимформинга для сетки источника из 165 узлов и микрофонной решетки из 18020 микрофонов. При этом ускорение, достигаемое непосредственно на этапе вычисления матрицы переноса излучения, составило 6.2.

Заметим, что параллельная реализация данного алгоритма не позволяет в полной мере исследовать масштабируемость. Для фиксированной частоты максимальное количество узлов сетки источника ограничивается требованием корректности дискретной постановки. В то же время, несмотря на то, что максимальное число микрофонов никак формально не ограничено, может быть нецелесообразным использование слишком большого их числа. Достаточно лишь подобрать такое число микрофонов, чтобы дискретная задача была корректной. В результате в реальных расчетах число микрофонов может оставаться сравнительно небольшим, и исследование масштабируемости не будет отвечать потребностям реальных задач.

Глава 4. Численный бимформинг для задачи внешнего обтекания сегмента модельного прямого крыла самолета

4.1 Постановка задачи

4.1.1 Физический эксперимент

В качестве модельной задачи для дальнейшего сравнения получаемых численных бимформингом результатов с результатами натурального бимформинга была выбрана задача по моделированию турбулентного обтекания профиля прямого модельного крыла 30P30N с выпущенной механизацией на режиме посадки [50]. Данная задача практически досконально изучена в научных работах как экспериментально, так и численно (см., например, [51]). Профиль состоит из предкрылка, крыла и закрылка, установленных в соответствующем режиму посадки положениях. Длина хорды крыла в сложенном состоянии обозначена на рис. 4.1 как L_{ch} . Углы отклонения предкрылка δ_s и закрылка δ_f берутся равными 30° , а длины хорд предкрылка c_s и закрылка $c_f = 0.15L_{ch}$ и $0.3L_{ch}$, соответственно.

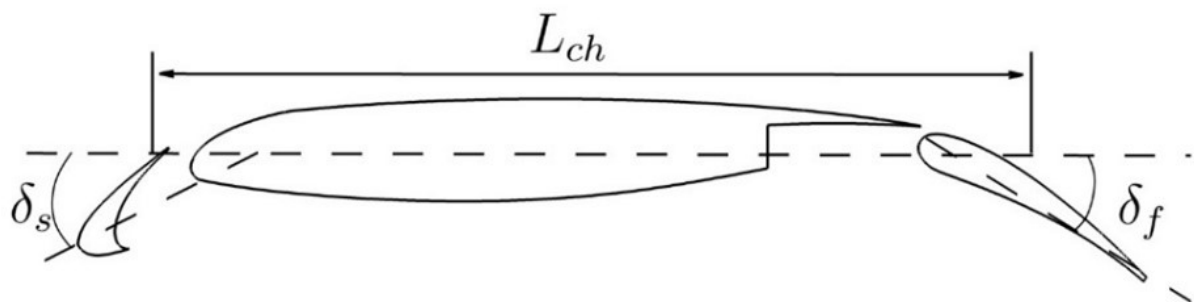


Рисунок 4.1. Конфигурация профиля 30P30N

В физическом эксперименте [17] конфигурация (рис. 4.1) рассматривается со значениями $L_{ch} = 300$ мм и шириной крыла 1036 мм. Продувка в аэродинамической трубе проводится под углом атаки $\alpha_g = 19.5^\circ$, а эффективный угол атаки оценивается как $\alpha_e = 5.5^\circ$. При этом используются

следующие референсные значения: скорость потока $U_\infty = 45$ м/с, число Рейнольдса $Re = 0.9 \cdot 10^6$, числа Маха $M_\infty = 0.10 \div 0.15$.

4.1.2 Традиционный бимформинг

В [17] содержатся результаты применения традиционного бимформинга для исследования акустических источников, возникающих при турбулентном обтекании крыла 30P30N с выпущенной механизацией. Во время эксперимента акустическое поле записывается на микрофонные решетки различных форм, расположенные за пределами зоны течения.

Область искомого акустического источника располагается в центральной плоскости трубы на равномерной прямоугольной сетке, в узлах которой определяются *некоррелированные* точечные излучатели. Переход звука из области источника в потоке в область покоя, где записывается шум, осуществляется путем введения поправок на конвективный перенос в предположении малости возможного отражения от слоя смешения. Полученные карты источника для двух различных третьоктавных полос частот при приведенных выше параметрах, изображены на рис. 4.2 [17]. Видно, что наиболее сильный шум на частотах 2 кГц и 4 кГц исходит из области предкрылка.

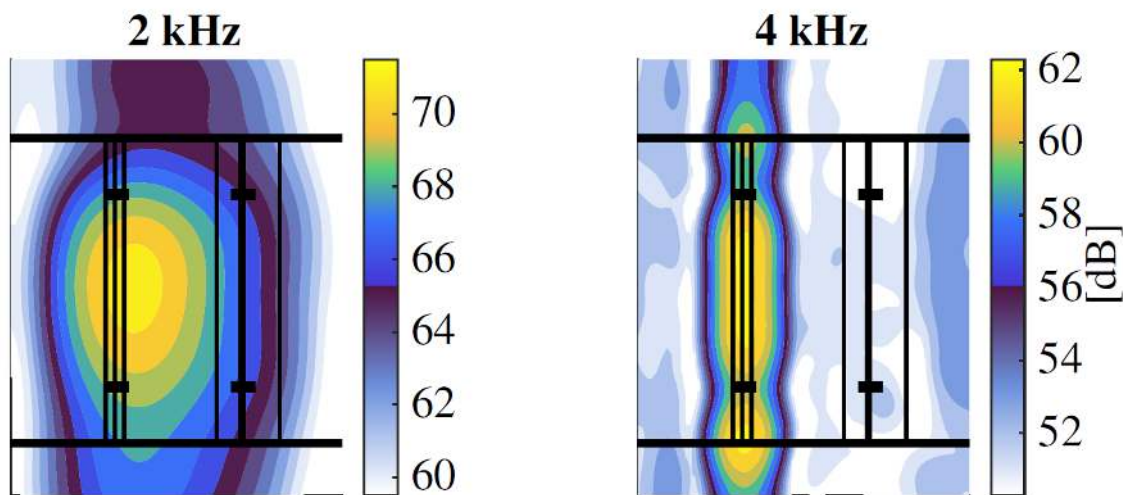


Рисунок 4.2. Карты источника для частот 2 кГц (слева) и 4 кГц (справа), полученные при помощи СВФ по данным физического эксперимента [17]

4.1.3 Вычислительный эксперимент

Численное моделирование задач с трехкомпонентным крыловым профилем 30P30N с выпущенной механизацией также выполнялось многими авторами. Особо отметим работу [51], где собраны и проанализированы численные результаты, полученные разными группами исследователей. Для исследования же возможностей разработанного метода численного бимформинга по идентификации различных типов акустических источников на основе данных вычислительных экспериментов, рассматриваются результаты турбулентного обтекания сегмента крыла 30P30N, представленные в [41].



Рисунок 4.3. Поле завихренности вблизи сегмента крыла 30P30N. Изоповерхности Q -критерия, соответствующие значению 100, приведены в градациях серого по модулю скорости

Для проведения суперкомпьютерных расчетов в [41] рассматривается сегмент крыла размахом $L_{ch}/9$ (см. рис. 4.1). Расчетная область с граничными условиями периодичности на краях сегмента (по оси z на рис. 4.3) заполняется неструктурированной смешанно-элементной сеткой размерностью 11.4 млн узлов со слоями призматических элементов вблизи поверхности обтекаемого крыла. Моделирование проводится с использованием гибридного RANS-LES подхода IDDES [52] и EBR (Edge-Based Reconstruction) схемы повышенной точности [53], реализованных в программном комплексе NOISEtte [35]. Полученные в ходе вычислительного эксперимента мгновенные поля завихренности и производной давления по времени показаны на рис. 4.3 и рис. 4.4 соответственно. На рис. 4.4 отчетливо видны места расположения искомым акустических источников. Это зоны между предкрылком и крылом, крылом и закрылком, а также в районе задней кромки закрылка. При этом первый из этих источников, а именно, источник между предкрылком и крылом, является самым мощным.

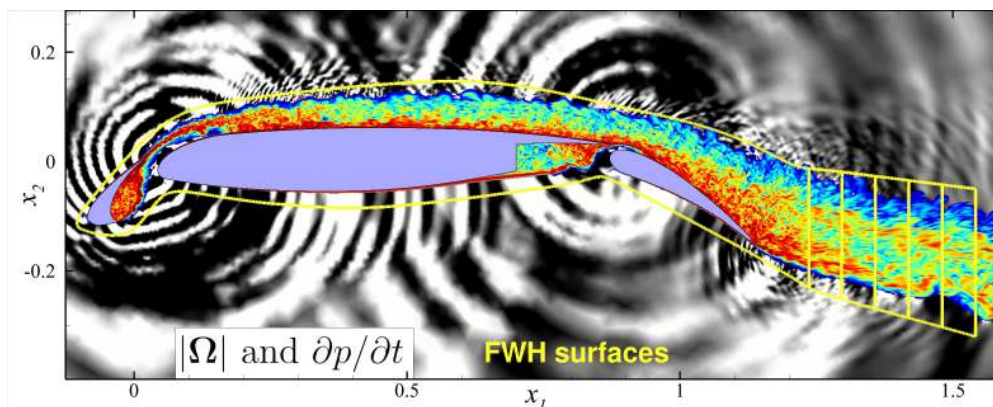


Рисунок 4.4. Мгновенное поле течения для задачи обтекания профиля крыла 30P30N. Производная давления

Акустическое излучение в дальнем поле моделируется с помощью интегрального метода Фокса Уильямса – Хокинга (FWH) [46] на основе накопленных нестационарных данных на окружающей сегмент крыла контрольной поверхности FWH.

4.1.4 Сопоставление результатов численного и физического экспериментов

На рис. 4.5 иллюстрируется сравнение экспериментальных [50] и расчетных [41] данных по коэффициенту давления. Отметим, что почти всюду на поверхности крылового профиля разница по значениям C_p между физическим и вычислительным экспериментами не превышает 0.2.

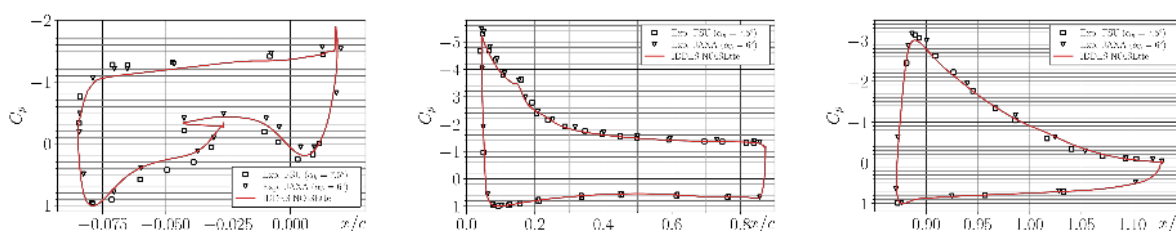


Рисунок 4.5. Распределение по поверхности коэффициента давления, полученные в физическом и вычислительном экспериментах (слева – предкрылок, в центре – крыловой профиль, справа – закрылок)

Представленные в [41] и на рис. 4.6 результаты по амплитудно-частотным характеристикам ближнего акустического поля также хорошо соответствуют экспериментальным данным [50]. При этом в спектрах пульсаций давления явно просматриваются тональные компоненты при числах Струхала $St = \frac{fL_{ch}}{U_\infty} \approx 11, 16, 22, 27$.

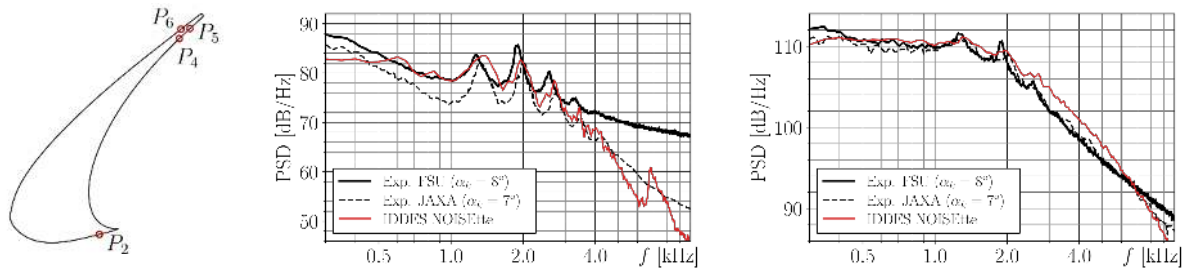


Рисунок 4.6. Power Spectral Density (PSD) в точках ближнего поля P2 (центральный рисунок) и P4 (рисунок справа), расположенных на предкрылке (рисунок слева)

4.2 Выбор конфигурации для бимформинга

В качестве области источника S выбирается поверхность, состоящая из трех сочлененных плоских участков (рис. 4.7), каждый из которых соответствует элементу профиля. Такой выбор поверхности является корректным, поскольку все исследуемые далее длины волн превышают характерную толщину (по направлению x_2) крыла, что обуславливает невозможность расположения по этому направлению более 1 источника. По направлению x_3 ставятся периодические граничные условия, поскольку необходимо соблюсти согласованность с граничными условиями CFD-расчета.

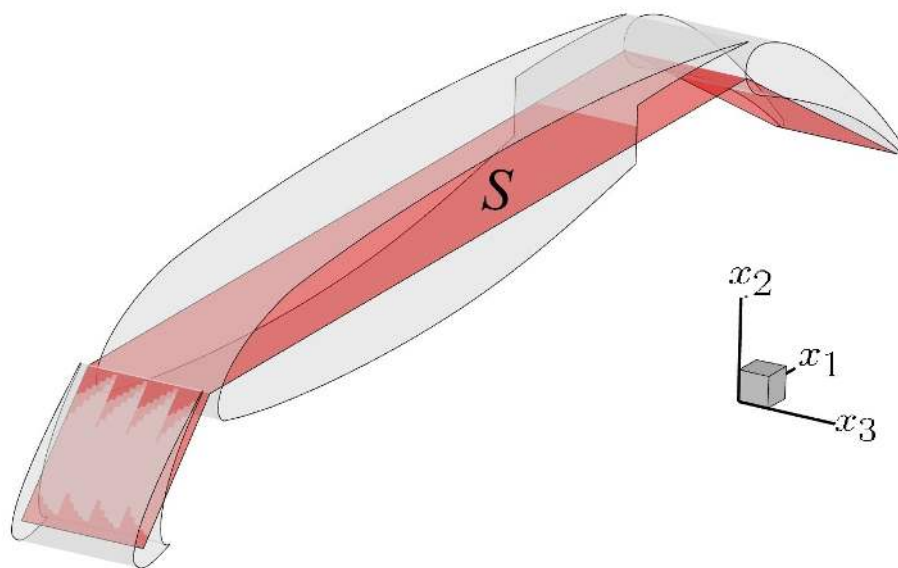


Рисунок 4.7. Область источника, выбранная для решения задачи бимформинга для профиля крыла 30P30N

Для расположения микрофонов выбирается эллиптический в плане цилиндр с осью x_3 . Для данного цилиндра можно рассмотреть две конфигурации микрофонной решетки: микрофоны могут располагаться на всей поверхности цилиндра или только нижней его части, расположенной под профилем. Нижняя часть цилиндра интересна тем, что по записанным сигналам на расположенных там микрофонах можно восстановить только акустический источник, излучающий звук в сторону земли. Источник, расположенный над профилем, в силу экранирования крылом по практическим соображениям может не представлять сильного интереса. Однако проведенные тесты (будут рассматриваться далее) показывают, что при наличии дипольных источников для устойчивого решения задачи при исследовании низких частот, требуется рассматривать всю поверхность цилиндра.

В силу того, что все исследуемые далее безразмерные частоты принимают значения $St < 35$, а соответствующие длины волн $\lambda > 0.168$ превышают поперечный размер 0.111, то, согласно ограничениям (2.13), (2.14), (2.15), в поперечном направлении сегмента крыла может быть размещен только один источник. Таким образом, задача бимформинга сводится к исследованию двумерного крыла бесконечного размаха. Функции источника же зависят только

от координат (x_1, x_2) , а поперечная компонента дипольного момента, отвечающая координате x_3 , отсутствует. Поверхность микрофонов тогда также приводится к линии в виде эллипса или его нижней части (рис. 4.8). Такую двумерную постановку можно решать либо путем замены фундаментального решения трехмерного уравнения Гельмгольца на решение двумерного, что равносильно бесконечному продолжению крыла в постановке в трехмерном пространстве по поперечному направлению x_3 с суммированием в матрице переноса излучения вкладов периодических источников. В дальнейшем приводятся результаты для последнего подхода.

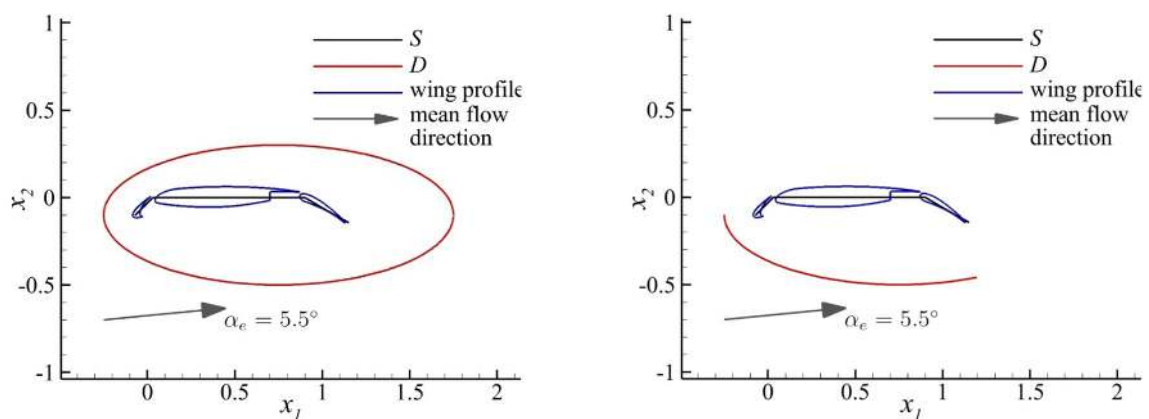


Рисунок 4.8. Геометрическая конфигурация линии источника и микрофонов. Конфигурация «микрофоны по всему контуру» (слева) и «нижние микрофоны» (справа)

4.2.1 Описание тестовых задач на устойчивость метода для конфигураций сегмента прямого крыла

Целью при проведении рассмотренных ниже тестов является выявление конфигураций, позволяющих получить высокоточное устойчивое решение без использования регуляризации. Краткое описание тестов и полученных результатов приводится в работе [54].

Все тесты рассматриваются для случая, когда источник и микрофоны расположены на линиях в трехмерном пространстве, см. параграф 4.2. Будем рассматривать две конфигурации микрофонов: микрофоны, расположенные по всему контуру эллипса («микрофоны по всему контуру», их количество $M = 550$), рис. 4.8 (слева), и расположенные на нижней части эллипса («нижние микрофоны», $M = 179$), рис. 4.8 (справа). Геометрия линии источника S

введена в параграфе 4.2, а практически равномерная сетка источника для всех последующих тестов содержит 10 узлов.

Синтетические тесты проводятся следующим образом. На сетке источника S случайным образом задается референсное решение s_{ref} : значение функции источника, соответствующей этому вектору, в каждом узле сетки является нормально распределенным случайным числом с математическим ожиданием 0.5 и среднеквадратичным отклонением 0.3. Данные на микрофонах получены воздействием на референсное решение оператором переноса излучения \mathcal{T}_a и добавлением 5% зашумления:

$$\tilde{\mathbf{d}} = \mathcal{T}_a s_{ref} + 0.05 \|\mathcal{T}_a s_{ref}\| \mathbf{Rand},$$

где \mathbf{Rand} – нормированный вектор той же размерности, что и $\mathcal{T}_a s_{ref}$, а вещественные и мнимые части его компонент задаются случайно в соответствии с равномерным распределением.

Для контроля устойчивости решения отслеживаются три величины:

- C_a – число обусловленности матрицы $\mathcal{T}_a^* \mathcal{T}_a$
- $\delta = \frac{\|\mathcal{T}_a \mathbf{s} - \tilde{\mathbf{d}}\|_2}{\|\tilde{\mathbf{d}}\|_2}$, где \mathbf{s} – найденное решение, – относительная невязка решения на микрофонах в норме l_2
- $\varepsilon = \frac{\|\mathbf{s} - s_{ref}\|}{\|s_{ref}\|}$ – относительная погрешность решения для функции источника: ε_∞ , ε_2 в нормах l_∞ и l_2 , соответственно.

4.2.2 Тесты на устойчивость для источника монополярного типа

При решении задачи бимформинга на синтетических данных для идентификации источника монополярного типа в конфигурации «микрофоны по всему контуру» были получены следующие значения контрольных величин:

$$C_a = 4.0, \delta = 0.092, \varepsilon_\infty = 0.010, \varepsilon_2 = 0.012,$$

а для конфигурации «нижние микрофоны»:

$$C_a = 6.5, \delta = 0.081, \varepsilon_\infty = 0.014, \varepsilon_2 = 0.014.$$

На рис. 4.9 (слева) изображено случайно заданное референсное и приближенное решения при использовании «нижних микрофонов». На рис. 4.9 (справа) представлены сигналы на нижних микрофонах, точные $T_a s_{ref}$ и найденные $T_a s$. В совокупности с контрольными значениями относительных норм невязки и погрешности можно сделать вывод об устойчивости решения в данной конфигурации. Для конфигурации «микрофоны по всему контуру» ситуация полностью аналогична и на рисунках не приводится. В силу наличия практического интереса в использовании «нижних микрофонов», при решении задачи с данными из вычислительного эксперимента для источника монопольного типа предпочтительно использование именно этой конфигурации.

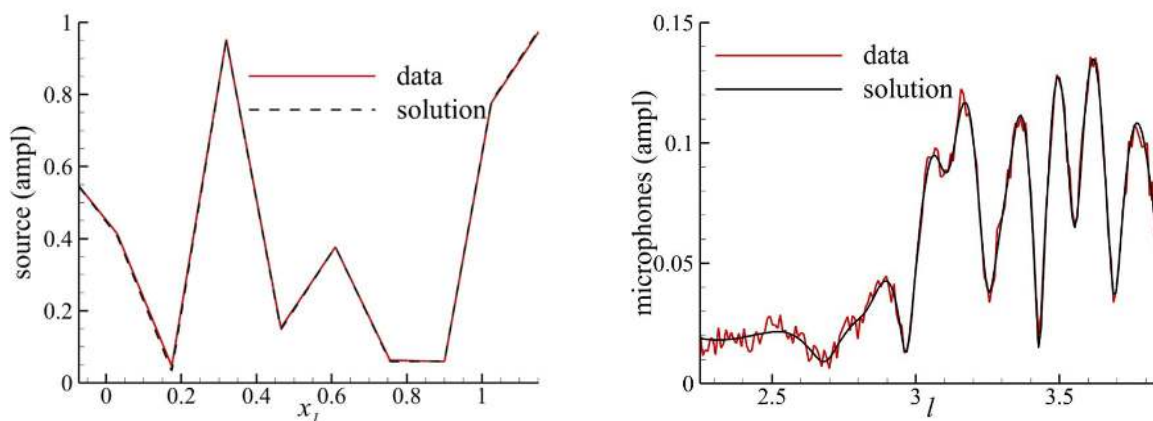


Рисунок 4.9. Результаты синтетических тестов для монопольного типа источника в конфигурации «нижние микрофоны». Точное (data) и приближенное (solution) решение (слева), данные на микрофонах (точные и найденные) (справа)

4.2.3 Тесты на устойчивость для источника дипольного типа

Под источником дипольного типа, рассматриваемого в следующих тестах, подразумевается дипольный источник с неизвестными горизонтальной и вертикальной компонентами дипольного момента. Данная постановка соответствует задаче по нахождению компонент дипольного момента, рассматриваемой в параграфах 2.3.2, 2.4.3, в рамках которой требуется найти одну касательную и нормальную компоненту момента дипольного источника, отыскиваемого на поверхности. Несмотря на эти различия, распределенный источник дипольного типа на линии так же представляет из себя сумму про-

стого и двойного слоя. Это, в свою очередь, является определяющим фактором возникновения описываемых в данной работе особенностей источника такого типа.

Использование конфигурации «микрофоны по всему контуру» приводят к получению устойчивого ответа. Контрольные показатели принимают значения:

$$C_a = 132, \delta = 0.1, \varepsilon_\infty = 0.077, \varepsilon_2 = 0.055.$$

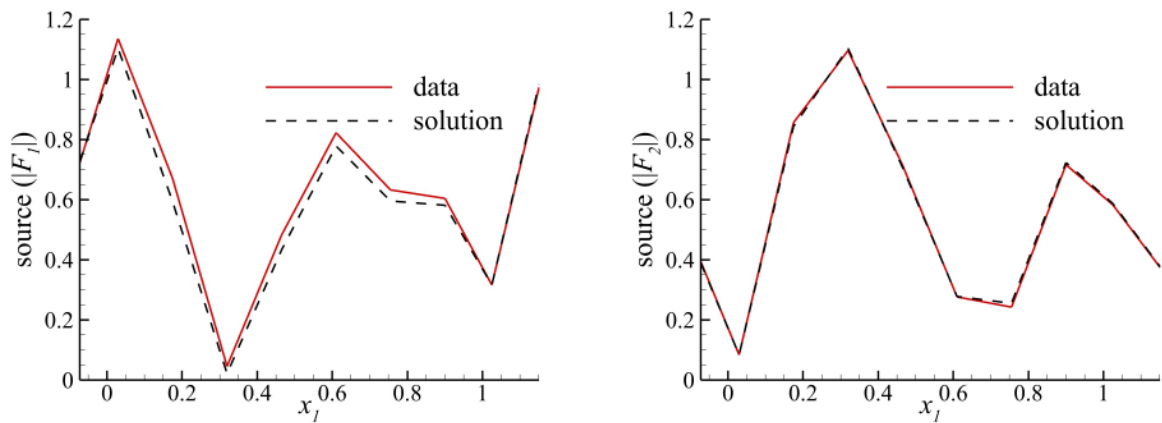


Рисунок 4.10. Функция дипольного источника в случае неизвестного направления дипольного момента, «микрофоны по всему контуру». Горизонтальная (слева) и вертикальная (справа) составляющая

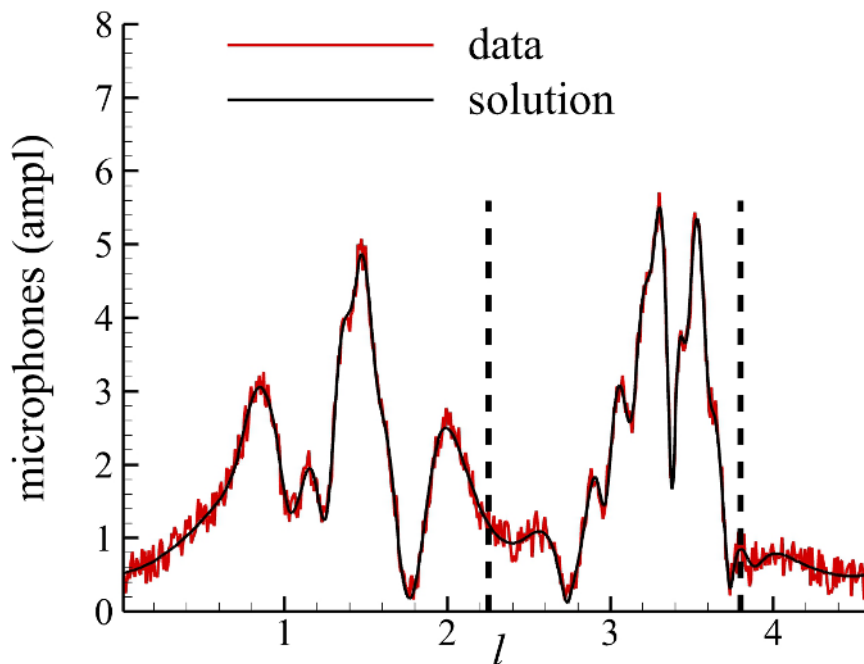


Рисунок 4.11. Сигналы на микрофонах (точные и найденные), дипольный источник с неизвестным направлением дипольного момента, «микрофоны по всему контуру»

На рис. 4.10 продемонстрирована высокая точность решения для дипольного источника, полученного по синтетическим данным, а на рис. 4.11 показано хорошее воспроизведение сигналов. На рис. 4.11 отмечен интервал длины дуги эллипса, соответствующего «нижним микрофонам»: $2.25 < l < 3.8$.

Тем временем, конфигурация «нижние микрофоны» для данного типа источника приводит к неустойчивости, при этом число обусловленности $C_a = 10^{11}$, и отсутствию близкого воспроизведения референсного решения.

4.2.4 Тесты на устойчивость для источника смешанного типа

Согласно приведенному в параграфе 1.2.2 рассуждению о представлении дипольного источника в виде суммы простого и двойного слоя, также рассматриваются тесты для источника, заданного в виде суммы монополярной составляющей и нормальной к линии источника компоненты дипольного момента.

Ожидаемо, результаты синтетических тестов для этого случая аналогичны случаю диполя с неизвестным направлением дипольного момента. Функция

источника (рис. 4.12) и сигналы (рис. 4.13) хорошо воспроизводятся при использовании конфигурации «микрофоны по всему контуру»:

$$C_a = 2660, \delta = 0.11, \varepsilon_\infty = 0.039, \varepsilon_2 = 0.048,$$

в то время, как для конфигурации «нижние микрофоны» наблюдается неустойчивость:

$$C_a = 10^{13}, \delta = 0.087, \varepsilon_\infty = 1517, \varepsilon_2 = 1781.$$

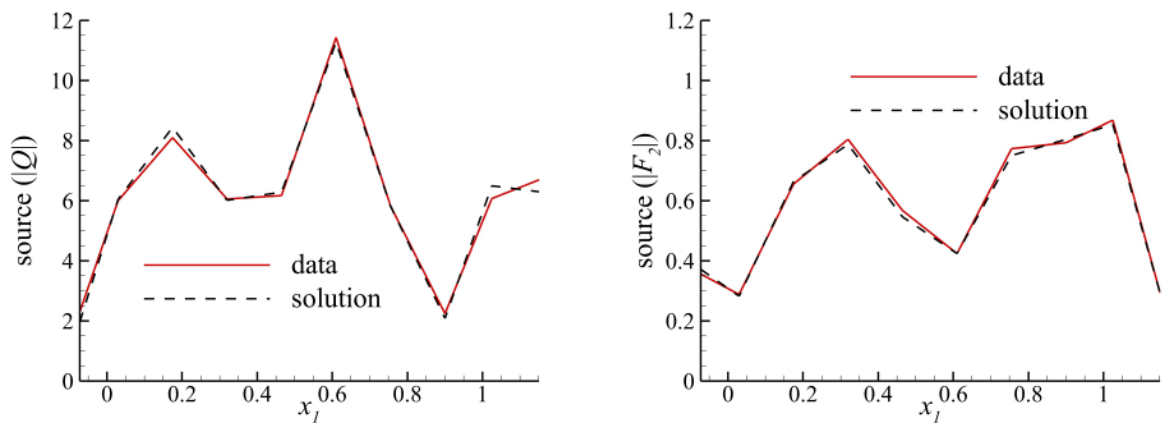


Рисунок 4.12. Решения (точные и найденные) для монопольной (слева) и вертикальной дипольной компоненты (справа), «микрофоны по всему контуру»

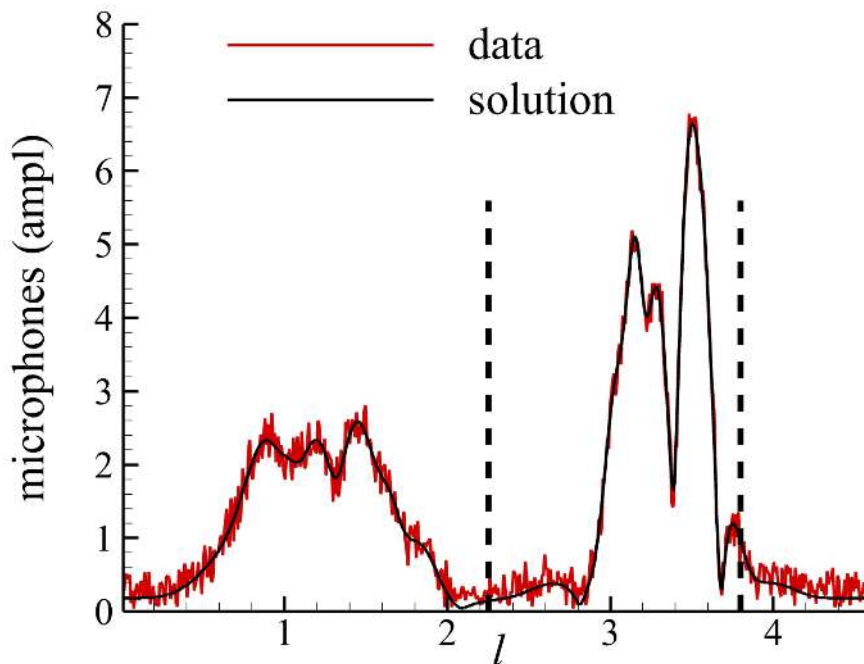


Рисунок 4.13. Данные на микрофонах, референсные и восстановленные, «микрофоны по всему контуру»

Замечание о необходимости окружать источник микрофонами. В качестве результата данного этапа исследований можно выделить обнаружение следующей закономерности. В случае, когда акустический источник представляет из себя только лишь простой слой, то для устойчивой его идентификации достаточно микрофонов, расположенных снизу. В случае же, когда источник представим в форме суммы и простого, и двойного слоя, микрофонов, расположенных снизу, недостаточно, и требуется полное окружение ими области источника.

Приведем здесь возможное объяснение этого явления. Излучение от простого и двойного слоя в сумме дает одно известное и записанное на нижний микрофон комплексное значение давления, которого, при отсутствии дополнительной информации, не хватает для восстановления двух составляющих этот источник компонент. В случае наличия же микрофона над крылом, на нем записано еще одно комплексное значение давления, причем вклад от простого слоя на нижнем и верхнем микрофонах является синфазным, а от двойного – противофазным. Тогда этих двух известных значений на микрофонах, в свою очередь, уже может быть достаточно, чтобы разрешить и простой, и двойной слой, отделив монополярный источник от дипольного.

При этом в общем случае отыскания плотностей и простого, и двойного слоя таких рассуждений может быть недостаточно и данных может не хватать для получения единственного решения, задача может быть недоопределена. Поэтому перед решением численным бимформингом прикладной задачи необходимо проводить аналогичные описанным выше тесты на единственность и устойчивость решения для выбранных геометрических конфигураций. В случае, когда тесты пройдены успешно, можно применять выбранную геометрическую конфигурацию на практике.

4.3 Результаты численного бимформинга

В данном параграфе приводятся и анализируются результаты решения задач численного бимформинга в применении к данным вычислительного эксперимента по обтеканию модельного прямого крыла 30P30N с выпущенной механизацией на режиме посадки, описанного в параграфе 4.1.3. Кратко эти результаты приведены в [54]. Все основные результаты рассматриваются для безразмерной частоты $St = 26.7$, соответствующей примерно 4000 Гц в эксперименте [17], выбор которой отчасти обусловлен соответствием данной частоты одному из пиков на графике амплитудно-частотной характеристики монопольного источника (будет приводиться в параграфе 4.3.2). Как и ранее, рассматривается случай расположения источника и микрофонов на линиях, и идентификация источника на сегменте крыла сводится к его поиску вдоль профиля. В качестве рассматриваемых далее постановок задач бимформинга выбираются те из них, которые обладают свойствами единственности и устойчивости решения, и, как следствие, позволяющие на синтетических данных получить решение с хорошей точностью. Это постановки для

- Монопольного источника в конфигурации «нижние микрофоны».
- Дипольного источника с вертикальной и горизонтальной компонентой момента в конфигурации «микрофоны по всему контуру».
- Смешанный тип источника с монополем и нормальной компонентой диполя в конфигурации «микрофоны по всему контуру».

Сигналы на линии микрофонов D (рис. 4.8) получены при помощи применения интегрального метода Фокса Уилльямса – Хокинга [46] на основе

данных, накопленных на окружающей профиль поверхности, и последующей обработки, см. [55].

Для повышения устойчивости получаемых бимформингом результатов к данным на микрофонах применяется статистическая обработка. Алгоритм, применяемый к сигналу на каждом микрофоне, состоит в следующем. Во временной области случайным образом выбирается начальная точка выборки. Эта начальная точка определяет свой «сценарий». В данной работе при обработке данных используется 100 сценариев. Для каждого сценария выборка делится на несколько частей одинаковой длины. Эти части усредняются, и формируется новый сигнал, который впоследствии также усредняется по сценариям. К полученному усредненному сигналу применяется быстрое преобразование Фурье. Эти данные подаются на вход алгоритму бимформинга.

4.3.1 Источник монопольного типа

Для исследования акустического источника монопольного типа на профиле крыла 30P30N используется конфигурация «нижние микрофоны». На рис. 4.14 приведены графики амплитуд сигналов: исходных \tilde{d} и найденных путем действия оператора переноса излучения \mathcal{T}_a на вычисленное решение задачи s , вдоль линии микрофонов D .

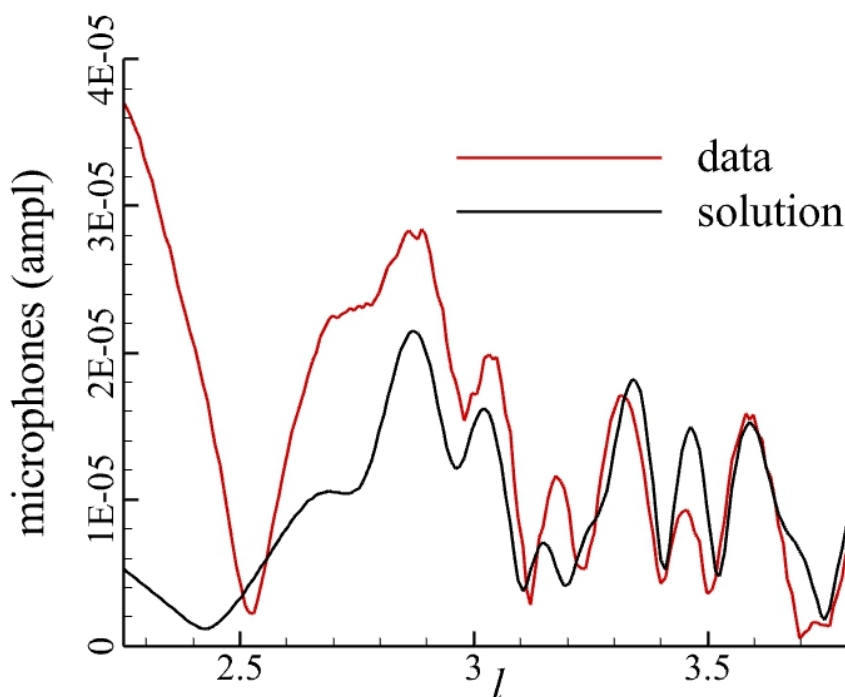


Рисунок 4.14. Сигналы на микрофонах, исходные (data) и найденные (solution)

Величина относительной невязки $\delta = 0.78$. На рис. 4.14 можно заметить, что есть сильное рассогласование найденного сигнала с исходными данными на микрофонах, расположенных вблизи предкрылка ($2.25 < l < 2.8$). Это может означать, что размещения на предкрылке источника монопольного типа недостаточно, и, по-видимому, необходимо помещать туда источник типа дипольного. Вблизи основного крыла и закрылка сигналы более согласованы: источник монопольного типа, там размещенный, по этим данным вполне может приблизить источник реальный.

На рис. 4.15 приведена вычисленная интенсивность акустического источника монопольного типа, преобразованная в уровни звукового давления (SPL). Получение величины SPL, соответствующего выбранному узлу сетки, производилось путем помещения в этот узел уединенного распределенного источника с интенсивностью, определяемой найденным решением, и последующего вычисления акустического давления, создаваемого этим источником на расстоянии $1/\sqrt{4\pi}$ м [12] снизу от него. На рис. 4.15 (слева) изображено распределение интенсивности вдоль профиля. На рис. 4.15 (справа) в области «Численный БФ» приведено распределение той же интенсивности, но для наглядности визуализации постоянным образом продолженное вдоль поперечного направления сегмента крыла. Здесь приводится сравнение этого распределения с результатами натурального бимформинга, полученными при проведении эксперимента в аэродинамической трубе [17] для частоты 4000 Гц (область «Натурный БФ»). Несмотря на различия в способах получения данных об акустическом поле и различия в самих подходах бимформинга, результаты демонстрируют хорошую согласованность. Основной пик интенсивности в обоих решениях локализован в области предкрылка. Однако в области закрылка в решении численного бимформинга наблюдаются дополнительные пики.

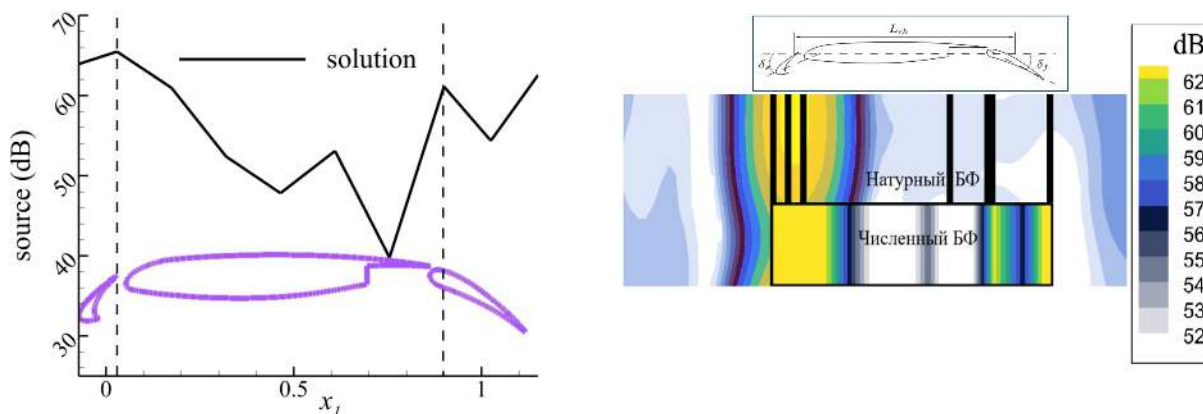


Рисунок 4.15. Функция источника, полученная численным бимформингом. Распределение функции вдоль профиля (слева) и сравнение результатов численного бимформинга и натурального бимформинга [17] (справа)

4.3.2 Построение амплитудно-частотной характеристики акустического источника монопольного типа.

Массовый бимформинг для диапазона частот

Отдельным вопросом может стоять корректность получаемых при помощи численного бимформинга результатов для каких-либо диапазонов частот. В работе [55] рассматривается возможность использования вычисленных при помощи акустической аналогии Фокса Уильямса – Хокинга сигналов в качестве входных данных на микрофонах с последующей проверкой результата путем построения амплитудно-частотной характеристики источника.

В данном параграфе используется геометрическая конфигурация (рис. 4.16), несколько отличающаяся от той, что рассматривалась до этого. В качестве микрофонной линии D выбрана нижняя половина того же эллипса, что и ранее, а в качестве линии источника S – прямая под основным профилем.

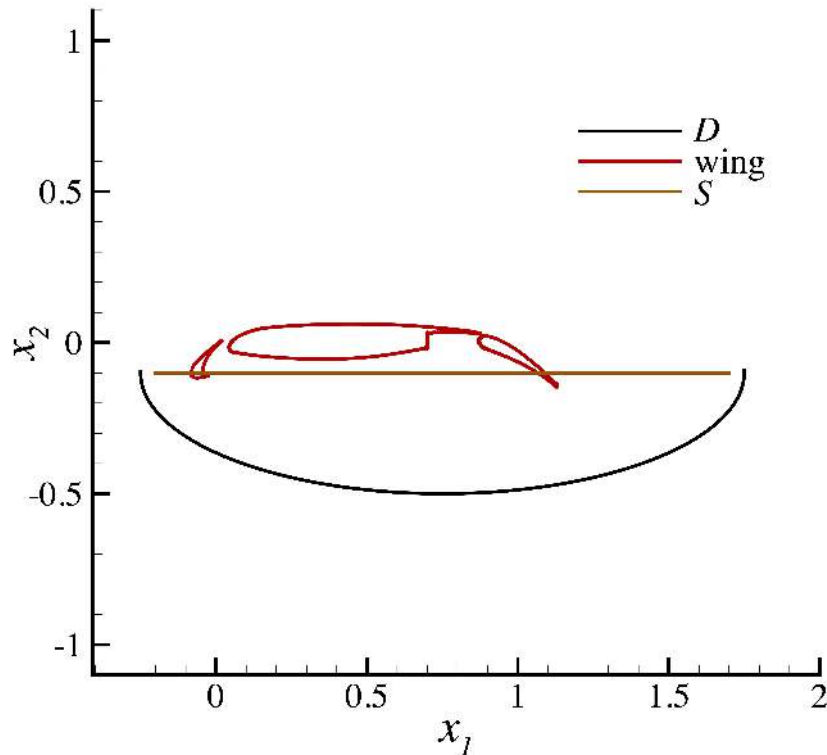


Рисунок 4.16. Геометрическая конфигурация для построения АЧХ

Для построения амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) проводится массовый бимформинг для диапазона безразмерных частот $7 < St < 35$. Массовый бимформинг состоит в следующем. Данный диапазон разбивается на непересекающиеся 1/12-октавные полосы. Для каждой такой полосы перебираются входящие в нее частоты, для которых проводится монополюсный численный бимформинг, после чего результаты усредняются, и полученное среднее соотносится с центральной частотой полосы. Максимальная по пространству амплитуда интенсивности такого усредненного источника задает значение АЧХ для рассматриваемой 1/12-октавной полосы. На рис. 4.17 приведен график построенной таким образом АЧХ.

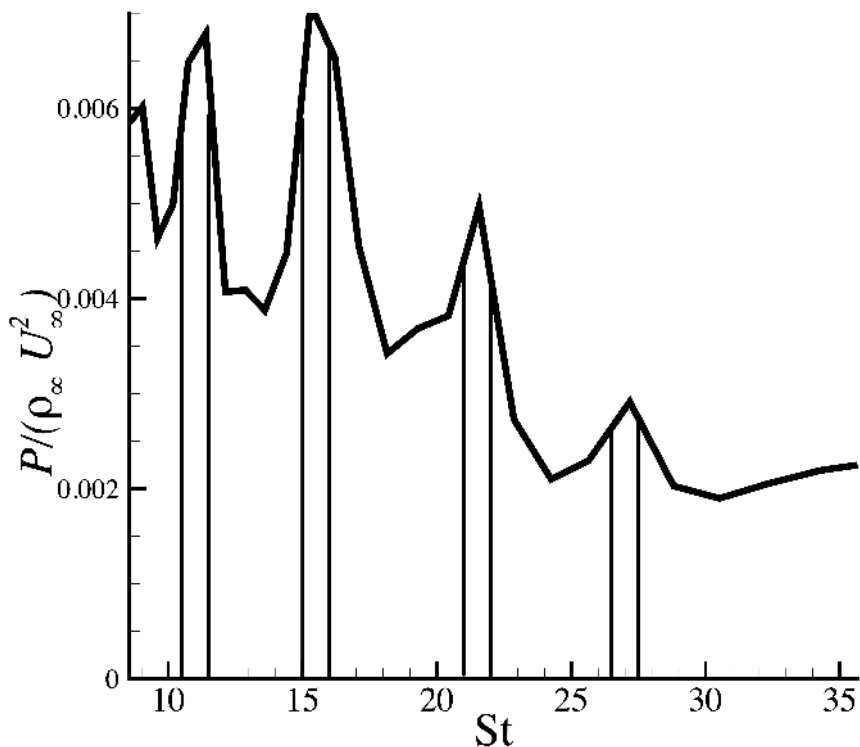


Рисунок 4.17. Амплитудно-частотная характеристика монопольного источника, локализованного на крыле 30P30N

График АЧХ имеет качественное сходство с графиками спектров пульсации давления в точках ближнего поля, рис. 4.6, в виде наличия пиков, соответствующих приблизительно тем же частотам $St \approx 11, 15.5, 21.5, 27$.

4.3.3 Источник дипольного типа с вертикальной и горизонтальной компонентами момента

Для постановки задачи для источника дипольного типа с вертикальной и горизонтальной компонентами момента используется конфигурация «микрофоны по всему контуру». Относительная невязка решения для сигналов на микрофонах составляет $\delta = 0.62$. На рис. 4.18 аналогично монопольному случаю приведены графики амплитуд сигналов (исходных и найденных из решения) вдоль линии микрофонов. Можно заметить, что основной поток звуковой энергии направлен вверх из района предкрылка ($1.2 < l < 2$). При этом, сигналы на нижней части эллипса («нижних микрофонах», $2.2 < l < 3.8$) согласуются хуже.

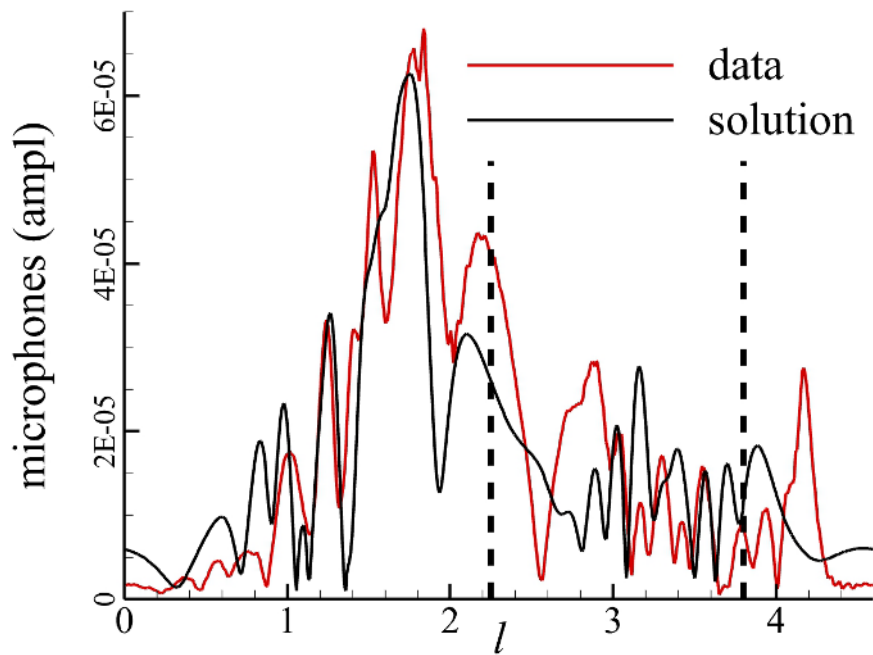


Рисунок 4.18. Данные на микрофонах: исходные (data) и найденные из решения (solution). Дипольный источник, «микрофоны по всему контуру»

На рис. 4.19 изображены отдельно амплитуды сигналов на нижних микрофонах от полученных функций источников для вертикальной и горизонтальной компонент. Видно, что их вклад сопоставим.

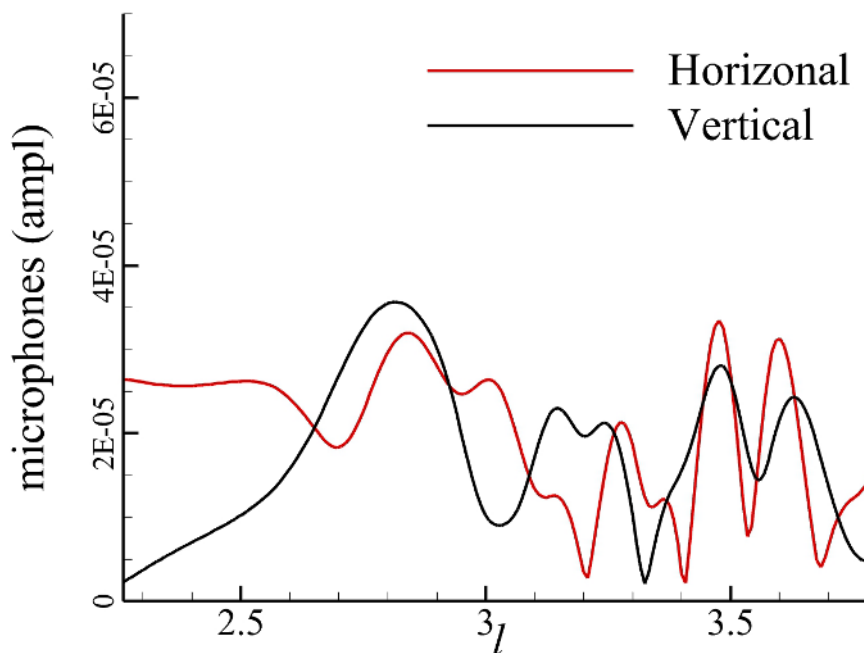


Рисунок 4.19. Сигналы на нижних микрофонах от горизонтальной и вертикальной компонент момента

На рис. 4.20 (слева) приведены функции источника для вертикальной и горизонтальной компоненты. Основные пики интенсивности локализуются в районе предкрылка и закрылка, но, в отличие от монопольного случая в конфигурации «нижние микрофоны», со сдвигом в сторону крыла. Это может обуславливаться тем, что мог быть разрешен источник, преимущественно локализованный на верхней поверхности крыла и излучающий вверх: сигналы на верхней части эллипса согласуются лучше. На рис. 4.20 (справа) приведены векторы дипольного момента в условном масштабе. Сомнения может вызывать идентификация ориентированного горизонтально источника на самом крыле. Однако заметим, что такие источники отвечают простому слою, как и источники монопольного типа. Последние, в свою очередь, показывают хорошее согласование на микрофонах вблизи основного крыла.

Более высокая интенсивность функции источника для горизонтальной компоненты обусловлена неоднородностью диаграммы направленности дипольного момента. Именно такая разница в интенсивностях позволяет получить сопоставимый вклад горизонтальной и вертикальной компонент дипольного момента в шум в области под профилем крыла.

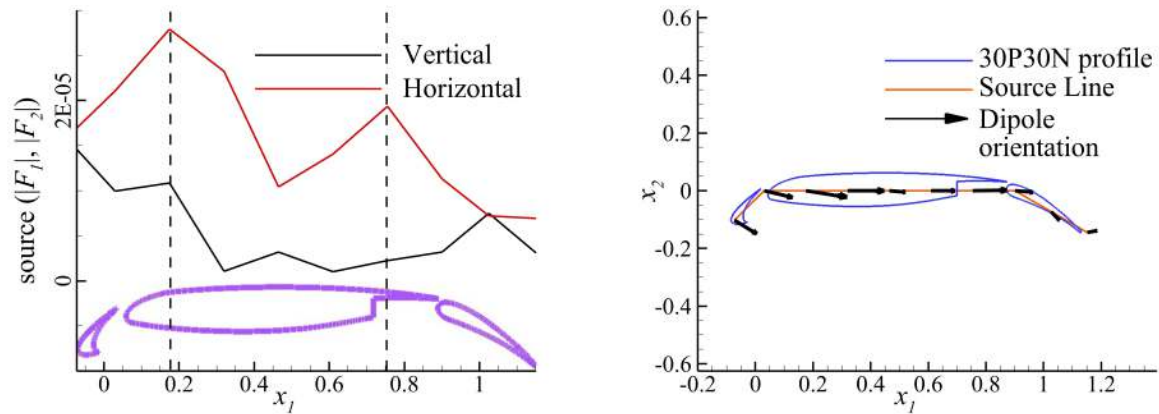


Рисунок 4.20. Полученные интенсивности вертикальной и горизонтальной компонент (слева) и векторы дипольного момента (справа)

4.3.4 Источник смешанного типа, сумма монополя и нормальной компоненты диполя

Аналогично случаю с источником дипольного типа с неизвестными горизонтальной и вертикальной компонентами момента, при рассмотрении постановки со смешанным источником также используется конфигурация «микрофоны по всему контуру». На рис. 4.21 приведены графики амплитуд сигналов, исходных и сформированных найденным решением, вдоль линии микрофонов D . В данном случае можно отметить несколько улучшенное воспроизведение сигналов на нижних микрофонах вблизи основного крыла и закрылка ($2.6 < l < 3.8$), чем в случае чисто дипольного источника. При этом относительная невязка равна $\delta = 0.52$, что ниже таковой для диполя. Такой эффект имеет место в силу следующих обстоятельств. Задача для смешанного источника в данной работе возникает вследствие перехода от члена вида $\text{div}(\mathbf{F}\delta_S)$ в правой части уравнения Гельмгольца (1.7), где \mathbf{F} – вектор дипольного момента, δ_S – дельта-функция поверхности источника, к сумме простого и двойного слоя, Глава 1. Обратный же переход не всегда верен: задача для смешанного источника является более общей, она может содержать реальную монополярную составляющую в простом слое и не сводиться к случаю чисто дипольного источника, что означает возможное различие в операторах переноса излучения. То есть задача по нахождению горизонтальной и вертикальной компонент дипольного момента может рассматриваться как частный случай смешанной постановки. Это обуславливает схожесть особенностей и

возможное наличие различий в получаемых решениях.

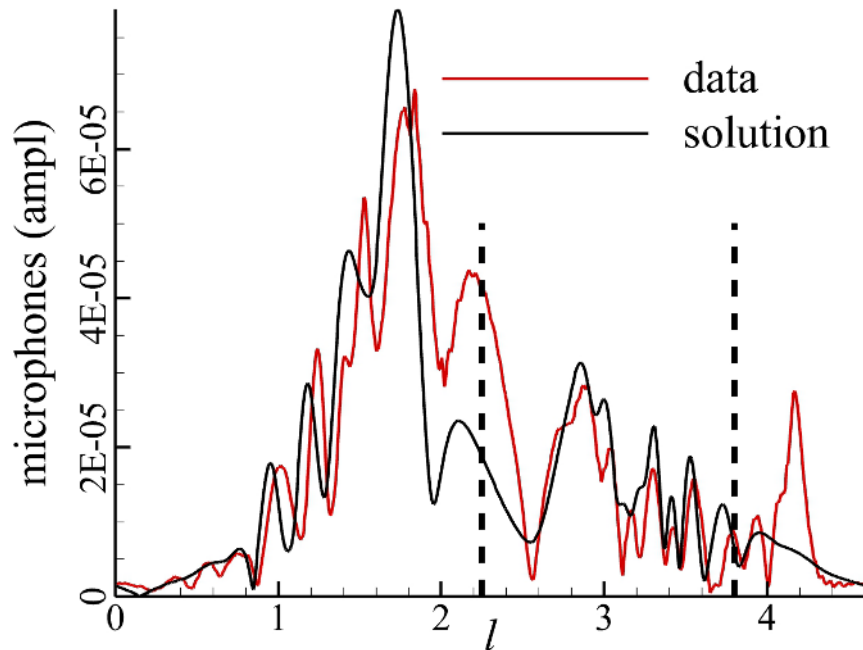


Рисунок 4.21. Данные на микрофонах: исходные (data) и найденные из решения (solution). Смешанный источник, «микрофоны по всему контуру»

На рис. 4.22 приводится график амплитуд сигналов на нижних микрофонах отдельно монопольной составляющей и нормальной компоненты диполя. Отсюда видно, что монопольная составляющая вносит большой вклад в шум под основным крылом. Однако стоит учитывать, что в данном случае также мог быть преимущественно разрешен источник, локализующийся на верхней поверхности крыла и излучающий вверх. В пользу такого предположения может говорить лучшее согласование сигналов на верхних микрофонах, чем на нижних ($2.2 < l < 3.8$), рис. 4.21.

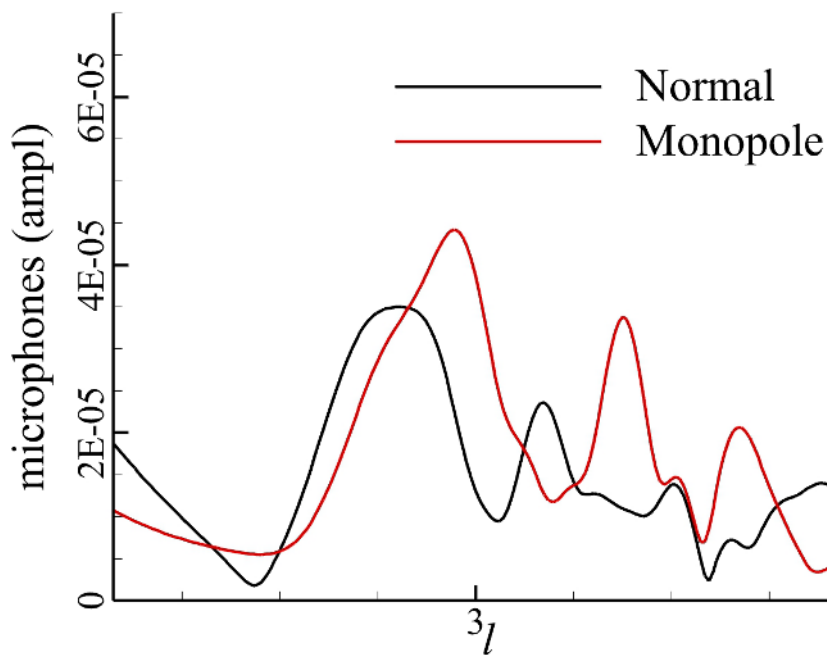


Рисунок 4.22. Сигналы на нижних микрофонах от вертикальной компоненты диполя и монопольной составляющей

Графики интенсивности функций источника для вертикальной компоненты диполя и монополя приведены на рис. 4.23. Как и в случае других рассмотренных выше типов источника хорошо заметно для обеих функций преобладание интенсивности в области предкрылка.

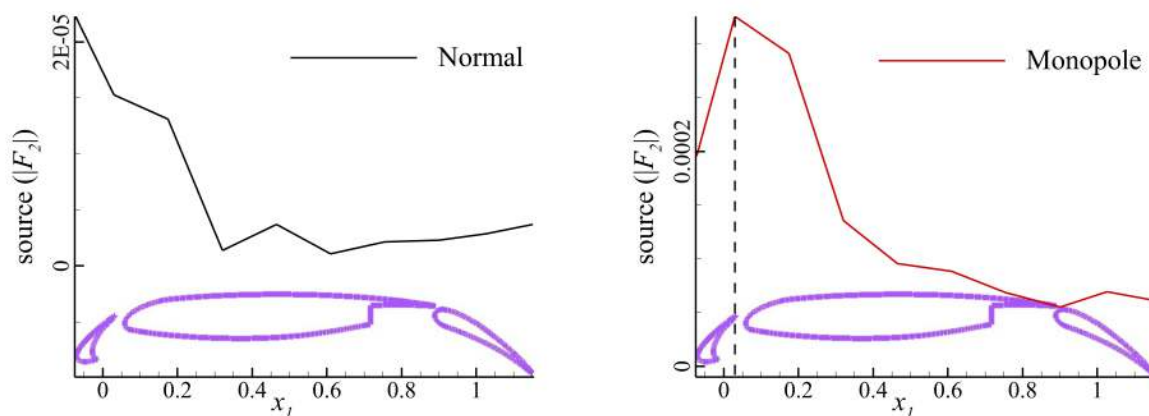


Рисунок 4.23. Полученные интенсивности вертикальной компоненты диполя (слева) и монопольной составляющей (справа)

Исходя из представленных результатов в параграфах 4.3.1, 4.3.3, 4.3.4 можно зафиксировать следующее:

- Ни один из рассмотренных типов источника не показывает близкое согласование сигналов на микрофонах
- При использовании микрофонов по всему контуру как для дипольного, так и смешанного источников поле на нижних микрофонах воспроизводится плохо. Это объясняется тем, что основное излучение идет вперед-вверх (рис. 4.21, интервал $l \in [1.5, 2.5]$), и решение подстраивается к этой особенности, в ущерб излучению в других направлениях. Поэтому далее, см. 4.3.6, был рассмотрен сценарий добавления в функцию источника точечного диполя на предкрылке.
- При использовании «микрофонов по всему контуру» дипольный источник воспроизводит сигналы на нижних микрофонах хуже, чем монополюсный тип источника. По-видимому, разрешается источник, локализующийся на верхней поверхности крыла и излучающий вверх.

4.3.5 Анализ пространственного акустического поля для найденного источника дипольного типа

Задача для неизвестных вертикальной и горизонтальной компоненты диполя в конфигурации «микрофоны по всему контуру» рассматривается также и для безразмерной частоты $St = 15$ (в [54] кратко приведены результаты), что также приблизительно соответствует одной из тональных компонент, параграф 4.1.4. После решения задачи для данной частоты по найденному источнику (рис. 4.24) было посчитано акустическое поле в прямоугольнике $[-2, 2] \times [-2, 2]$ на равномерной сетке 150×150 . Полученное поле давления (рис. 4.25) оказалось качественно похожим на результат, приведенный в [56] (рис. 4.26). В [56] поле вычисляется с помощью преобразования Фурье, примененного к результатам CFD моделирования с теми же параметрами потока, что приведены в параграфе 4.1.3.

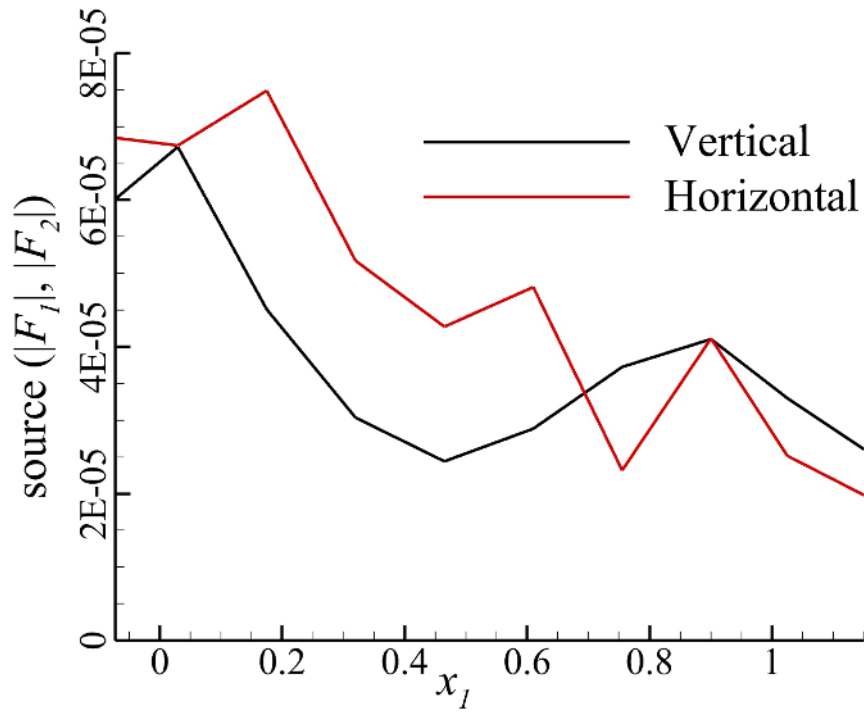


Рисунок 4.24. Найденные интенсивности вертикальной и горизонтальной компонент источника дипольного типа, $St = 15$

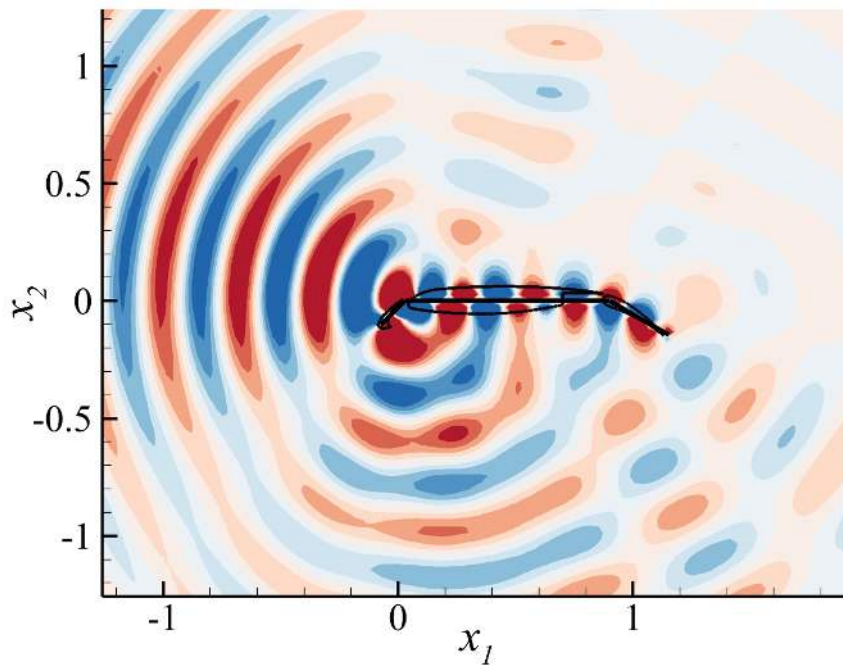


Рисунок 4.25. Акустическое поле давления, вычисленное по найденному источнику дипольного типа, $St = 15$

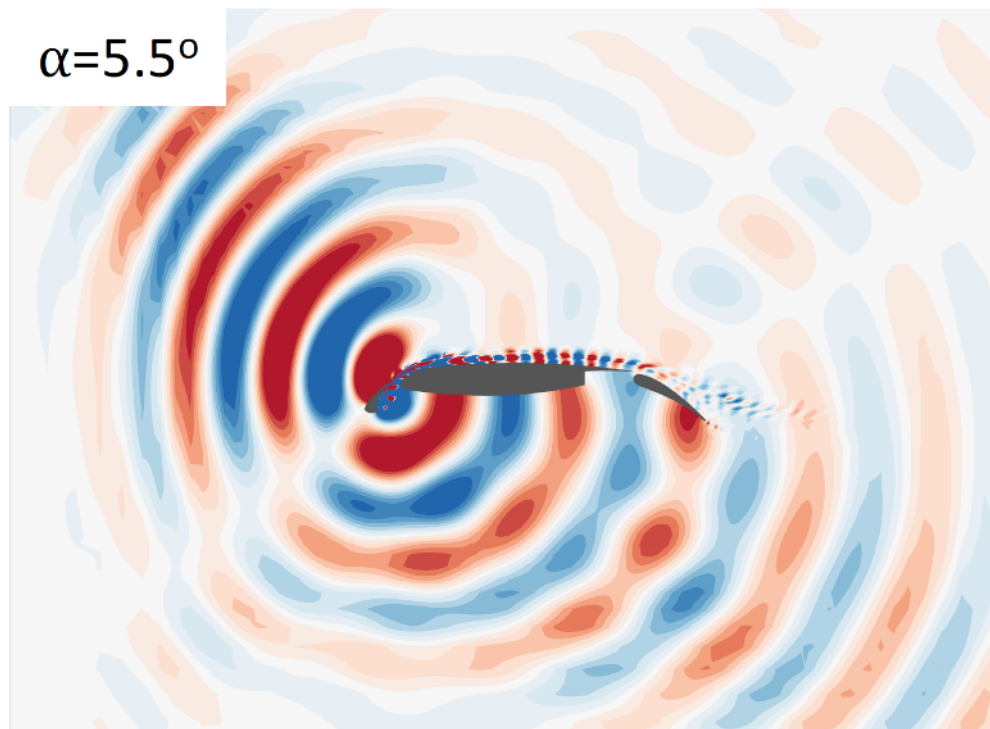


Рисунок 4.26. Рисунок из [56]: вещественная часть коэффициентов Фурье поля давления на частоте $St \approx 15$

Отметим, что наличие дипольной дорожки внутри профиля на рис. 4.25 обусловлено отсутствием в модели численного бимформинга какого-либо учета наличия твердого тела.

Наблюдаемое сходство на рис. 4.25 и рис. 4.26 может подтвердить как согласование получаемых для данной задачи результатов, так и адекватности построенной модели.

4.3.6 Влияние использования априорной информации на качество решения задачи

Исходя из представленных в параграфе 4.3.3 выводов, можно предположить, что использование комбинации типов источников в некоторых узлах сетки потенциально дает лучшее приближение сигналов на микрофонах. Монопольный тип источника хорошо воспроизводит сигналы вблизи основного крыла, следовательно, можно взять любой источник, соответствующий простому слою, за основу на всей сетке. В данной работе выбирается дипольный источник с горизонтальной компонентой момента, а не монопольный, чтобы избежать численных эффектов, связанных с разными степенями $|x|$ (2.1) в знаменателе фундаментального решения для источника-монополя и точечно-

го диполя. На предкрылке на изломе сетки, по-видимому, можно расположить еще и диполи, причем, точечные. На предкрылке на первом отрезке линии источника, было решено использовать точечный диполь вместо распределенного источника. Наличие такого диполя просматривается из анализа 4.3.5. При этом, как показали расчеты, корректность решения задачи сохраняется при внедрении даже двух точечных диполей. Сетка на предкрылке состоит из двух узлов. Поместим в первый узел ($x_1 = -0.0725$) точечный диполь с неизвестным направлением момента, а во второй узел ($x_1 = 0.03$) точечный диполь с заранее заданным направлением момента с углом $\varphi = 2\pi/3$ для его направляющего вектора, $\theta = 0$:

$$e = \{\cos(\theta) \sin(\varphi), \cos(\theta) \cos(\varphi), \sin(\theta)\}. \quad (4.1)$$

Выпишем итоговую модель идентифицируемого источника, которая, как оказалось, обеспечивает корректность решения задачи при использовании конфигурации «нижние микрофоны»:

- Вдоль всего профиля отыскивается горизонтальная компонента распределенного источника дипольного типа.
- В дополнение к нему, на предкрылке в двух узлах размещены два точечных диполя.
- Точечный диполь, расположенный на изломе сетки, около щели между крылом и предкрылком, имеет заданное направление дипольного момента, $\varphi = 2\pi/3$.
- У точечного диполя в первом узле остается неизвестным направление дипольного момента, отыскивается горизонтальная и вертикальная компоненты.

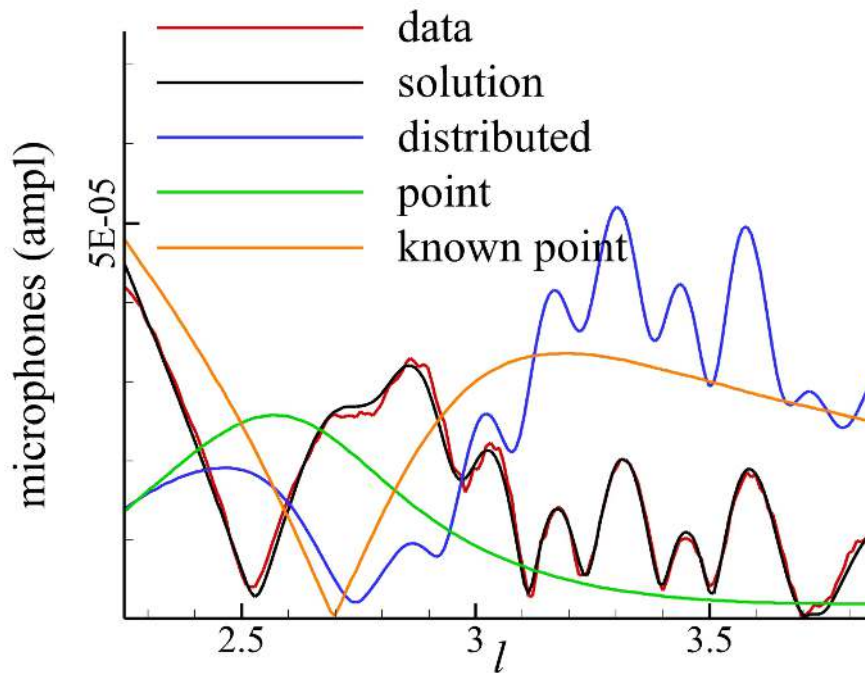


Рисунок 4.27. Данные на микрофонах: исходные (data) и найденные из решения (solution). Дипольный источник с горизонтальной компонентой момента с добавлением точечных диполей, «нижние микрофоны»

На рис. 4.27 приведены сигналы на микрофонах, исходные и найденные. Также приведены отклики на микрофонах отдельно от распределенного монопольного источника (distributed), точечного диполя с неизвестным направлением момента (point) и точечного диполя с заранее заданным направлением момента (known). Относительная невязка $\delta = 0.098$. Исходя из графиков и величины невязки, можно сделать вывод, что исходные и найденные сигналы согласуются с высокой точностью.

График интенсивности источника (в дБ, параграф 4.3.1), представлен на рис. 4.28. Здесь, как и ранее, видно наличие наибольшей интенсивности источника в области предкрылка, а также присутствует ниспадающий вдоль линии хорды тренд.

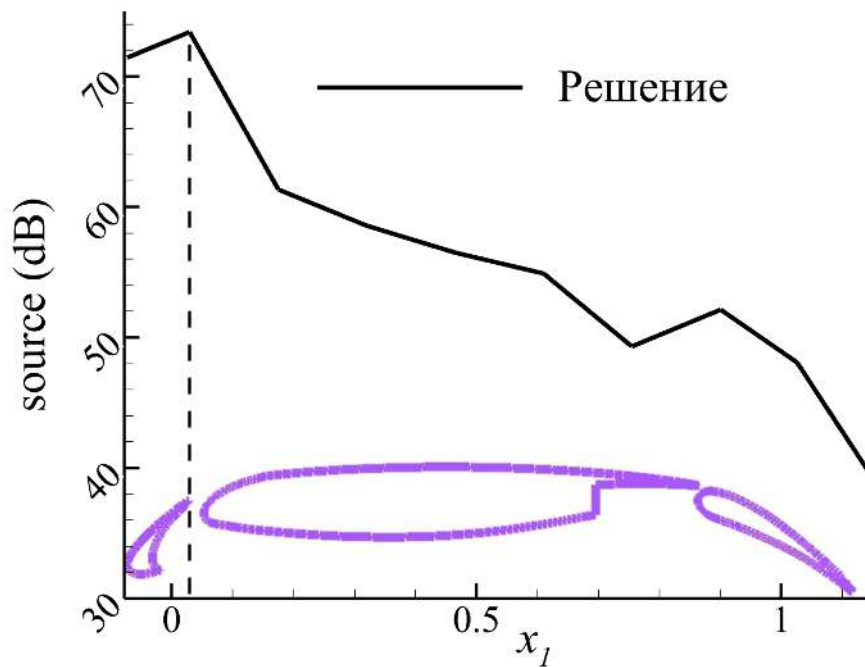


Рисунок 4.28. Интенсивность распределенного горизонтального дипольного источника с добавлением точечных диполей

Важно отметить, что выбранная конфигурация для этих расчётов не является очевидной и подбиралась в том числе при помощи проведения серии экспериментов. Такой подход сложно назвать универсальной технологией, применимой к решению любой практической задачи. Он приводится для демонстрации того, как наличие априорной информации (например, из классических теорий физики, из экспериментов) может влиять на разрешимость задачи. С помощью этого подхода удалось получить решение, дающее близкое совпадение сигналов, и при этом остающееся корректным.

Глава 5. Идентификация распределенного акустического источника на крыле модели прототипа сверхзвукового пассажирского самолета

5.1 Вычислительный эксперимент по нестационарному турбулентному обтеканию крыла модельного сверхзвукового пассажирского самолета

В качестве прикладной задачи численного бимформинга рассматривается задача по идентификации акустического источника на крыле модели прототипа сверхзвукового пассажирского самолета (СПС). Источником данных является вычислительный эксперимент по нестационарному турбулентному обтеканию планера СПС, описанный другими авторами в работе [42].

Полномасштабная модель прототипа планера СПС с отклонением носков крыла на $10^\circ - 10^\circ$ и отклонением элеронов на каждой стороне крыла на $10^\circ - 20^\circ - 20^\circ - 10^\circ$ (рис. 5.1) помещается в однородный воздушный поток со скоростью $U_\infty = 68$ м/с, давлением $P_\infty = 101325$ Па и температурой $T_\infty = 288.15$ К при угле атаки 10° . Длина рассматриваемой геометрии составляет 45 м, а размах крыльев 20 м. Соответствующее число Маха $M_\infty = 0.2$, число Рейнольдса, посчитанное по характерной длине $L = 1$ м составляет $Re = 4.6 \times 10^6$.

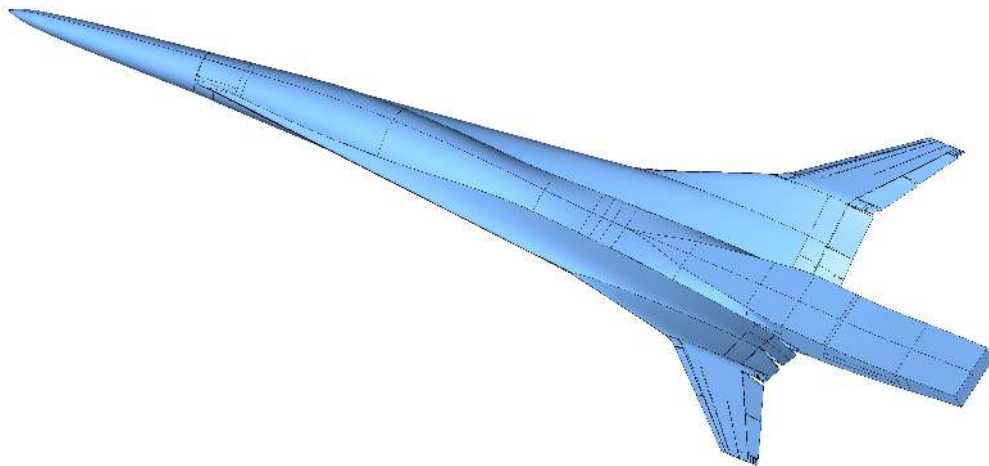


Рисунок 5.1. Геометрия модели прототипа планера сверхзвукового пассажирского самолета [42]

В силу симметрии рассматриваемой геометрии и параметров задачи расчет обтекания проводится только для половины планера. Это позволяет существенно сократить вычислительную стоимость вычислений, но, тем не менее, не позволяет учитывать ассиметричные эффекты. В силу пространственной разделенности возможных акустических источников, возникающих на крыльях, их можно считать некоррелированными.

Моделирование течения производится при помощи вихреразрешающего RANS-LES подхода Delayed Detached Eddy Simulation (DDES) [57], [58] и численной конечно-объемной схемы EBR5 PL [59], реализованных в программном комплексе NOISEtte [35]. В дальнейшем задача численного бимформинга решается для данных из расчета на неструктурированной сетке, состоящей из примерно 46 млн. элементов.

На рис. 5.2 приведена визуализация результатов рассматриваемого вычислительного эксперимента. Слева изображено распределение плотности спектральной мощности (PSD) вдоль задней кромки крыла, справа – распределение уровня звукового давления (SPL) на поверхности FWH. Из этих результатов можно сделать вывод о доминирующей широкополосной составляющей шума, а так же о возможном распределении акустического источника на задней кромке крыла.

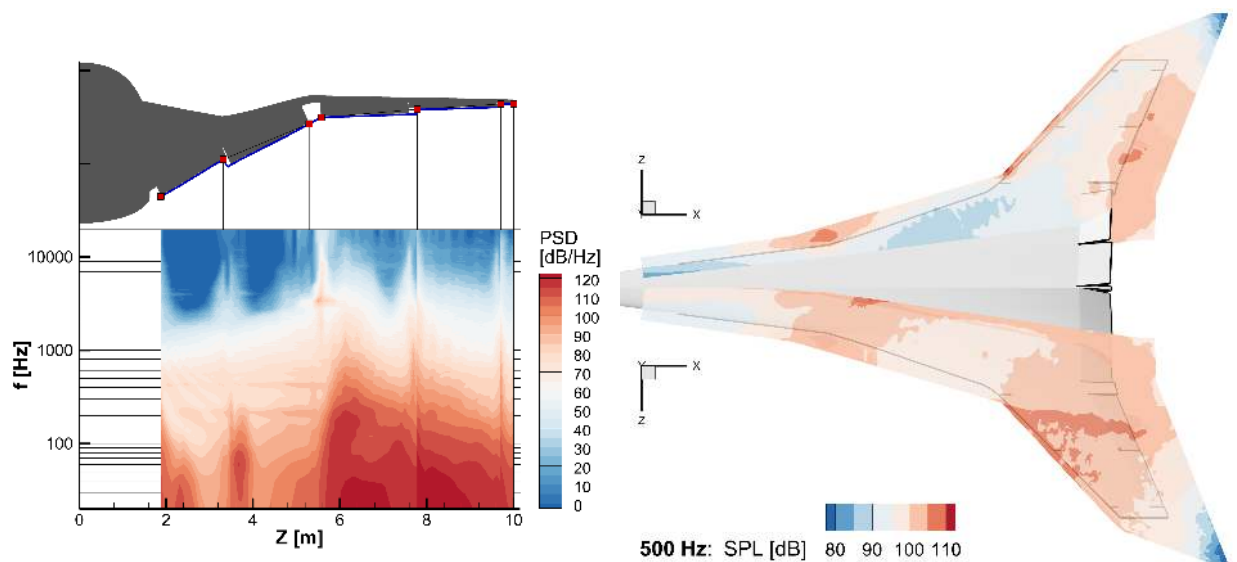


Рисунок 5.2. Результаты вычислительного эксперимента. Распределение плотности спектральной мощности (PSD) вдоль задней кромки крыла (слева), распределение уровня звукового давления (SPL) на поверхности FWH (справа) из [60]

5.2 Выбор конфигураций для бимформинга

Исходя из результатов на рис. 5.2 справа, можно ожидать, что акустический источник локализуется на задней кромке крыла, а также находится ниже по потоку. Тем не менее, нельзя исключать, что источник может локализоваться и на самом крыле. Это обуславливает выбранную геометрию источника, см. рис. 5.3. Поверхность источника триангулируется по Делоне, шаг сетки определяется выбранной для исследования частотой $f = 500$ Гц. Выбрана именно такая частота, поскольку она содержится в диапазоне спектра, разрешаемом при проведении CFD-моделирования. Получившаяся сетка состоит из $N = 165$ узлов и удовлетворяет условиям «корректности» для данной частоты.

В силу практических соображений, как и ранее, интерес представляют источники, излучающие в сторону земли. По причине экранирования акустического излучения крылом, на его верхней и нижней поверхностях могут образоваться два некоррелированных источника. В случае охвата микрофонами поверхности крыла целиком, как это рассматривалось в Главе 4, эти источники могут быть не разрешены по отдельности, так как будет найдена такая функция источника, которая доставляет минимум суммарной невязки сигналов на микрофонах. В результате может быть построен источник,

имеющий слабое сходство с реальным. Поэтому во избежание такой неоднозначности микрофоны будем располагать под крылом.

В качестве микрофонной поверхности можно было бы выбрать нижнюю часть поверхности FWH из вычислительного эксперимента. Однако часть поверхности источника, располагающаяся в потоке, пересекается с замыкающими поверхностями поверхности FWH. Поэтому имеет смысл построить новую микрофонную поверхность, сигналы на которой могут быть вычислены согласно акустической аналогии FWH [46]. Далее микрофоны будем располагать на нижней части эллиптического в плане цилиндра с осью вдоль x_1 , см. рис. 5.3. На этой поверхности равномерно распределено $M = 18020$ микрофонов.

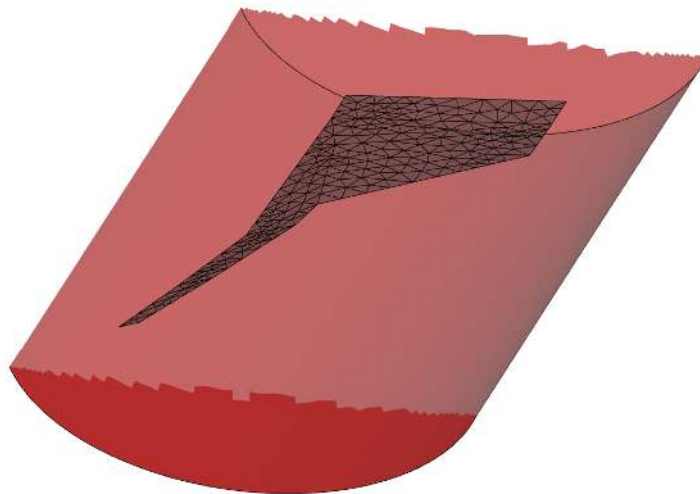


Рисунок 5.3. Геометрия области источника (серая) и микрофонной поверхности (красная) для проведения численного бимформинга для крыла СПС

Выбор такой конфигурации ограничивает возможные для расчетов типы источника. Как было выявлено в Главе 4, на нижних микрофонах можно идентифицировать источник, представляющий из себя или простой, или двойной слой, но никак не их сумму. Поэтому в качестве рассматриваемых далее типов источника выбирается источник монопольного типа и источник дипольного типа с моментом, ориентированным по нормали к поверхности источника.

И тот, и другой тип источника устойчиво разрешается для выбранной геометрической конфигурации. Тесты на устойчивость проводятся анало-

гично описанным в Главе 4 с единственным отличием: случайно распределенная функция источника сглаживается по пространству для обеспечения гладкости функции. Как и ранее, для вычисления синтетических значений на микрофонах на построенную дискретную функцию источника действует оператор переноса излучения, и вносится 5% шум. После этого решается задача бимформинга в применении к полученным на микрофонах данным. Тогда для монопольного типа источника число обусловленности матрицы $\mathcal{T}_a^* \mathcal{T}_a$ $C_a = 22.6$, относительная невязка $\delta = 0.16$, относительные погрешности $\varepsilon_\infty = 0.05$, $\varepsilon_2 = 0.02$. Для источника дипольного типа – $C_a = 77.0$, $\delta = 0.16$, $\varepsilon_\infty = 0.07$, $\varepsilon_2 = 0.03$. Визуализация решения тестовых задач приведены на рис. 5.4 для источника монопольного типа и на рис. 5.5 – для дипольного.

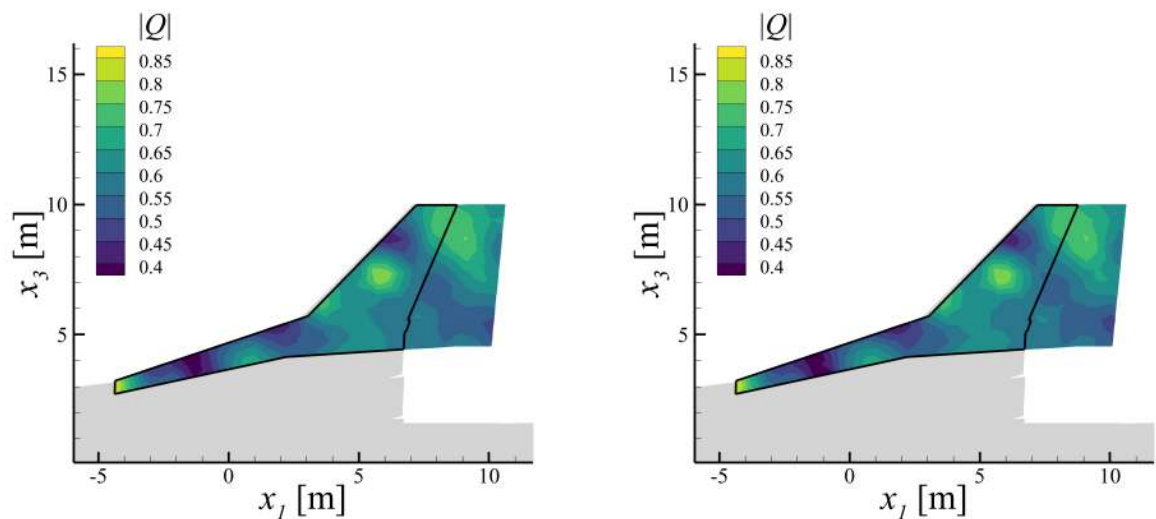


Рисунок 5.4. Результаты тестов на устойчивость. Источник монопольного типа. Точное решение (слева), приближенное (справа).

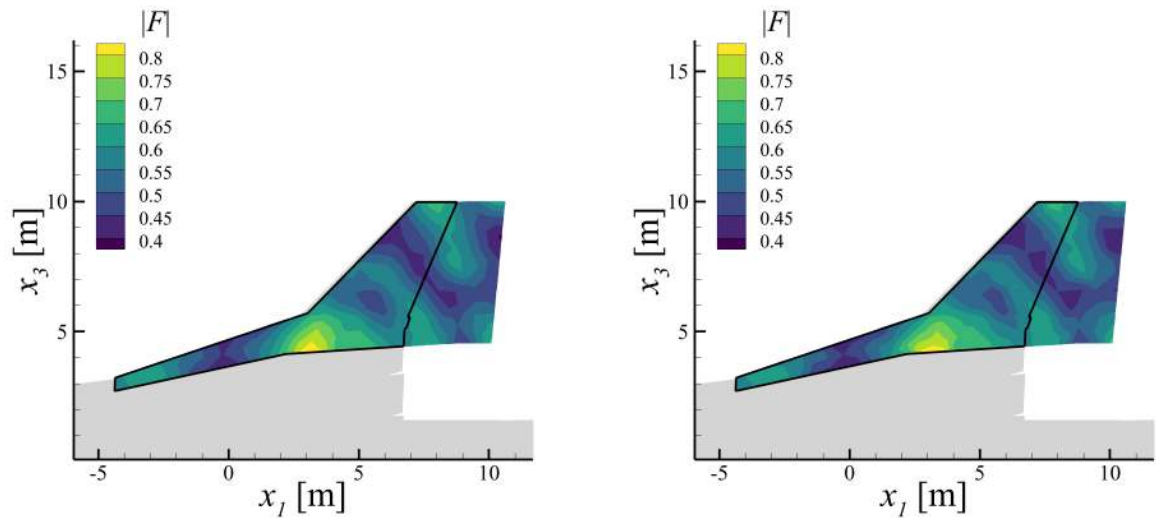


Рисунок 5.5. Результаты тестов на устойчивость. Источник монопольного типа. Точное решение (слева), приближенное (справа).

5.3 Результаты численного бимформинга

5.3.1 Идентификация акустических источников на крыле СПС

Далее приводятся результаты решения задачи численного бимформинга для крыла модели прототипа сверхзвукового пассажирского самолета для источников монопольного типа и дипольного с моментом, ориентированным по нормали к поверхности источника. На рис. 5.6 изображена средняя по третьоктавной полосе с центральной частотой $f = 500$ Гц интенсивность для источника монопольного типа (слева) и дипольного (справа). Здесь и далее под интенсивностью подразумевается уровень звукового давления (SPL) на расстоянии $1/\sqrt{4\pi}$ м снизу (по направлению x_2) от соответствующего узла сетки источника. Сетка источника, как и ранее, состоит из треугольных элементов и содержит 165 узлов. Средняя по полосе относительная невязка для источника монопольного типа составляет $\delta = 0.83$, для источника дипольного типа – $\delta = 0.86$.

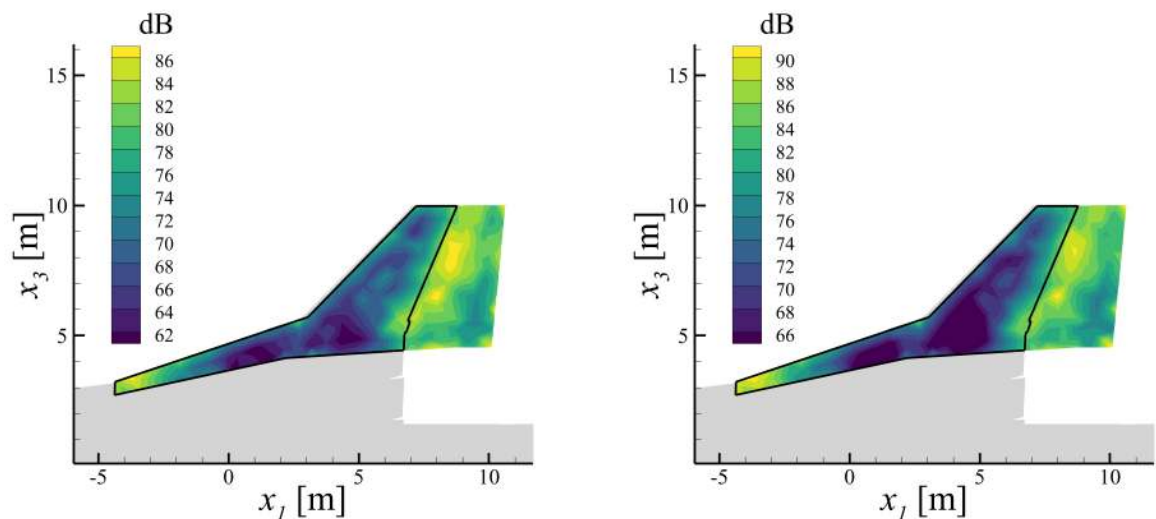


Рисунок 5.6. Результаты решения задачи численного бимформинга для крыла СПС. Интенсивность источника, центральная частота $f = 500$ Гц. Источник монопольного типа (слева) и дипольного с моментом, ориентированным по нормали к поверхности источника (справа)

Полученные результаты согласуются с данными анализа ближнего поля, рис. 5.2. Основной источник локализуется за задней кромкой крыла, ниже по потоку. Источник, обнаруженный в области $x \approx -3.75$, также согласуется с соответствующим пиком на рис. 5.2 (справа). Проведенный анализ показал, что, по всей вероятности, этот источник не имеет физической природы, и его возникновение связано с численными артефактами [42].

Результаты для монопольного типа источника и дипольного с моментом, ориентированным по нормали, очень схожи в плане согласования локализации пиков и структур. Вызвано это тем, что при использовании «нижних микрофонов» существует неединственность при определении источника, задаваемого в виде суммы простого и двойного слоя, Глава 4. И простой, и двойной слой могут удовлетворять задаче минимизации нормы невязки на «нижних микрофонах» одинаково близко. С точки зрения акустики же, диаграмма направленности точечного монополя и диполя в области по направлению его момента совпадает, рис. 5.7 [61]. Однако, поскольку источники в численном бимформинге по модельному предположению являются распределенными и коррелированными, Глава 1, то решения лишь схожи, но могут не быть идентичными. Найденные источники минимизируют невязку на одних и тех же микрофонах, поэтому значения давления на них близки. Соответствующая же узлу сетки источника интенсивность, в качестве которой прини-

мается уровень звукового давления (SPL), создаваемый помещенным в этот узел изолированным источником на одном и том же референсном расстоянии $1/\sqrt{4\pi}$ м, но отличном от расстояния до микрофонов, Глава 3, несколько отличается в силу различных функций Грина для источников монопольного и дипольного типа.

Отдельно стоит отметить согласованность получаемых численным бимформингом источников с физическими представлениями о процессе генерации шума при турбулентном обтекании профилей без механизации на малых углах атаки. Известно, например, из работ [62], [63], что на таком режиме обтекания профиля крыла существенный вклад в шум вносит процесс рассеивания вихревых пульсаций пограничного слоя на краевой неоднородности. Это соответствует наличию пика интенсивности акустического источника на задней кромке, рис. 5.6.

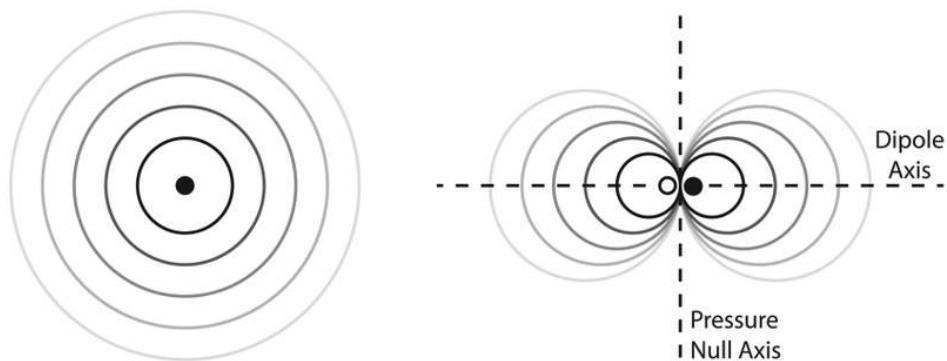


Рисунок 5.7. Диаграмма направленности точечного монополя (слева) и диполя (справа) [61]

На рис. 5.8 (слева) приведена интенсивность акустического источника монопольного типа, найденная при помощи применения традиционного бимформинга (Conventional Beamforming [4], [2], [3]) к данным рассматриваемого вычислительного эксперимента. Расчет также проводится для третьоктавной полосы частот с центральной частотой $f = 500$ Гц. С точки зрения методологии традиционного бимформинга, которая подразумевает выстраивание относительно малого количества микрофонов в решетки специальных геометрий, данный расчет является неполным, так как микрофоны равномерно располагаются на той же поверхности, что и ранее, а их количество составляет 2269. Тем не менее, возможно произвести сравнение результатов численного бимформинга и традиционного. В совокупности с амплитудно-частотной

характеристикой (АЧХ) источника, полученной при помощи традиционного бимформинга, а также численного бимформинга для источников как монополюсного, так и дипольного типов, рис. 5.8 (справа), методы показывают высокий уровень согласованности. Тем не менее, как по картам источников (рис. 5.6), так и по полученной АЧХ можно сделать предположение, что численный бимформинг имеет потенциал выявлять тонкую структуру распределенных источников (т.е. без предположения о некоррелированности).

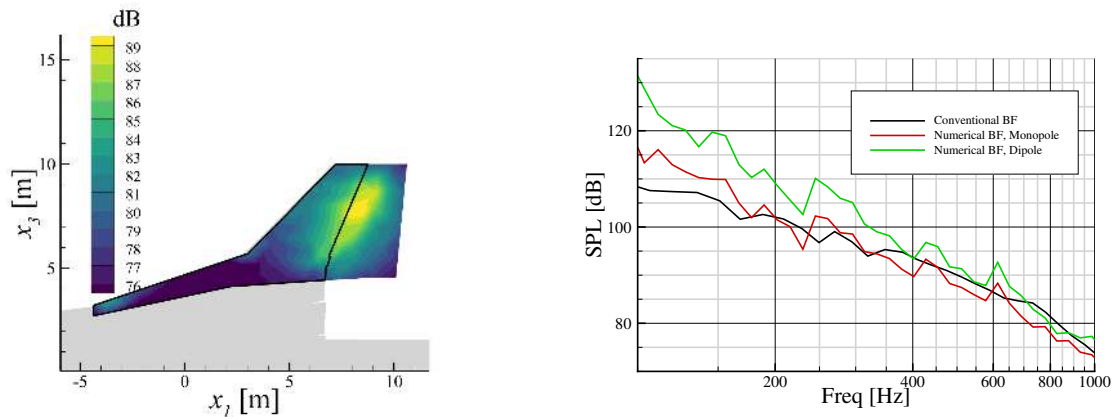


Рисунок 5.8. Интенсивность акустического источника монополюсного типа, найденная при помощи применения традиционного бимформинга к данным рассматриваемого вычислительного эксперимента, $f = 500$ Гц (слева). Амплитудно-частотная характеристика источника монополюсного, дипольного с моментом по нормали к поверхности источника, полученные численным бимформингом, а также монополюсного, полученная традиционным бимформингом (справа)

Далее на рис. 5.9 приводятся результаты для третьоктавной полосы с центральной частотой 1000 Гц. Сетка, соответствующая этой полосе, также состоит из треугольных элементов и содержит $N = 827$ узлов. Средняя относительная невязка для монополюсного типа источника составила $\delta = 0.81$, для дипольного – $\delta = 0.82$. Акустический источник так же, как и в случае частоты 500 Гц локализуется на задней кромке крыла, но сместился ближе к фюзеляжу. Необходимо отметить, что наличие мелких структур источника физически корректно, а их характерные размеры полностью соответствуют условиям «корректности», Глава 2, и принимают значения больше 0.6λ , где $\lambda \approx 0.34$ м – длина рассматриваемой волны.

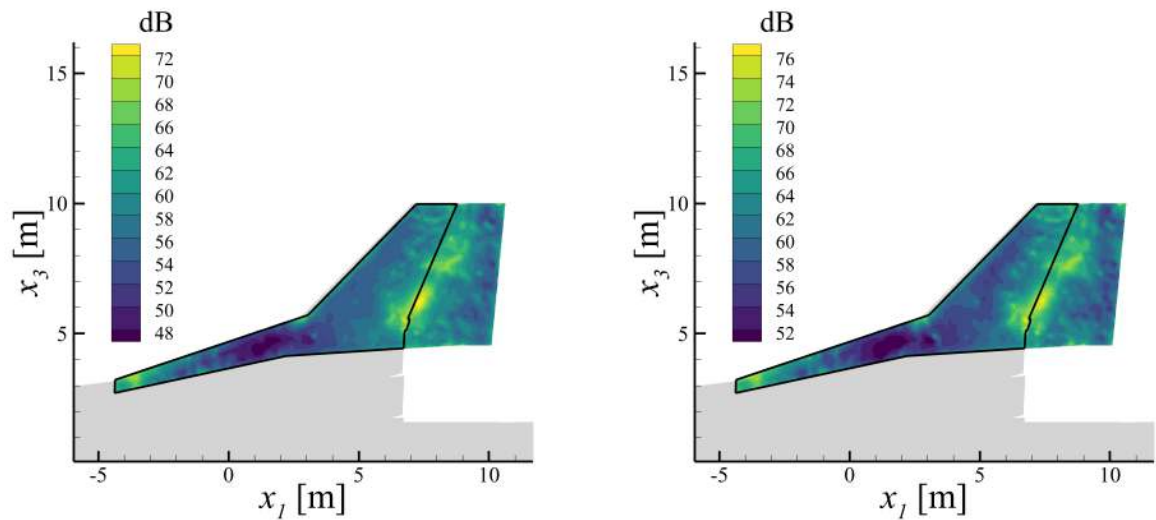


Рисунок 5.9. Результаты решения задачи численного бимформинга для крыла СПС. Интенсивность источника, центральная частота $f = 1000$ Гц. Источник монополярного типа (слева) и дипольного с моментом, ориентированным по нормали к поверхности источника (справа)

5.3.2 Проверка корректности полученных результатов

Для проверки корректности работоспособности рассматриваемого алгоритма численного бимформинга в задаче идентификации источника на крыле модели прототипа сверхзвукового пассажирского самолета проводится следующая процедура. В среднем поле размещаются четыре контрольные точки $P_1 = (6, -10, 8)$, $P_2 = (7, -10, 8)$, $P_3 = (6, -10, 6)$, $P_4 = (7, -14, 8)$, рис. 5.10. В этих контрольных точках вычисляются сигналы согласно акустической аналогии FWH [46] – прямой метод. Сигналы обрабатываются при помощи утилиты Spectral, входящей в состав программного комплекса NOISEtte при помощи применения оконных функций Хэннинга. Полученные таким образом спектры приведены на рис. 5.11, рис. 5.12 и обозначены серым цветом.

Далее проводится «массовый» бимформинг. Он заключается в том, что диапазон частот $100 \text{ Гц} < f < 1000 \text{ Гц}$ разбивается на непересекающиеся диапазоны шириной 100 Гц, для каждой из которых строится своя сетка, удовлетворяющая условиям «корректности», (2.13), (2.8), (2.9). Перебирая частоты внутри каждой такой полосы, проводится численный бимформинг, после чего излучение переносится от найденных источников в контрольные точки P_1, P_2, P_3, P_4 . Данную процедуру назовем обратным методом. На рис. 5.11 для монополярного типа источника и рис. 5.12 для дипольного приведены спектры сигналов, восстановленных в рамках описанного подхода; соответствующие

кривые показаны зеленым цветом. Данные спектры также построены при помощи утилиты Spectral с идентичной описанной ранее обработкой.

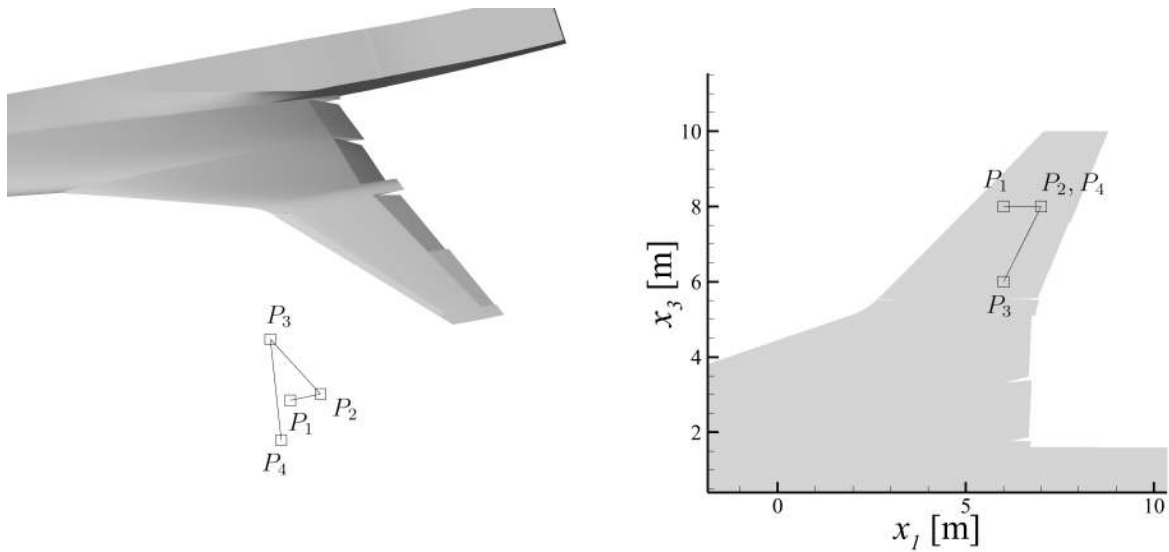
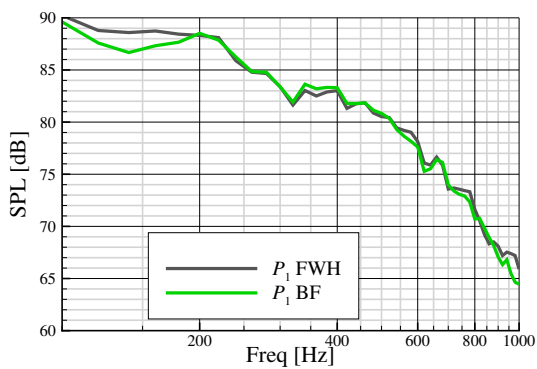
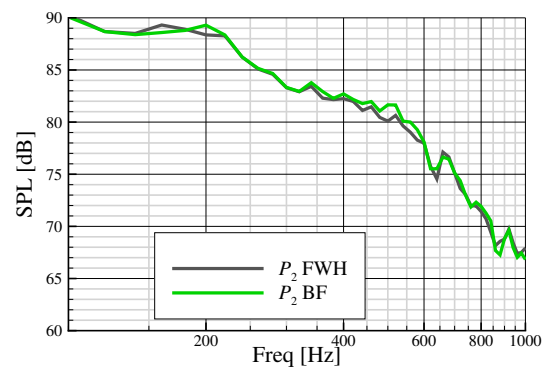


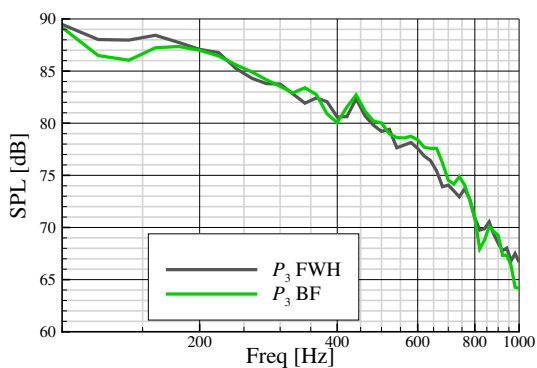
Рисунок 5.10. Расположение контрольных точек для сравнения получаемых бимформингом с получаемых прямым методом спектров



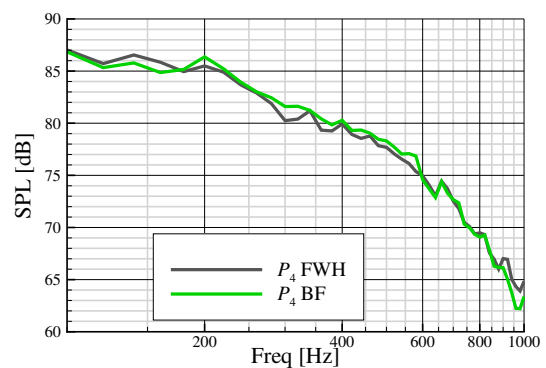
(a) Точка P_1



(b) Точка P_2



(c) Точка P_3



(d) Точка P_4

Рисунок 5.11. Сравнение спектров сигналов, посчитанных по методу FWH (серый) и излученных от найденных численным бимформингом источников (зеленый), в контрольных точках. Источник монопольного типа

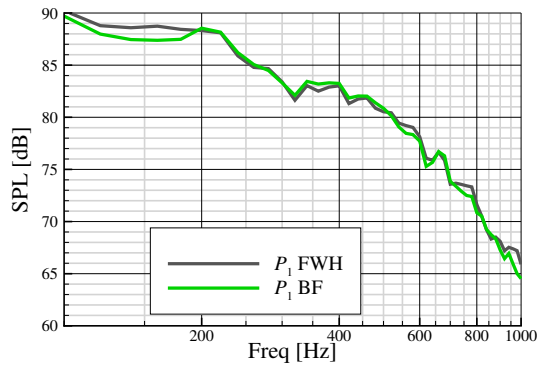
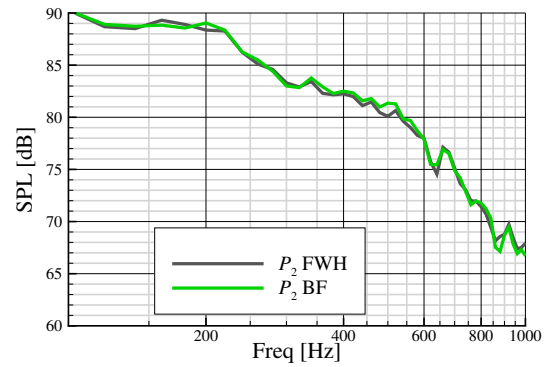
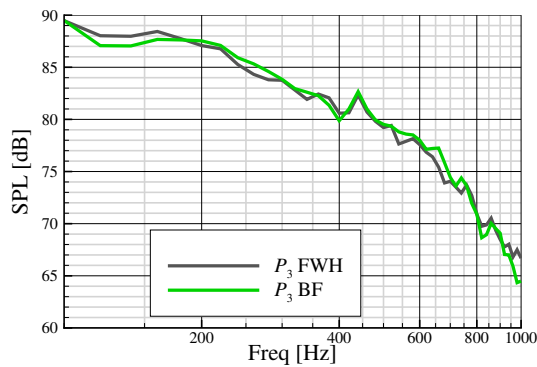
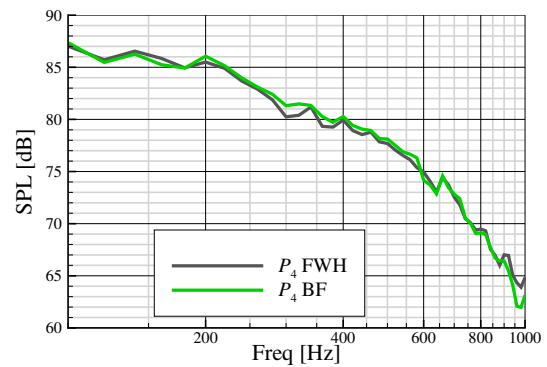
(a) Точка P_1 (b) Точка P_2 (c) Точка P_3 (d) Точка P_4

Рисунок 5.12. Сравнение спектров сигналов, посчитанных по методу FWH (серый) и излученных от найденных численным бимформингом источников (зеленый), в контрольных точках. Источник дипольного типа с моментом, ориентированным по нормали к поверхности источника

Графики восстановленных спектров на рис. 5.11, рис. 5.12 для источников монопольного и дипольного типов довольно близки и хорошо воспроизводят кривые спектров сигналов, посчитанных прямым методом. Первое происходит по той же причине, которая объясняет схожесть распределения интенсивностей для источников монопольного и дипольного типов в параграфе 5.3.1: на «нижних микрофонах» существует неединственность в определении источника простым или двойным слоем.

И метод FWH, и обратный метод в своей основе проводят работу над волновым уравнением для движущейся среды для одних и тех же данных, записанных на поверхности FWH. Разница между ними заключается в следующем. Первый подразумевает решение уравнения во временной области, а второй – решение обратной задачи по нахождению правой части для уравнения Гельмгольца для движущейся среды (частотная область). То есть един-

ственное существенное различие заключается именно в решении обратной задачи. Таким образом, высокая степень согласования кривых для прямого и обратного метода может говорить о том, что обратная задача решена корректно. Отдельно стоит отметить, что результирующие кривые для прямого и обратного методов показывают хорошее согласование для точек, отличных от точек расположения микрофонов и выбранных произвольным образом.

Таким образом, полученные в данной Главе результаты имеют подтверждение своей адекватности. Во-первых, это согласование с физическими представлениями о процессах генерации шума при турбулентном обтекании подобных профилей. Во-вторых, наблюдается соответствие результатам анализа ближнего поля. В-третьих, есть непротиворечащее теоретическим предположениям согласование распределения интенсивностей двух рассматриваемых типов источника. В-четвертых, кривые спектров сигналов, которые получаются прямым и обратным методом, имеющим сильные различия в своей природе, очень близки.

Заключение

1. Разработана математическая модель распределенного акустического источника, возникающего при турбулентном обтекании летательного аппарата и его конструктивных элементов. Модель представляет собой обратную задачу по поиску плотности простого слоя или плотностей простого и двойного слоя (в случаях монопольного и дипольного источника соответственно) в правых частях уравнения Гельмгольца. Особенностью модели является возможность использования большого объема данных вычислительного эксперимента, что позволяет отказаться от предположения о некоррелированности источника.
2. На основе конечно-элементного подхода сформулирована дискретная задача численного бимформинга. Для обеспечения корректности постановки предложен физически обусловленный способ снижения числа обусловленности используемой матрицы.
3. Разработанный метод численного бимформинга реализован в модуле NumBeamForm в составе программного комплекса NOISEtte.
4. Работоспособность и эффективность метода численного бимформинга продемонстрированы применительно к промышленно-ориентированной тестовой задаче по идентификации акустического источника на сегменте прямого крыла с выпущенной механизацией.
5. С помощью метода численного бимформинга выявлены акустические источники на крыле модели прототипа сверхзвукового пассажирского самолета на режиме посадки.

Список литературы

1. *Merino-Martinez R.* Microphone arrays for imaging of aerospace noise sources : PhD Thesis / Merino-Martinez R. — Delft : Technische Universiteit, 2018.
2. *Michel U.* History of Acoustic Beamforming // Proceedings of the 1st Berlin Beamforming Conference. — Berlin, Germany, 2006.
3. *Dougherty R. P.* Beamforming in acoustic testing / ed. by T. J. Mueller. — Berlin : Springer-Verlag, 2002.
4. *Sijtsma P.* Experimental Techniques for Identification and Characterisation of Noise Sources // Advances in Aeroacoustics and Applications / ed. by J. Anthoine, A. Hirschberg. — Rhode-Saint-Genèse, Belgium : von Kármán Institute for Fluid Dynamics, 2004. — (VKI Lecture Series).
5. *Hogbom J. A.* Aperture synthesis with a non-regular distribution of interferometer baselines // Astron. Astrophys. Suppl. — 1974. — Vol. 15. — P. 417–426.
6. *Brooks T. F., Humphreys W. M.* A deconvolution approach for the mapping of acoustic sources (DAMAS) determined from phased microphone arrays // Journal of Sound and Vibration. — 2006. — Vol. 294, no. 4/5. — P. 856–879.
7. *Sijtsma P.* CLEAN Based on Spatial Source Coherence // 13th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. — 2007.
8. *Brooks T. F., Humphreys W. M.* Extension of DAMAS phased array processing for spatial coherence determination (DAMAS-C) // AIAA paper, AIAA-2006-2654. — 2006.
9. *Dougherty R. P.* Functional Beamforming for Aeroacoustic Source Distributions // 20th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. — DOI: 10.2514/6.2014-3066. — eprint: <https://arc.aiaa.org/doi/pdf/10.2514/6.2014-3066>. — URL: <https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/6.2014-3066>.

10. *Suzuki T.* Generalized Inverse Beam-forming Algorithm Resolving Coherent/Incoherent, Distributed and Multipole Sources // *J. Sound. Vib.* — 2011. — Vol. 330. — P. 5835–5851.
11. Generalized inverse beamforming with optimized regularization strategy / *P. Zavala [et al.]* // *Mech. Syst. Signal Process.* — 2011. — Vol. 25, no. 3. — P. 928–939.
12. Beamforming correction for dipole measurement using two-dimensional microphone arrays / *Y. Liu [et al.]* // *J. Acoust. Soc. Am.* — 2008. — Vol. 124, no. 1. — P. 182–191.
13. A Theoretical and Experimental Comparison of the Iterative Equivalent Source Method and the Generalized Inverse Beamforming / *B. Oudompheng [et al.]* // *Proceedings on CD of the 5th Berlin Beamforming Conference (Feb. 19–20, 2014).* — 02/2014. — ISBN 9783942709125.
14. *Gao J., Wu H., Jiang W.* Dipole-based beamforming method for locating dipole sources with unknown orientations in three-dimensional domains // *J. Acoust. Soc. Am.* — 2020. — Vol. 147, no. 1. — P. 125–136.
15. Design and Use of Microphone Directional Arrays for Aeroacoustic Measurements / *W. M. J. Humphreys [et al.]* // *36th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit.* — Reno, NV, USA : American Institute of Aeronautics, Astronautics, 1998.
16. Повышение точности локализации дипольных источников звука с помощью плоских микрофонных антенн / *В. Ф. Копьев [и др.]* // *Акустический журнал.* — 2023. — Т. 69, № 2. — С. 191—206. — ISSN 0320-7919. — URL: <https://journals.eco-vector.com/0320-7919/article/view/648291>.
17. *Sanders M., Santana L. de, Venner C.* The Sweep Angle Effect on Slat Noise Characteristics of the 30P30N High-Lift Model in an Open-Jet Wind Tunnel // *AIAA 2020-2557, AIAA AVIATION 2020 FORUM.* — 06/2020.
18. *Sijtsma P.* Acoustic beamforming for the ranking of aircraft noise // *Aircraft Noise.* — Brussels, Belgium : National Aerospace Laboratory NLR, 2012. — (VKI/VALIANT Lecture Series).

19. Локализация и ранжирование источников шума самолета в летных испытаниях и сравнение с акустическими измерениями крупномасштабной модели крыла / М. Зайцев [и др.] // Акустический журнал. — 2023. — Т. 69, № 2. — С. 165—176.
20. *Ma P., Lien F., Yee E.* Computational Acoustic Beamforming for Noise Source Identification for Small Wind Turbines // Int. Sch. Res. Notices. — 2017. — Mar. — Vol. 2017. — P. 7061391. — DOI: 10.1155/2017/7061391.
21. *Ершов В., Храпцов И.* Определение монопольных и дипольных источников шума при обтекании цилиндра с использованием виртуальной микрофонной антенны // Акустика среды обитания. Шестая всероссийская конференция молодых ученых и специалистов: материалы конференции / под ред. А. Комкин. — М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2021. — С. 108—117.
22. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. — М. : Наука, 1979. — С. 283.
23. *Engl H. W., Hanke M., Neubauer A.* Regularization of Inverse Problems. — Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 2000. — P. 322.
24. *Colton D., Kress R.* Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory. — 4th ed. — Cham : Springer, 2019. — P. 518.
25. *Кабанихин С. И., Шишленин М. А.* Об использовании априорной информации в коэффициентных обратных задачах для гиперболических уравнений // Тр. ИММ УрО РАН. — 2012. — Т. 18, № 1. — С. 147—164.
26. Inverse Problem of Recovering the Initial Condition for a Nonlinear Equation of the Reaction–Diffusion–Advection Type by Data Given on the Position of a Reaction Front with a Time Delay / D. Lukyanenko [et al.] // Mathematics. — 2021. — Vol. 9, no. 4. — ISSN 2227-7390. — DOI: 10.3390/math9040342. — URL: <https://www.mdpi.com/2227-7390/9/4/342>.
27. *Bao G., Lin J., Triki F.* Numerical solution of the inverse source problem for the Helmholtz Equation with multiple frequency data // Mathematical and Statistical Methods for Imaging. Vol. 548. — Contemporary Mathematics, 2011. — DOI: <https://doi.org/10.1090/conm/548>.

28. *Griesmaier R., Hanke M., Raasch T.* Inverse Source Problems for the Helmholtz Equation and the Windowed Fourier Transform II // *SIAM Journal on Scientific Computing*. — 2013. — Vol. 35, no. 5. — A2188–A2206. — DOI: 10.1137/130908658. — eprint: <https://doi.org/10.1137/130908658>. — URL: <https://doi.org/10.1137/130908658>.
29. *Tassiopoulou S., Koukiou G., Anastassopoulos V.* Algorithms in Tomography and Related Inverse Problems — A Review // *Algorithms*. — 2024. — Vol. 17, no. 2. — ISSN 1999-4893. — DOI: 10.3390/a17020071. — URL: <https://www.mdpi.com/1999-4893/17/2/71>.
30. Raising the Accuracy of Monitoring the Optical Coating Deposition by Application of a Nonlocal Algorithm of Data Analysis / I. V. Kochikov [et al.] // *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. — 2020. — Vol. 14, no. 2. — P. 330–339. — ISSN 1990-4797. — DOI: 10.1134/S1990478920020118.
31. Сравнительный анализ свойств алгоритмов решения обратных задач, связанных с монохроматическим контролем процессов напыления оптических покрытий / И. В. Кочиков [и др.] // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2021. — Т. 61, № 9. — С. 1528—1535. — DOI: 10.31857/S004446692109012X.
32. Deep Learning Techniques for Inverse Problems in Imaging / G. Ongie [et al.] // *IEEE Journal on Selected Areas in Information Theory*. — 2020. — Vol. 1, no. 1. — P. 39–56. — DOI: 10.1109/JSAIT.2020.2991563.
33. Joint Gravity and Magnetic Inversion Using CNNs' Deep Learning / Z. Bai [et al.] // *Remote Sensing*. — 2024. — Vol. 16, no. 7. — ISSN 2072-4292. — DOI: 10.3390/rs16071115. — URL: <https://www.mdpi.com/2072-4292/16/7/1115>.
34. Mathematical Modeling and Forecasting of COVID-19 in Moscow and Novosibirsk Region / O. I. Krivorot'ko [et al.] // *Numerical Analysis and Applications*. — 2020. — Vol. 13, no. 4. — P. 332–348. — ISSN 1995-4247. — DOI: 10.1134/S1995423920040047. — URL: <https://doi.org/10.1134/S1995423920040047>.
35. NOISEtte CFD&CAA Supercomputer Code for Research and Applications / I. V. Abalakin [et al.] // *Supercomputing Frontiers and Innovations*. — 2024. — Vol. 11, no. 2. — P. 78–101.

36. *Голдстейн М. Е.* Аэроакустика / под ред. А. Г. Мунин ; пер. Р. К. Каравасов, Г. П. Караушев. — М. : Машиностроение, 1981. — С. 294.
37. *Галлагер Р.* Метод конечных элементов. Основы: Пер. с англ. — М. : Мир, 1984.
38. *Колмогоров А. Н.* К обоснованию метода наименьших квадратов // Успехи математических наук. — 1946. — Т. 1, 1(11). — С. 57—70.
39. *Trefethen L. N., Bau III D.* Numerical Linear Algebra. — 1st ed. — Philadelphia : SIAM, 1997.
40. *Van der Vorst H.* Iterative Krylov Methods for Large Linear Systems. — Cambridge University Press, 2003. — P. 221. — ISBN 9780521818285.
41. Подходы к численному моделированию акустического поля, создаваемого крылом самолета с механизацией на режиме посадки / А. В. Горобец [и др.] // Математическое моделирование. — 2022. — Т. 34, № 7. — С. 24—48. — DOI: 10.20948/mm-2022-07-02.
42. *Duben A. P., Kozubskaya T. K., Rodionov P. V.* Wing Noise Simulation of Supersonic Business Jet in Landing Configuration // Supercomputing Frontiers and Innovations. — 2024. — Oct. — Vol. 11, no. 3. — P. 74–92. — DOI: 10.14529/jsfi240305. — URL: <https://superfri.org/index.php/superfri/article/view/575>.
43. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Том VI. Гидродинамика. — 3-е изд. — М. : Наука, 1986. — С. 736.
44. *Lighthill M. J.* On sound generated aerodynamically I. General theory // Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences. — 1952. — Mar. — Vol. 211, no. 1107. — P. 564–587. — ISSN 0080-4630. — DOI: 10.1098/rspa.1952.0060. — eprint: <https://royalsocietypublishing.org/rspa/article-pdf/211/1107/564/45649/rspa.1952.0060.pdf>. — URL: <https://doi.org/10.1098/rspa.1952.0060>.
45. *Lighthill M. J.* On sound generated aerodynamically II. Turbulence as a source of sound // Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences. — 1954. — Feb. — Vol. 222, no. 1148. — P. 1–32. — ISSN 0080-4630. — DOI: 10.1098/rspa.1954.0049. —

- eprint: <https://royalsocietypublishing.org/rspa/article-pdf/222/1148/1/48059/rspa.1954.0049.pdf>. — URL: <https://doi.org/10.1098/rspa.1954.0049>.
46. *Ffowcs Williams J., Hawkings D.* Sound generation by turbulence and surfaces in arbitrary motion // *Philos. Trans. R. Soc. London. Ser. A, Math. Phys. Sci.* — 1969. — Vol. 264, no. 1151. — P. 321–342. — DOI: 10.1098/rsta.1969.0031.
 47. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — 4-е изд. — М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1981. — С. 512.
 48. *Т. К. Козубская, Г. М. Плаксин, И. Л. Софронов.* Постановка и метод решения задачи бимформинга для локализации акустического источника на основе данных вычислительного эксперимента // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2021. — Т. 61, № 11. — С. 1904—1926. — DOI: 10.31857/S0044466921110120.
 49. *Бычков О. П., Демьянов М. А., Фараносов Г. А.* Локализация дипольных источников шума плоскими микрофонными решетками // *Акустический журнал.* — 2019. — Т. 65, № 5. — С. 675—687.
 50. *Pascioni K., Cattafesta L.* An aeroacoustic study of a leading-edge slat: Beamforming and far field estimation using near field quantities // *J. Sound Vib.* — 2018. — Vol. 429. — P. 224–244. — DOI: 10.1016/J.JSV.2018.05.029.
 51. *Choudhari M., Lockard D.* Assessment of slat noise predictions for 30P30N high-lift configuration from BANC-III workshop // *AIAA 2015-2844.* — 2015. — DOI: 10.2514/6.2015-2844.
 52. A hybrid RANS-LES approach with delayed-DES and wall-modelled LES capabilities / M. L. Shur [et al.] // *Int. J. Heat Fluid Flow.* — 2008. — Vol. 29, no. 6. — P. 1638–1649. — DOI: 10.1016/J.IJHEATFLUIDFLOW.2008.07.001.
 53. *Abalakin I., Bakhvalov P., Kozubskaya T.* Edge-based reconstruction schemes for unstructured tetrahedral meshes // *Int. J. Numer. Methods Fluids.* — 2016. — Vol. 81, no. 6. — P. 331–356. — DOI: 10.1002/flid.4187.

54. *Плаксин Г. М., Козубская Т. К., Софронов И. Л.* О численном бимформинге для идентификации акустического источника по данным суперкомпьютерного моделирования // Доклады Российской Академии Наук. Математика, Информатика, Процессы управления. — 2024. — Т. 519, № 5. — С. 52—59. — DOI: 10.31857/S2686954324050098.
55. Ffowcs Williams–Hawkings analogy for near-field acoustic sources analysis / A. Karakulev [et al.] // *Int. J. Aeroacoustics*. — 2022. — Vol. 21. — P. 457–475. — DOI: 10.1177/1475472X221107367.
56. Predictions of Slat Noise from the 30P30N at High Angles of Attack using Zonal Hybrid RANS-LES / J. Housman [et al.] // *AIAA 2019-2438, 25th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. — 05/2019.
57. Two Non-zonal Approaches to Accelerate RANS to LES Transition of Free Shear Layers in DES / C. Mockett [et al.] // *Progress in Hybrid RANS-LES Modelling* / ed. by S. Girimaji [et al.]. — Cham : Springer International Publishing, 2015. — P. 187–201. — ISBN 978-3-319-15141-0.
58. An Enhanced Version of DES with Rapid Transition from RANS to LES in Separated Flows / M. L. Shur [et al.] // *Flow, Turbulence and Combustion*. — 2015. — Vol. 95, no. 4. — P. 709–737. — ISSN 1573-1987. — DOI: 10.1007/s10494-015-9618-0. — URL: <https://doi.org/10.1007/s10494-015-9618-0>.
59. *Bakhvalov P., Kozubskaya T., Rodionov P.* EBR schemes with curvilinear reconstructions for hybrid meshes // *Computers & Fluids*. — 2022. — Vol. 239. — P. 105352. — ISSN 0045-7930. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2022.105352>. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045793022000263>.
60. Numerical Study of Noise Sources Generated by Wing of Supersonic Business Jet in Landing Mode / T. K. Kozubskaya [et al.] // *Supercomputing Frontiers and Innovations*. — 2025. — May. — Vol. 12, no. 1. — P. 112–132. — DOI: 10.14529/jsfi250108. — URL: <https://superfri.org/index.php/superfri/article/view/613>.

61. Three-Dimensional Acoustic Multipole Waveform Inversion at Yasur Volcano, Vanuatu / A. Iezzi [et al.] // *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. — 2019. — Aug. — Vol. 124. — P. 8679–8703. — DOI: 10.1029/2018JB017073.
62. *Amiet R.* Noise due to turbulent flow past a trailing edge // *Journal of Sound and Vibration*. — 1976. — Vol. 47, no. 3. — P. 387–393. — ISSN 0022-460X. — DOI: 10.1016/0022-460X(76)90948-2. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022460X76909482>.
63. *Brooks T., Pope D., Marcolini M.* Airfoil self-noise and prediction. Vol. 1218. — 08/1989. — URL: <https://ntrs.nasa.gov/api/citations/19890016302/downloads/19890016302.pdf>.

Публикации автора по теме диссертации

1. Kozubskaya T.K., **Plaksin G.M.**, Sofronov I.L. Statement of the Beamforming Problem and a Method of Its Solution for the Localization of an Acoustic Source Based on Computational Experiment Data // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2021, 61(11), pp. 1864–1885.

DOI: 10.1134/S0965542521110129

(WoS, Scopus)

Исходный текст: **Плаксин Г.М.**, Козубская Т.К., Софронов И.Л. Постановка и метод решения задачи бимформинга для локализации акустического источника на основе данных вычислительного эксперимента // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2021, Т. 61, стр. 1904-1926. DOI: 10.31857/S0044466921110120

(Перечень ВАК)

2. Karakulev A., Kozubskaya T., **Plaksin G.**, Sofronov I. Ffowcs Williams – Hawkings analogy for near-field acoustic sources analysis // International Journal of Aeroacoustics, 2022, 21(5-7), pp. 457–475 (Опубликована онлайн). DOI: 10.1177/1475472X221107367 **(WoS, Scopus)**

3. Kozubskaya T.K., **Plaksin G.M.**, Sofronov I.L. On Numerical Beamforming for Correlated Dipole-Type Sources

// Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2023, 63(11), pp. 2162–2175. DOI: 10.1134/S0965542523110131

(WoS, Scopus)

Исходный текст: Kozubskaya T.K., **Plaksin G.M.**, Sofronov I.L. On numerical beamforming for correlated dipole type sources // Ж. Вычисл. Матем. И матем. Физ., 2023, 63(11), стр. 1923. DOI: 10.31857/S0044466923110182

(Перечень ВАК)

4. **Plaksin G.M.**, Kozubskaya T.K., Sofronov I.L. On Numerical Beamforming for Acoustic Source Identification Based on Supercomputer Simulation Data // Doklady Mathematics, 2024, 110(2), pp. 435–441.

DOI: 10.1134/S1064562424601550 **(WoS, Scopus)**

Исходный текст: Плаксин Г.М., Козубская Т.К., Софронов И.Л.. О численном бимформинге для идентификации акустического источника по данным суперкомпьютерного моделирования / Доклады российской академии наук Раздел (Математика, Информатика, Процессы управления), 2024, Т. 64, с. 52–59. DOI: 10.31857/S2686954324050098

(Перечень ВАК)

5. Kozubskaya T.K., **Plaksin G.M.**, Sofronov I.L., Rodionov P.V.. Numerical Study of Noise Sources Generated by Wing of Supersonic Business Jet in Landing Mode // Supercomputing Frontiers and Innovations, 2025, 12(1), pp. 112–132. DOI: 10.14529/jsfi250108

(Scopus)

6. **Плаксин Г.М.** Реализация метода численного бимформинга в программном комплексе NOISEtte // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша, 2025, №79, стр. 1-16

(перечень ВАК)