

На правах рукописи

Плаксин Глеб Максимович

**Метод численного бимформинга
в вычислительном эксперименте в аэроакустике**

Специальность 1.2.2 — Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2026

Работа выполнена в Федеральном государственном учреждении «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук»

Научный руководитель: **Козубская Татьяна Константиновна**,
доктор физико-математических наук,
старший научный сотрудник,
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН,
главный научный сотрудник

Научный консультант: **Софронов Иван Львович**,
доктор физико-математических наук,
доцент,
ООО "Системы телекоммуникаций и информационной безопасности Шлюмберже", ведущий научный сотрудник научно-исследовательского центра

Официальные оппоненты: **Шишленин Максим Александрович**,
доктор физико-математических наук,
профессор РАН,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, главный научный сотрудник лаборатории прикладных обратных задач

Лукьяненко Дмитрий Витальевич,
доктор физико-математических наук,
доцент,
ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», профессор кафедры математики отделения прикладной математики физического факультета

Ведущая организация: **ПАО «Яковлев»**

Защита состоится 4 июня 2026 г. в 11:00 на заседании диссертационного совета 24.1.237.01, созданного на базе ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, расположенного по адресу: 125047, Москва, Миусская пл., д. 4

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ИПМ им. М.В. Келдыша РАН <https://keldysh.ru/council/3/D00202403/defence4.html>

Автореферат разослан « ____ » _____ 2026 г.

Учёный секретарь диссертационного совета 24.1.237.01
кандидат физико-математических наук

М.А. Корнилина

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования

Объем гражданских авиаперевозок неуклонно растет, и все больше людей становится вовлечено в процессы, связанные с гражданской авиацией, как непосредственно в роли пассажиров, персонала обслуживания аэродромов, специалистов промышленно-технического обеспечения, так и опосредованно через проживание на территориях, прилегающих к аэропортам. Поэтому все более остро стоит вопрос шумового загрязнения, создаваемого летательными аппаратами как внутри них, так и в приаэропортовых зонах, поскольку длительное воздействие подобного шума может негативно сказываться на качестве жизни их жителей. Авиационный шум становится все более значимым фактором, обуславливающим конструирование новых самолетов, и требуется разработка актуальных научно обоснованных методов оценки производимого шума и способов его снижения.

Международная организация гражданской авиации (ИКАО/ICAO) вводит новые, все более строгие нормы по шуму, создаваемому летательными аппаратами на местности. Современные воздушные суда должны проходить обязательную сертификацию по акустическим характеристикам. Для снижения финансовых и временных затрат на создание самолета необходимо иметь возможность анализировать потенциально создаваемый шум еще на этапе проектирования, а не опираться только на измерения постфактум. Более того, требуется разработка все более точных средств оценки акустических характеристик.

Одним из способов получения предварительных оценок аэродинамических и аэроакустических свойств является численное моделирование процессов обтекания воздушным потоком модели летательного аппарата или его конструктивных элементов, называемое CFD (Computational Fluid Dynamics) моделированием. CFD-моделирование задействует широкий спектр технологий, включая численные методы решения системы уравнений Навье-Стокса, модели турбулентности, построение дискретных сеток, параллельные вычисления на суперкомпьютерах. Во многих случаях вычислительный CFD-эксперимент можно рассматривать как менее затратное дополнение к экспериментам натурным, подразумевающим продувку модели в аэродинамической трубе или испытания полноразмерного самолета. Одной из особенностей вычислительного эксперимента является возможность получать объемные массивы

пространственно-временных данных об изучаемой задаче. Тем не менее, в настоящий момент существует не так много методов, позволяющих анализировать эти данные, в частности, извлекать из них информацию об акустических источниках.

Для идентификации акустических источников на основе данных физических экспериментов используется технология бимформинга. Эта технология хорошо развита и изучена, существует множество ее вариаций. Однако она не всегда может быть применима к данным эксперимента вычислительного. Естественные ограничения физического эксперимента в виде, например, малого числа записывающих шум микрофонов, существенным образом влияют на построение самого метода. В итоге натурный бимформинг не учитывает представленные вычислительным экспериментом особенности, заключающиеся в возможности записывать значения акустического поля в большом количестве точек пространства, расположенных в произвольных конфигурациях, а также перемещать микрофоны в потоке вместе с исследуемым телом. Поэтому для обработки данных, получаемых в ходе CFD-моделирования, требуется разработка нового подхода.

Задача по нахождению акустического источника может быть сформулирована в виде обратной задачи по нахождению правой части уравнений акустики. С этой точки зрения задача бимформинга обладает свойствами некорректности и высокой чувствительностью к погрешностям исходных данных. Таким задачам посвящено множество теоретических работ и численных исследований; в частности, задачи по нахождению правой части являются хорошо изученными. Однако значительная часть подходов теории обратных задач не получила практического применения в настоящее время, особенно в рамках анализа данных CFD-моделирования. Численный бимформинг обладает высоким потенциалом к решению практических задач.

Анализ данных CFD-эксперимента для идентификации акустических источников является продолжением идеи исследования акустических характеристик летательных аппаратов на этапе проектирования. Численный бимформинг может выступать как в роли дополнения к бимформингу натурному, так и самостоятельного инструмента, позволяя получать предварительные оценки мощности и локализации акустических источников, формируемых при обтекании воздушного судна. Как и любой численный подход, численный бимформинг должен обладать свойствами устойчивости, вычислительной эффективности и физиче-

ской интерпретируемости. Меньшая стоимость вычислительного эксперимента, по сравнению с физическим, дает потенциальную возможность анализировать доминирующие механизмы генерации шума за счет проведения расчетов для разных конфигураций летательного аппарата.

Сочетание нормативных требований, увеличения вычислительных возможностей и существующих методических подходов формируют актуальный круг задач, связанных со снижением авиационного шума. Ужесточение стандартов конструирования летательных аппаратов, развитие вычислительного эксперимента и ограниченность подходов к анализу его результатов создают потребность в разработке новой технологии, а именно численного бимформинга, то есть бимформинга, применяемого к данным вычислительного эксперимента. Тематика диссертационного исследования непосредственно связана с актуальными задачами авиационной науки и техники, направленными на снижение шумовой загрязненности, создаваемой летательными аппаратами, и, в целом, оптимизацию их акустических характеристик.

Цель работы

Целью настоящей работы является разработка, верификация и валидация метода численного бимформинга для анализа данных, полученных в ходе вычислительного эксперимента.

Задачи работы

В соответствии с поставленной целью сформулированы следующие задачи:

1. Разработать математическую модель распределенного акустического источника, формирующегося при численном моделировании турбулентного обтекания различных тел. Сформулировать математическую задачу по идентификации источника.
2. Разработать численный метод решения поставленной задачи, верифицировать его.
3. Реализовать метод в составе программного комплекса NOISEtte¹.
4. Провести расчеты для промышленно-ориентированной тестовой задачи, проверить корректность получаемых результатов, сопоставить результаты с результатами натурного бимформинга.
5. С использованием разработанного подхода решить задачу идентификации акустического источника, возникающего при турбулент-

¹I. V. Abalakin et al. "NOISEtte CFD&CAA Supercomputer Code for Research and Applications". In: *Supercomputing Frontiers and Innovations* 11.2 (2024), pp. 78–101.

ном обтекании крыла модели прототипа сверхзвукового пассажирского самолета.

Методы исследования

Для построения модели акустического источника, формируемого в задачах обтекания при проведении вычислительного эксперимента, использовалась теория обратных задач по восстановлению правой части для уравнения Гельмгольца в подвижной среде^{2,3}. В основе численного метода лежит применение конечно-элементного представления⁴ функции источника для аппроксимации оператора переноса излучения. При этом аппроксимация оператора переноса излучения сводится к вычислению интегральных сверток при помощи квадратурных/кубатурных формул Гаусса. Используется метод наименьших квадратов⁵, а также численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений⁶, в частности метод сопряженных градиентов⁷. Алгоритм реализован в составе программного комплекса NOISEtte⁸ на языке C++ с использованием технологий параллельных вычислений MPI, OpenMP для проведения расчетов на центральном процессоре, OpenCL – на графическом. Проверка метода на работоспособность производится путем сравнения приближенного решения с точным на тестовых примерах, а также путем сравнения с результатами натурного бимформинга. Проверка обоснованности получаемых результатов для практической задачи реализуется за счет анализа ближнего поля, получаемого в ходе проведения CFD-расчета, сравнения с теоретическими предположениями и практическими исследованиями о расположении источника для подобного типа крыльев, сравнения результатов для прямого и обратного методов.

Научная новизна

Научная новизна представленной работы состоит в следующем:

1. Впервые разработана специфическая математическая модель распределенного источника, формирующегося в процессе обтекания

²А. Н. Тихонов и В. Я. Арсенин. *Методы решения некорректных задач*. М.: Наука, 1979, с. 283.

³М. Е. Голдстейн. *Аэроакустика*. Под ред. А. Г. Мунина. Пер. Р. К. Каравасов и Г. П. Караушев. М.: Машиностроение, 1981, с. 294.

⁴Р. Галлагер. *Метод конечных элементов. Основы: Пер. с англ.* М.: Мир, 1984.

⁵А. Н. Колмогоров. “К обоснованию метода наименьших квадратов”. В: *Успехи математических наук* 1.1(11) (1946), с. 57—70.

⁶Lloyd N. Trefethen and David Bau III. *Numerical Linear Algebra*. 1st ed. Philadelphia: SIAM, 1997.

⁷Henk Van der Vorst. *Iterative Krylov Methods for Large Linear Systems*. Cambridge University Press, 2003, p. 221. ISBN: 9780521818285.

⁸Abalakin и др., см. сн. 1.

воздушным потоком летательного аппарата или его конструктивных элементов в рамках вычислительного эксперимента.

2. Разработан новый комплексный способ дискретизации поставленной задачи, включающий в себя численный метод и ограничения на геометрические параметры рассматриваемой конфигурации бимформинга, позволяющие получать устойчивые решения без использования явной регуляризации.
3. Впервые получены результаты идентификации акустического источника на крыле модели прототипа сверхзвукового пассажирского самолета на режиме посадки по результатам вихререзающего суперкомпьютерного моделирования.

Достоверность результатов

Корректность дискретной постановки задачи и численного метода ее решения проверяется на тестовых примерах с синтетическими данными как для модельных геометрических конфигураций, так и для применяемой для расчетов конфигурации из задачи по идентификации акустического источника на сегменте прямого крыла 30P30N с выпущенной механизацией. Сравнение приближенных решений с модельными демонстрируют устойчивость и единственность решения, а также высокую точность. Адекватность математической модели в совокупности с ее дискретизацией подтверждается путем сравнения получаемого решения с экспериментальными данными, полученными для той же задачи обтекания сегмента прямого крыла 30P30N с выпущенной механизацией на режиме посадки. Согласованность результатов для задачи по идентификации источника на крыле модели прототипа сверхзвукового пассажирского самолета показывается за счет сравнения решения обратной задачи с прямыми методами, а также анализа ближнего поля течения. Локализация полученного источника хорошо согласуется с теоретическими предположениями и практическими исследованиями механизмов генерации шума крыльями подобного типа.

Вычислительные эксперименты, результаты которых используются для проведения численного бимформинга, также прошли проверку на достоверность результатов⁹ по итогам анализа полей течения, шума

⁹А. В. Горобец и др. “Подходы к численному моделированию акустического поля, создаваемого крылом самолета с механизацией на режиме посадки”. В: *Математическое моделирование* 34.7 (2022), с. 24—48. DOI: 10 . 20948 /mm - 2022 - 07 - 02; Alexey P. Duben, Tatiana K. Kozubskaya, and Pavel V. Rodionov. “Wing Noise Simulation of Supersonic Business Jet in Landing Configuration”. In: *Supercomputing Frontiers and Innovations* 11.3 (Oct. 2024), pp. 74–92. DOI: 10 . 14529 / jsfi240305. URL: <https://superfri.org/index.php/superfri/article/view/575>.

в дальнем поле и сравнения с экспериментальными данными.

Практическая значимость работы

Разработанный подход может применяться для идентификации акустических источников, возникающих при обтекании летательных аппаратов, на основе данных вычислительного эксперимента. Это, в свою очередь, означает возможность их предварительной оценки на этапе проектирования ЛА, что может сократить расходы на его разработку и производство. Потенциальная возможность оптимизации акустических характеристик может достигаться за счет проведения серии CFD-расчетов и применения подхода численного бимформинга для различных конфигураций конструктивных элементов самолета. По результатам таких серий расчетов могут возникнуть предпосылки к выбору тех конфигураций, которые обеспечивают минимальный шум на местности, создаваемый летательным аппаратом.

Полученные численные оценки локализации и интенсивности акустических источников, возникающих на крыле модели прототипа сверхзвукового самолета, могут оказаться практически полезны при проектировке реального прототипа СПС. Результаты локализации акустических источников вдоль задней кромки крыла для разных полос частот могут повлиять на последующую оптимизацию акустических характеристик данного крыла для соответствия самолета сертификационным нормам.

Положения, выносимые на защиту

1. Разработана специфическая математическая модель распределенного акустического источника, допускающая наличие корреляции, в отличие от традиционных моделей, используемых в задачах натурного бимформинга.
2. Сформулированы дискретные постановки задачи численного бимформинга, обладающие свойствами единственности и устойчивости решения. Предложен численный метод решения задачи бимформинга, применяемого к данным вычислительного эксперимента, который в совокупности с ограничениями на параметры дискретизации не требует использования явной регуляризации для получения устойчивого решения.
3. Разработана параллельная программная реализация метода численного бимформинга в составе программного комплекса NOISEtte.
4. Представлены результаты сравнения решения, полученного методом численного бимформинга, с экспериментальными данными

для задачи идентификации акустического источника, формирующегося при обтекании прямого крыла 30P30N с выпущенной механизацией на режиме посадки, а также с данными, получаемыми при анализе полей течения для той же задачи. Показано, что полученные результаты хорошо согласуются как с экспериментальными наблюдениями, так и с результатами анализа структур численно воспроизведенного турбулентного течения.

5. Представлены результаты решения задачи идентификации акустического источника, формирующегося при обтекании крыла сверхзвукового самолета, на основе данных вихререзающего суперкомпьютерного CFD-расчета. Полученные результаты хорошо согласуются с существующими представлениями о локализации акустического источника в области задней кромки крыла.

Апробация результатов

Основные результаты, касающиеся как теории обратных задач, так и прикладной аэроакустики были изложены на следующих российских и международных конференциях:

1. Всероссийский аэроакустический форум (2021, г. Геленджик)
2. Круглый Стол НЦМУ «Сверхзвук» на VI Всероссийском молодежном научном форуме «Наука будущего – наука молодых и V Международной научной конференции «Наука будущего» (2021, виртуальная конференция)
3. IX российская конференция «Вычислительный эксперимент в аэроакустике и аэродинамике» (2022, г. Светлогорск)
4. XX научно-техническая конференция по аэроакустике (2023, г. Суз- даль)
5. Конференция «Современные проблемы обратных задач», посвященная 85-летию академика РАН В.Г. Романова (2023, г. Новосибирск, Академ- городок)
6. X российская конференция «Вычислительный эксперимент в аэроакустике и аэродинамике» (2024, г. Светлогорск)
7. «Обратные некорректные задачи и машинное обучение» (2024, г. Сочи, Сириус)
8. XXI научно-техническая конференция по аэроакустике (2023, г. Суз- даль)
9. XVII международная молодежная научная школа-конференция "Теория и численные методы решения обратных и некорректных за-

дач посвященная 80-летию со дня рождения профессора А.Г. Яголы, 29 сентября – 1 октября 2025 года, Новосибирск, Академгородок

10. IV международная научная конференция "Современные проблемы обратных задач посвященная 100-летию со дня рождения академика Г.И. Марчука, 2 – 4 октября 2025 года, Новосибирск, Академгородок

Публикации

Результаты исследований, представленные в диссертации, опубликованы в шести научных статьях, перечень которых приведён в конце работы. Из них 4 статьи входят в перечень изданий, рекомендованных ВАК, 4 индексируются в базе Web of Science (WoS) и 5 — в базе Scopus.

На программный модуль численного бимформинга NumBeamForm в составе комплекса NOISEtte при совместной работе с другими соавторами получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2020665710 (30.11.2020). Авторы: Плаксин Г.М., Софронов И.Л., Козубская Т.К.

Личный вклад автора

Автор самостоятельно провел анализ литературы и существующих подходов, совместно с научным руководителем сформулировал цель и задачи исследования. В ходе научных обсуждений с руководителем и консультантом разработал математическую модель и численный метод решения задачи. Реализация разработанного численного метода в виде программного модуля, проведение верификационных и валидационных экспериментов, решение прикладной промышленной задачи и анализ полученных результатов выполнены автором лично.

Благодарности

Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю д.ф.-м.н. Татьяне Константиновне Козубской за постановку задачи, задание направления в работе, ценные консультации и внимание к рабочему процессу. Автор также выражает искреннюю благодарность научному консультанту д.ф.-м.н. Ивану Львовичу Софронову за плодотворные обсуждения возникающих проблем, впоследствии сыгравшие роль в их решении. Автор благодарит к.ф.-м.н. Павла Алексеевича Бахвалова и д.ф.-м.н. Михаила Дмитриевича Сурначева за ключевые замечания и предложения по улучшению подхода, к.ф.-м.н. Павла Вадимовича Ро-

дионова и к.ф.-м.н. Алексея Петровича Дубеня за предоставленные результаты суперкомпьютерных расчетов, помощь в их обработке, ценные замечания и обсуждения.

Объем и структура диссертации

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы и списка публикаций автора по теме диссертации. Полный объем диссертации составляет 125 страниц, включая 66 рисунков, 4 таблицы. Список литературы содержит 63 наименования.

Поддержка работы

Диссертационная работа выполнена при поддержке Программы создания и развития научного центра мирового уровня «Сверхзвук» на 2020-2025 годы при финансовой поддержке Минобрнауки России (Соглашение от 25.04.2022 № 075-15-2022-330). Ресурсоемкие вычисления проводились с помощью гибридного суперкомпьютера К60, установленного в Суперкомпьютерном Центре коллективного пользования ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.

Содержание работы

Во **Введении** обоснована актуальность темы диссертационного исследования, представлен обзор существующих подходов к идентификации акустических источников на основе данных физического и вычислительного эксперимента (натурного и численного **бимформинга**), приведены некоторые особенности соответствующей обратной задачи, связанные с ней трудности, а также возможные пути их преодоления.

В **первой главе** формулируется задача численного бимформинга в виде обратной задачи по восстановлению правой части в уравнении Гельмгольца для подвижной среды для источников монопольного и дипольного типов.

Раздел 1.1 посвящен прямой задаче аэроакустики. Рассматривается постановка соответствующего вычислительного эксперимента, заключающегося, во-первых, в CFD (Computational Fluid Dynamics)-моделировании турбулентного обтекания воздушными массами некоторого тела, например, самолета или его конструктивных элементов. Приводится лежащая в основе CFD-моделирования система уравнений

Навье-Стокса для сжимаемой среды:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \nabla \cdot F(\mathbf{Q}) = \nabla \cdot F^v(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q}),$$

где

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{u} \\ E \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \rho \mathbf{u} \\ \rho \mathbf{u} \mathbf{u} + pI \\ (E + p)\mathbf{u} \end{pmatrix}, \quad F^v = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma \\ \sigma \cdot \mathbf{u} - \mathbf{q} \end{pmatrix},$$

ρ – плотность, \mathbf{u} – вектор скорости, p – давление, $E = \rho\varepsilon + \rho\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}/2$ – полная энергия, ε – удельная внутренняя энергия, I – единичная матрица, σ – тензор вязких напряжений, $\mathbf{q} = -k \nabla T$ – вектор теплового потока, T – температура, k – коэффициент теплопроводности.

Прямая задача аэроакустики формулируется в виде вычисления акустического поля в выбранных точках пространства \mathbb{R}^3 , не принадлежащих области нелинейного течения, путем численного решения уравнений Навье-Стокса (с возможным использованием линейных моделей) при моделировании турбулентного обтекания некоторого тела.

В этом же разделе рассматриваются линейные модели акустического приближения, позволяющие вычислять значения акустического поля в произвольной точке пространства, не лежащей в области нелинейного течения, на основе накопленных в некоторой области данных, полученных при численном решении уравнений Навье-Стокса. Особенностью таких моделей является более низкая вычислительная стоимость по сравнению с полным CFD-моделированием во всем пространстве, содержащем интересующие точки, а также возможность оперативного перерасчета при изменении расположения контрольных точек. В основе линейных моделей лежит приближение нелинейной задачи волновым уравнением с некоторым источником в правой части, содержащим исходную нелинейность системы. В качестве такой модели рассматривается, например, акустическая аналогия Фокса Уильямса-Хокинга (FWH)¹⁰,

¹⁰J.E. Ffowcs Williams and D.L. Hawkings. "Sound generation by turbulence and surfaces in arbitrary motion". In: *Philos. Trans. R. Soc. London. Ser. A, Math. Phys. Sci.* 264.1151 (1969), pp. 321–342. DOI: 10.1098/rsta.1969.0031.

позволяющая учитывать наличие твердых границ:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = & \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (T_{ij} H(f)) - \\ & - \frac{\partial}{\partial x_i} ([\sigma_{ij} n_j + \rho u_i (u_n - v_n)] \delta(f)) + \\ & + \frac{\partial}{\partial t} ([\rho_0 v_n + \rho (u_n - v_n)] \delta(f)). \end{aligned}$$

Здесь $H(f)$ – функция Хевисайда граничной поверхности, задаваемой уравнением $f = 0$, $\delta(f)$ – дельта-функция Дирака граничной поверхности, u_n – нормальная к граничной поверхности компонента вектора скорости, v_i – компонента вектора скорости граничной поверхности в направлении x_i , v_n – нормальная компонента вектора скорости граничной поверхности, n_i – компонента внешней нормали к граничной поверхности в направлении x_i .

В разделе 1.2 приводится формулировка **обратной задачи аэроакустики** (задачи **бимформинга**) по идентификации распределенного акустического источника на основании накапливаемых на записывающих шум устройствах (микрофонах) данных об акустическом поле, формируемом при обтекании некоторого объекта. Рассматривается пример *традиционного* бимформинга, заключающегося в поиске мощностей некоррелированных (некогерентных) точечных излучателей, в совокупности формирующих распределенный источник. Традиционный бимформинг часто применяется для обработки данных физического эксперимента, но при переносе на случай эксперимента вычислительного не учитывает его особенностей, таких как возможность размещать произвольное число микрофонов и их возможное движение вместе с исследуемым объектом.

Задача численного бимформинга, то есть бимформинга в применении к данным вычислительного эксперимента, в свою очередь, формулируется в виде обратной задачи по восстановлению правой части в уравнении Гельмгольца для подвижной среды в свободном пространстве. В этом случае возникает возможность отказаться от предположения о некоррелированности источника. Предполагается, что источник локализован на некоторой поверхности (или линии) S в трехмерном пространстве, а виртуальные микрофоны расположены в заданной геометрической конфигурации, например, также на поверхности (или линии) D . Возможная конфигурация поверхностей S и D приведена на рис. 1.

Источник при этом характеризуется непрерывной функцией его интенсивности. Тогда для источника монопольного типа задача численного бимформинга формулируется в виде задачи по нахождению плотности Q простого слоя в правой части уравнения Гельмгольца для подвижной среды в свободном пространстве по известному в некоторой области D акустическому полю P :

$$-\frac{1}{c^2} (i\omega + \mathbf{U} \cdot \nabla)^2 P(\mathbf{x}) + \Delta P(\mathbf{x}) = -Q(\mathbf{x})\delta_S, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3,$$

где δ_S – дельта-функция, определяющая поверхность S .

Задача численного бимформинга для источника дипольного типа представляет из себя обратную задачу по поиску плотностей простого Q и двойного F слоя по известному в некоторой области D акустическому полю P , удовлетворяющих уравнению Гельмгольца для подвижной среды в свободном пространстве:

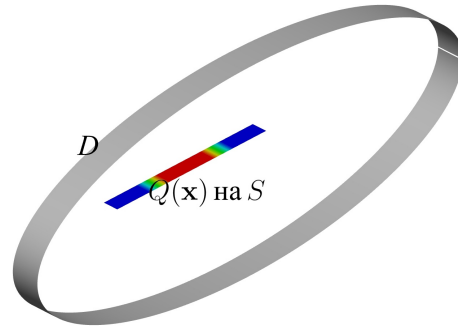


Рисунок 1: Возможная конфигурация поверхностей источника S и микрофонов D

$$-\frac{1}{c^2} (i\omega + \mathbf{U} \cdot \nabla)^2 P(\mathbf{x}) + \Delta P(\mathbf{x}) = -Q(\mathbf{x})\delta_S - \frac{\partial(F(\mathbf{x})\delta_S)}{\partial \mathbf{n}_S}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3,$$

где \mathbf{n}_S – заранее выбранная нормаль к поверхности S .

Глава 2 посвящена дискретной постановке задачи численного бимформинга, методу ее решения и его верификации.

В **разделе 2.1** рассматривается построение метода для источника монопольного типа. В основе численного подхода к решению задачи бимформинга лежит конечно-элементное представление функции источника, а также геометрические ограничения на шаги дискретизации сеток источника и решетки микрофонов. Оператор *переноса излучения* \mathcal{T} , связывающий функцию источника и акустическое давление, представляет собой интегральную свертку функции источника с функцией Грина G_M ^{11,12}. Тогда при дискретной аппроксимации \mathcal{T} удастся

¹¹Голдстейн, см. сн. 3.

¹²P. Sijtsma. “Experimental Techniques for Identification and Characterisation of Noise Sources”. In: *Advances in Aeroacoustics and Applications*. Ed. by J. Anthoine and A. Hirschberg. VKI Lecture Series.

построить матрицу \mathcal{T}_a , которой соответствует число обусловленности $C_a = \text{cond}(\mathcal{T}_a^* \mathcal{T}_a)$, принимающее значение меньше, чем 10^5 .

$$\begin{aligned}
 P(\mathbf{x}) &= (\mathcal{T}Q)(\mathbf{x}) = \int_S Q(\mathbf{y}) G_{\mathbf{M}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{x} \in D, \\
 G_{\mathbf{M}}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-ik'\tilde{x}}}{x'}, \\
 x' &= \sqrt{(\mathbf{M} \cdot \mathbf{x})^2 + \beta^2 |\mathbf{x}|^2}, \quad \beta^2 = 1 - |\mathbf{M}|^2, \quad k' = \frac{\omega}{c\beta^2}, \\
 \tilde{x} &= -(\mathbf{M} \cdot \mathbf{x}) + x', \quad \mathbf{M} = \frac{1}{c} \mathbf{U}
 \end{aligned} \tag{1}$$

Дискретная задача формулируется для случая линии и поверхности источника. Для конечно-элементного представления выбирается кусочно-линейный базис $\{\psi_n\}_{n=1}^N$, где N – число узлов сетки источника. В случае, когда микрофоны расположены в точках с координатами $\{\mathbf{x}\}_{m=1}^M$, матрица переноса излучения \mathcal{T}_a имеет вид:

$$(\mathcal{T}_a)_{mn} = \int_S \psi_n(\mathbf{y}) G_{\mathbf{M}}(\mathbf{x}_m - \mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}}. \tag{2}$$

Тогда связь сигналов на микрофонах и вектора интенсивности представима в виде:

$$\mathbf{d} = \mathcal{T}_a \mathbf{s} \tag{3}$$

Для нахождения вектора интенсивностей источника \mathbf{s} при использовании *данных бимформинга* $\tilde{\mathbf{d}}$ в узлах решетки микрофонов ставится условие минимизации нормы невязки $\tilde{\mathbf{d}} - \mathbf{d}$ с возможным добавлением стабилизирующего параметра $\gamma \geq 0$:

$$\|\tilde{\mathbf{d}} - \mathcal{T}_a \mathbf{s}\|_2^2 + \gamma \|\mathbf{s}\|_2^2 \rightarrow \min_{\mathbf{s}}.$$

Решение такой задачи имеет вид:

$$\mathbf{s} = (\mathcal{T}_a^* \mathcal{T}_a + \gamma I)^{-1} \mathcal{T}_a^* \tilde{\mathbf{d}}.$$

Исходя из физических и геометрических соображений, заключаю-

щихся в требовании различимости источников (дифракционный предел) и сигналов, приходящих от них на микрофоны, можно ввести следующие ограничения на шаг сетки источника dist_S , расстояние между микрофонами dist_D и расстояние между S и D dist_{SD} :

$$\begin{aligned} \text{dist}_{SD} &= a_{SD}\lambda, & a_{SD} &= \text{const} \\ \text{dist}_S &= a_S\lambda, & a_S &= \text{const}; \\ \text{dist}_D &= \frac{a_D}{a_S}\text{dist}_{SD}, & a_D &= \text{const}. \end{aligned} \quad (4)$$

Соблюдение ограничений (4) выступает в роли неявного предобуславливания системы (3).

В разделе 2.2 приводятся результаты тестирования метода на синтетических данных. Для соотношений (4) на основании численных расчетов подобраны универсальные коэффициенты:

- для случая источника на линии:

$$0.4 < a_S < 1.5, \quad 0.08 < a_D < 0.15. \quad (5)$$

- для случая источника на поверхности:

$$0.6 < a_S < 1.5, \quad 0.08 < a_D < 0.15. \quad (6)$$

Также проводится тестирование для проверки точности построенного метода в случае линии и поверхности источника при соблюдении ограничений (4), (5), (6). Суть такого тестирования заключается в генерации сигналов на микрофонах от референсной функции источника, определенной на подробной сетке, и последующем ее восстановлении на сетке более грубой. Микрофоны при этом располагаются на поверхности FWH из CFD-расчета по турбулентному обтеканию сегмента прямого крыла 30P30N с выпущенной механизацией. Результаты данного CFD-расчета используются в главе 4 для проверки работоспособности численного бимформинга. Метод показывает высокую точность при восстановлении кусочно-линейных референсных функций источника, см. рис. 2, причем выполняются теоретические предположения о зависимости числа обусловленности C_a от параметров дискретизации сетки источника: при слишком сильном измельчении сетки решение становится неустойчивым. Также отдельно стоит отметить выявленную важность точности интегрирования в (2), которое производится путем применения куба-

турных/квадратурных формул Гаусса. При малом числе узлов в формулах Гаусса приближенное решение может сильно отклоняться от референсного.

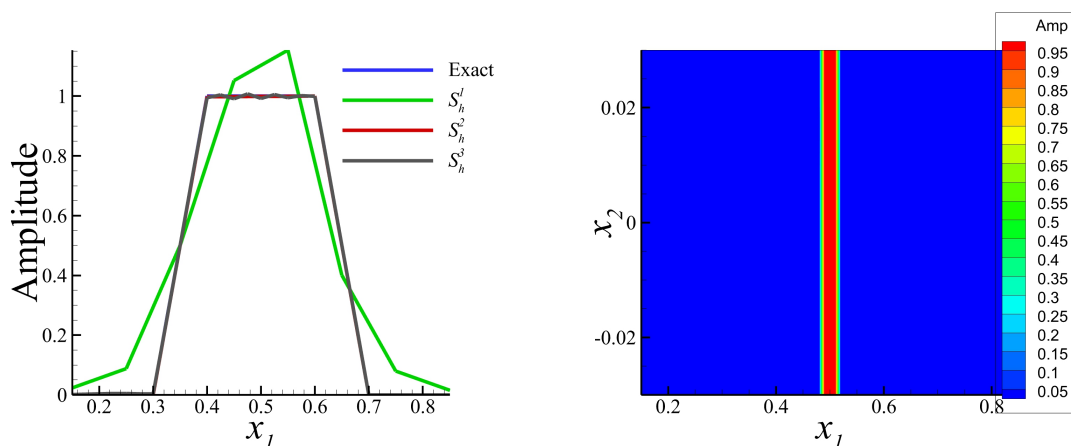


Рисунок 2: Графики точного и приближенных решений, полученных на сетках с различной степенью измельчения (слева). Приближенное решение, полученное в случае поверхности источника (справа)

Раздел 2.3 посвящен построению метода для источников дипольного типа. Рассматривается задача для плотностей простого и двойного слоя, а также задача для компонент дипольного момента в случае наличия априорной информации об отсутствии одной из его касательных компонент. Без подобных априорных ограничений задача по поиску компонент дипольного момента имеет неединственное решение. Численный метод для поставленных задач строится аналогично монополюльному случаю.

В **разделе 2.4** тестируется метод для решения дискретных задач для источника дипольного типа. Тестирование проводится по аналогии со случаем монополюльного источника. Обе поставленные дипольные задачи разрешаются с высокой точностью для референсной функции-гауссиана.

Глава 3 посвящена программной реализации метода численного бимформинга в программном комплексе NOISEtte¹³.

В **разделе 3.1** освещается общая структура модуля: взаимодействие с основным кодом NOISEtte, заимствованные структуры и классы, подключенные библиотеки.

Алгоритм решения задачи численного бимформинга рассматривается в **разделе 3.2**. Приводятся конкретные инструкции по построению кусочно-линейного базиса и формулы вычисления интегральной свертки

¹³Abalakin и др., см. сн. 1.

базисных функций с функцией Грина по треугольным элементам. Рассматривается подход к выводу физически интерпретируемых величин для оценки интенсивности найденных акустических источников.

Итоговый алгоритм приводится в **разделе 3.3**. На рис. 3 приведена блок-схема основной вычислительной части программного модуля NumBeamForm.

В **разделе 3.4** обсуждается пример параллельной реализации основного алгоритма. Рассматриваются принципы многопоточной и многопроцессорной схем. На рис. 4 показана характерная зависимость ускорения от числа потоков в режиме OpenMP. Также обсуждается адаптация алгоритма вычислений на графических процессорах и для гетерогенных вычислений.

В **главе 4** приводятся результаты проведения численного бимформинга для задачи внешнего обтекания сегмента модельного трехкомпонентного прямого крыла 30P30N с выпущенной механизацией на режиме посадки, его профиль изображен на рис. 5.

Постановка задачи рассматривается в **разделе 4.1**. Описывается постановка физического эксперимента¹⁴, пример применения натурального бимформинга к его данным, а также вычислительный эксперимент¹⁵, данные которого используются для проведения бимформинга численного. Результаты рассматриваемого физического эксперимента близки к результатам, полученным в ходе проведения численного моделирования.

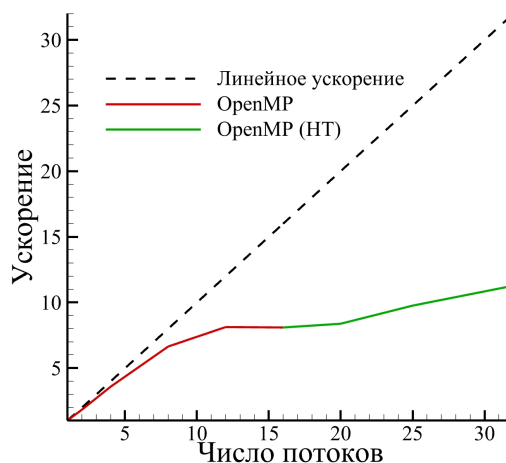


Рисунок 4: Зависимость ускорения от числа потоков в режиме OpenMP. Зеленая линия показывает ускорение при использовании технологии Hyper-Threading (HT)

¹⁴M. Sanders, L. de Santana, and C. Venner. "The Sweep Angle Effect on Slat Noise Characteristics of the 30P30N High-Lift Model in an Open-Jet Wind Tunnel". In: *AIAA 2020-2557, AIAA AVIATION 2020 FORUM*. June 2020.

¹⁵Горобец и др., см. сн. 9.

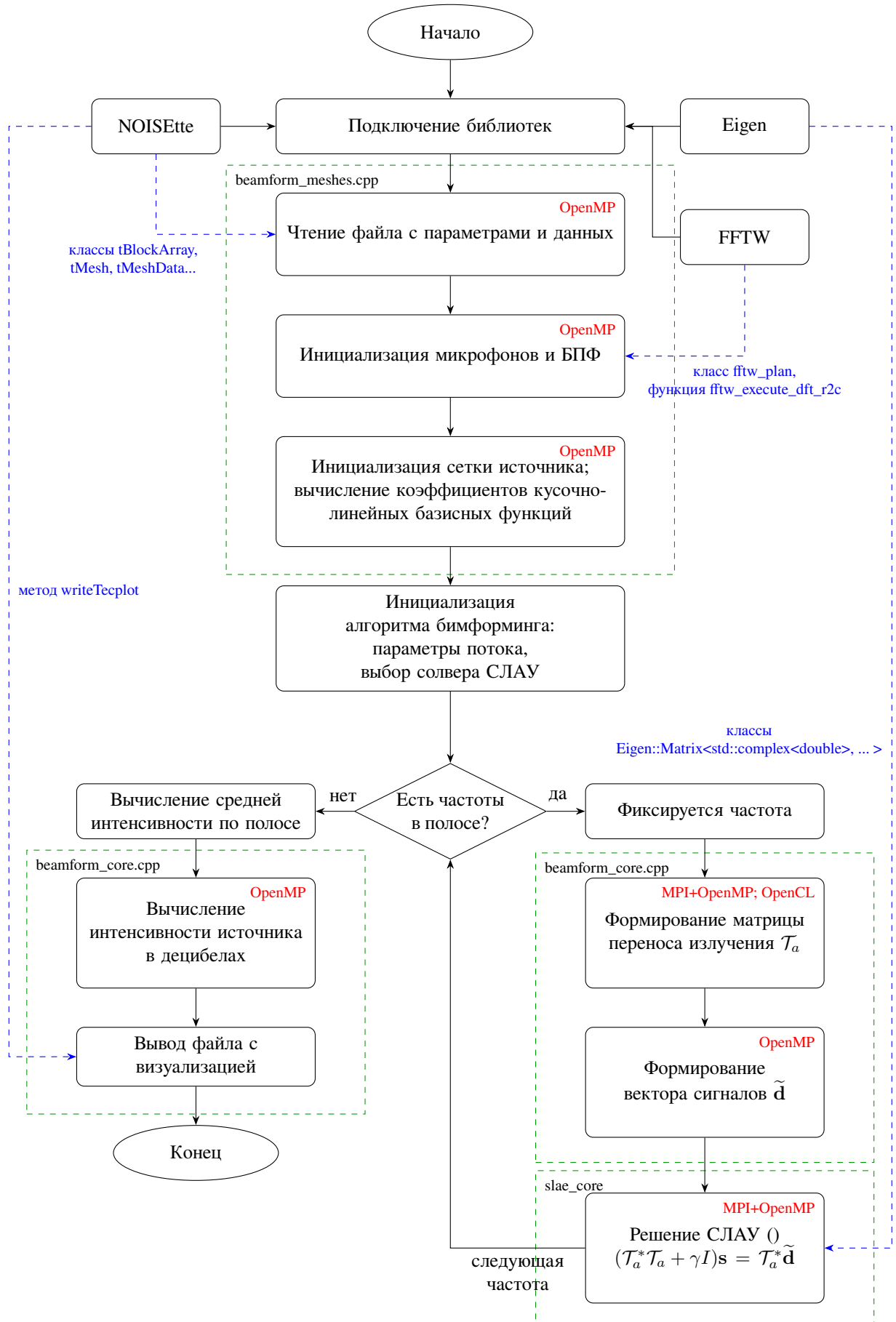


Рисунок 3: Схема основной вычислительной части программного модуля NumBeamForm

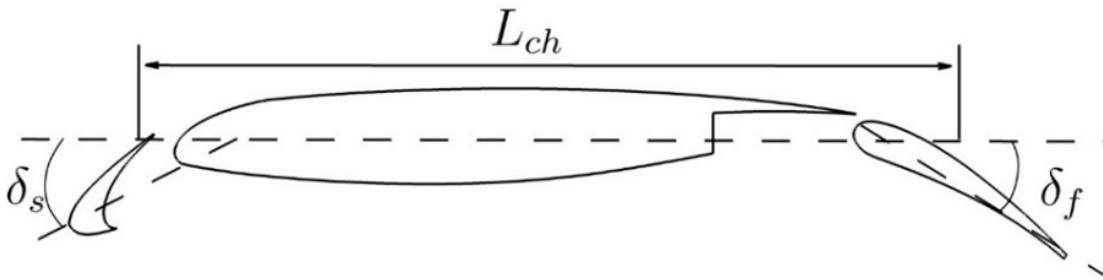


Рисунок 5: Конфигурация профиля 30P30N

В разделе 4.2 обосновывается выбор геометрической конфигурации для проведения численного бимформинга, которая изображена на рис. 6. Ввиду симметричности течения по размаху крыла, а также в силу того, что ширина сегмента меньше, чем рассматриваемая длина волны (безразмерная частота $St = 26.7$), выбирается постановка для линий источника и микрофонов. Микрофоны расположены или на эллипсе, окружающем линию («микрофоны по всему контуру», количество микрофонов $M = 550$), или на нижней его части («нижние микрофоны», $M = 179$) для того, чтобы восстанавливать источник, излучающий в сторону земли. Количество узлов сетки источника $N = 10$. Далее приводятся результаты синтетических тестов на устойчивость конфигураций для источников монопольного, дипольного и смешанного типов. Под задачей для источника дипольного типа подразумевается восстановление вертикальной и горизонтальной компонент момента, а для смешанного – монопольной и нормальной дипольной составляющих. Для выявления устойчивости оцениваются число обусловленности C_a , величины относительных невязок и погрешности решения, сравниваются исходные и восстановленные сигналы на микрофонах. Выявлено, что для источника монопольного типа устойчивость решения достигается при использовании конфигурации «нижние микрофоны», в то время как для источников дипольного и смешанного типов требуются «микрофоны по всему контуру».

В разделе 4.3 приводятся результаты численного бимформинга для сегмента прямого крыла 30P30N при использовании геометрических конфигураций, позволяющих получать устойчивое решение, для источников монопольного, дипольного и смешанного типов. Безразмерная частота равна $St = 26.7$. Решение для монопольного источника, полученное для конфигурации «нижние микрофоны», сравнивается с

результатами натурального бимформинга¹⁶, см. рис. 7. Основной источник локализуется на предкрылке и показывает хорошее согласование с экспериментальными данными. Однако численный бимформинг идентифицирует еще и источники на закрылке. Относительная невязка принимает значение $\delta_{mon} = 0.78$.

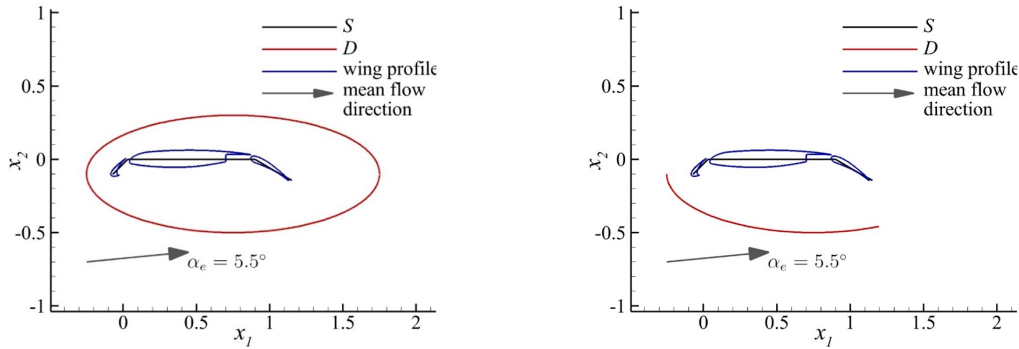


Рисунок 6: Геометрическая конфигурация линии источника и микрофонов. Конфигурация «микрофоны по всему контуру» (слева) и «нижние микрофоны» (справа)

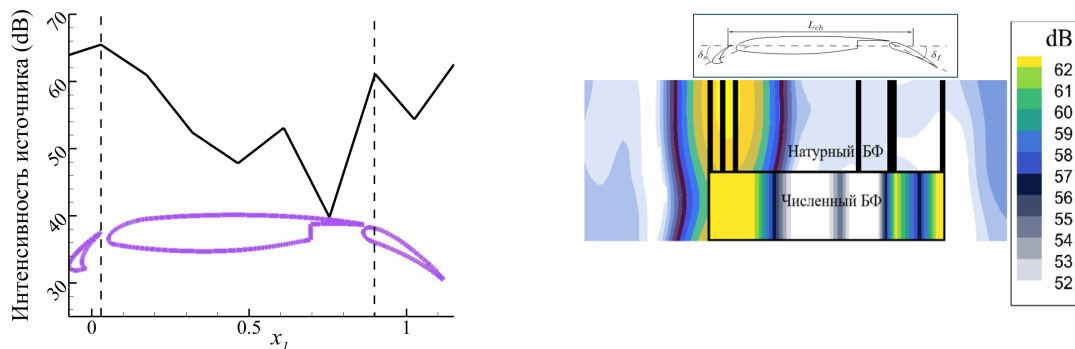


Рисунок 7: Функция источника, полученная численным бимформингом. Распределение функции вдоль профиля (слева) и сравнение результатов численного бимформинга и натурального бимформинга¹⁷(справа)

Также строится амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) источника monopольного типа, рис. 8. График АЧХ имеет качественное сходство с графиками спектров пульсации давления в точках ближнего поля в виде наличия пиков, соответствующих приблизительно тем же частотам $St \approx 11, 15.5, 21.5, 27$.

Далее рассматриваются источники дипольного и смешанного типов в конфигурации «микрофоны по всему контуру», относительные невязки для которых принимают значения $\delta_{dip} = 0.62$, $\delta_{mixed} = 0.52$ со-

¹⁶Sanders, Santana и Venner, см. сн. 14.

¹⁷Sanders, Santana и Venner, см. сн. 14

ответственно. И в том, и в другом случае разрешаются источники, преимущественно излучающие вверх. Найденное решение для источника дипольного типа приведено на рис. 9, для смешанного типа – на рис. 10. Видно, что, как и в случае источника монополярного типа, акустический источник обладает наибольшей интенсивностью на предкрылке.

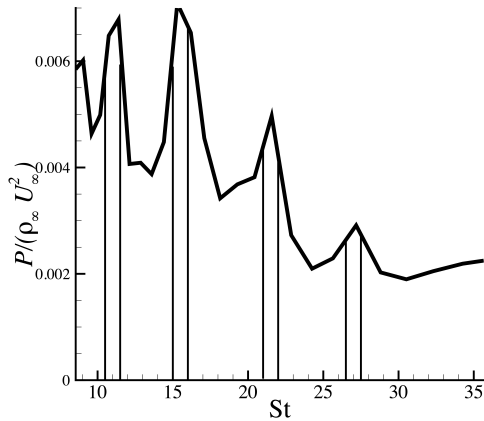


Рисунок 8: Амплитудно-частотная характеристика монополярного источника, локализованного на крыле

В качестве проверки полученных результатов для источника дипольного типа производится сравнение акустических полей, излученных этим источником, с результатами анализа CFD-течения¹⁸, рис. 11. Выявлено качественное сходство локализации дипольного источника на предкрылке.

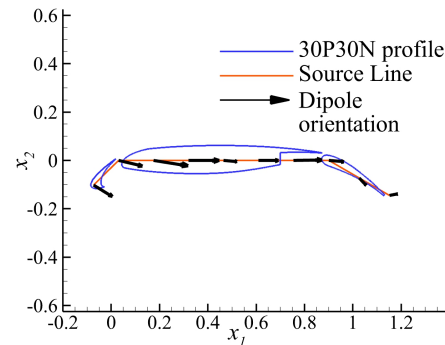
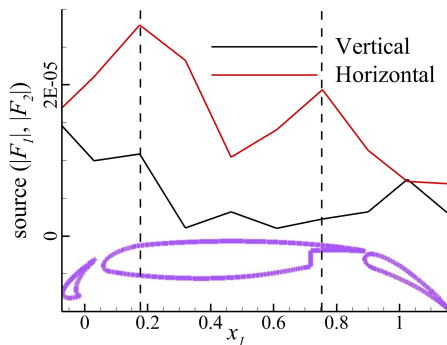


Рисунок 9: Полученные интенсивности вертикальной и горизонтальной компонент (слева) и векторы дипольного момента (справа)

¹⁸J. Housman et al. “Predictions of Slat Noise from the 30P30N at High Angles of Attack using Zonal Hybrid RANS-LES”. In: *AIAA 2019-2438, 25th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. May 2019.

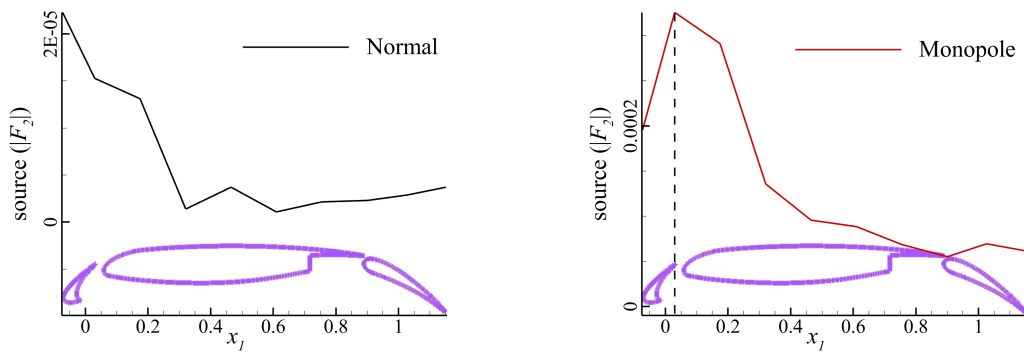


Рисунок 10: Полученные интенсивности вертикальной компоненты диполя (слева) и монополярной составляющей (справа)

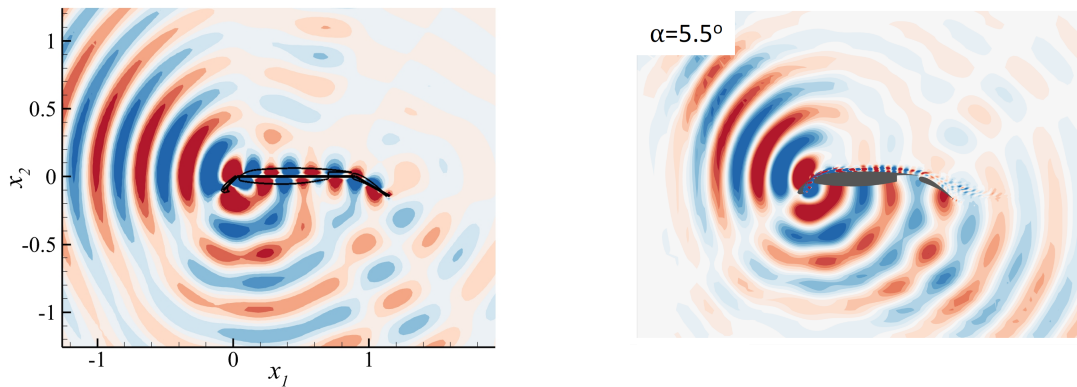


Рисунок 11: Акустическое поле давления, вычисленное по найденному источнику дипольного типа (слева), рисунок из¹⁹: вещественная часть коэффициентов Фурье поля давления (справа) на частоте $St \approx 15$

В этом же разделе рассматривается влияние наличия априорной информации на разрешимость задачи. Исходя из характера излучения, изображенного на рис. 11, рассматривается составной источник, состоящий из точечного диполя в зазоре между крылом и предкрылоком, а также на левой границе линии источника. При этом добавляется простой слой (горизонтальная компонента распределенного дипольного источника) вдоль всего профиля. Рассматривается конфигурация «нижние микрофоны». Для такого источника относительная невязка составляет $\delta = 0.098$. Решение данной задачи, а также сигналы на микрофонах представлены на рис. 12.

¹⁹Housman и др., см. сн. 18

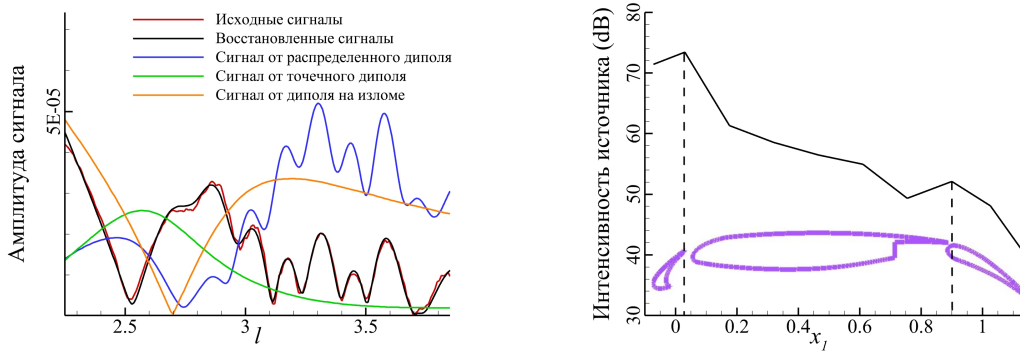


Рисунок 12: Данные на микрофонах: исходные и восстановленные. Дипольный источник с горизонтальной компонентой момента с добавлением точечных диполей, «нижние микрофоны» (слева). Интенсивность распределенного горизонтального дипольного источника с добавлением точечных диполей (справа)

В главе 5 рассматриваются результаты по идентификации акустического источника на крыле модели прототипа сверхзвукового пассажирского самолета (СПС).

В разделе 5.1 приводится постановка вычислительного эксперимента²¹ по турбулентному обтеканию крыла модельного СПС (геометрия приведена на рис. 13), данные которого берутся для проведения численного бимформинга.

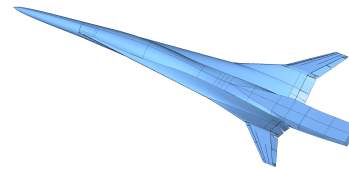


Рисунок 13: Геометрия модели прототипа планера сверхзвукового пассажирского самолета²⁰

Раздел 5.2 посвящен выбору конфигурации для проведения численного бимформинга, которая приведена на рис. 14. Количество узлов сетки источника $N = 165$, микрофонов – $M = 18020$. Проводятся синтетические тесты для проверки устойчивости для такой конфигурации для источника монопольного типа, а также для источника дипольного типа с моментом, направленным по

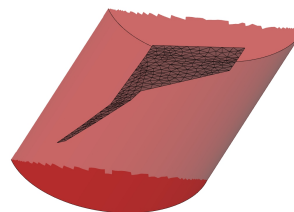


Рисунок 14: Геометрия области источника (серая) и микрофонной поверхности (красная) для проведения численного бимформинга для крыла СПС

²⁰Duben, Kozubskaya и Rodionov, см. сн. 9

²¹Duben, Kozubskaya и Rodionov, см. сн. 9.

нормали к поверхности источника.

В разделе 5.3 приводятся результаты численного бимформинга для крыла модельного СПС для частоты $f = 500$ Гц для выбранной геометрической конфигурации и типов источника. Визуализация найденных интенсивностей приведена на рис. 15, которая принимает наибольшие значения в области задней кромки крыла, что хорошо согласуется с теоретическими и практическими результатами для крыльев подобного типа^{22,23}. Также проводится сравнение с результатами применения традиционного бимформинга к тем же данным, демонстрируется хорошее согласование. Такие задачи для выбранной конфигурации имеют устойчивые решения.

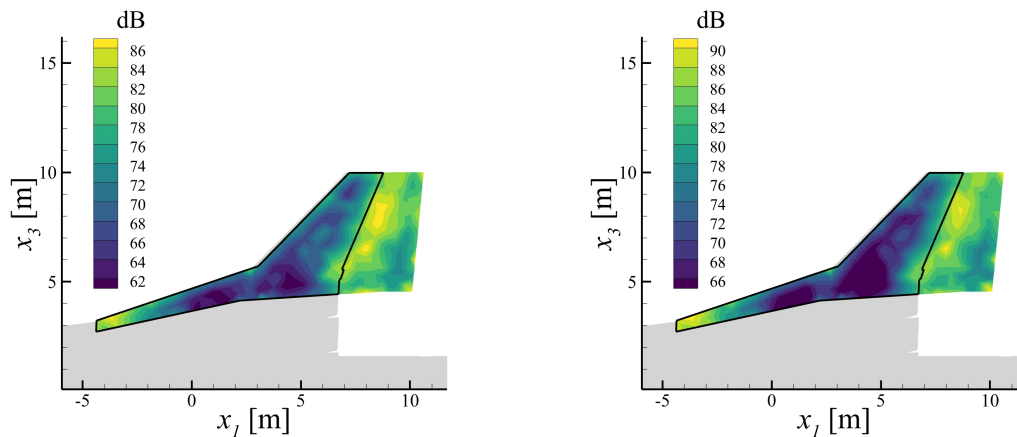


Рисунок 15: Результаты решения задачи численного бимформинга для крыла СПС. Интенсивность источника (SPL), центральная частота $f = 500$ Гц. Источник монопольного типа (слева) и дипольного с моментом, ориентированным по нормали к поверхности источника (справа)

Для проверки работоспособности рассматриваемого алгоритма численного бимформинга в задаче идентификации источника на крыле модели прототипа сверхзвукового пассажирского самолета проводится следующая процедура. В среднем поле размещаются четыре контрольные точки. В этих контрольных точках вычисляются сигналы согласно акустической аналогии FWH²⁴ – прямой метод. Далее проводится «массовый» бимформинг. Он заключается в том, что диапазон частот $100 \text{ Гц} < f < 1000 \text{ Гц}$ разбивается на непересекающиеся диапазоны шириной

²²R.K. Amiet. “Noise due to turbulent flow past a trailing edge”. In: *Journal of Sound and Vibration* 47.3 (1976), pp. 387–393. ISSN: 0022-460X. DOI: 10.1016/0022-460X(76)90948-2. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022460X76909482>.

²³Thomas Brooks, Dennis Pope, and Michael Marcolini. *Airfoil self-noise and prediction*. Vol. 1218. Aug. 1989. URL: <https://ntrs.nasa.gov/api/citations/19890016302/downloads/19890016302.pdf>.

²⁴Ffowcs Williams и Hawkins, см. сн. 10.

100 Гц, для каждой из которых строится своя сетка, удовлетворяющая условиям «корректности». Перебирая частоты внутри каждой такой полосы, проводится численный бимформинг, после чего излучение переносится от найденных источников в выбранные контрольные точки. На рис. 16 для монопольного типа источника приведены спектры сигналов, восстановленных в рамках описанного подхода; соответствующие кривые показаны зеленым цветом. Высокая степень согласования кривых для прямого и обратного метода может говорить о том, что обратная задача решена корректно.

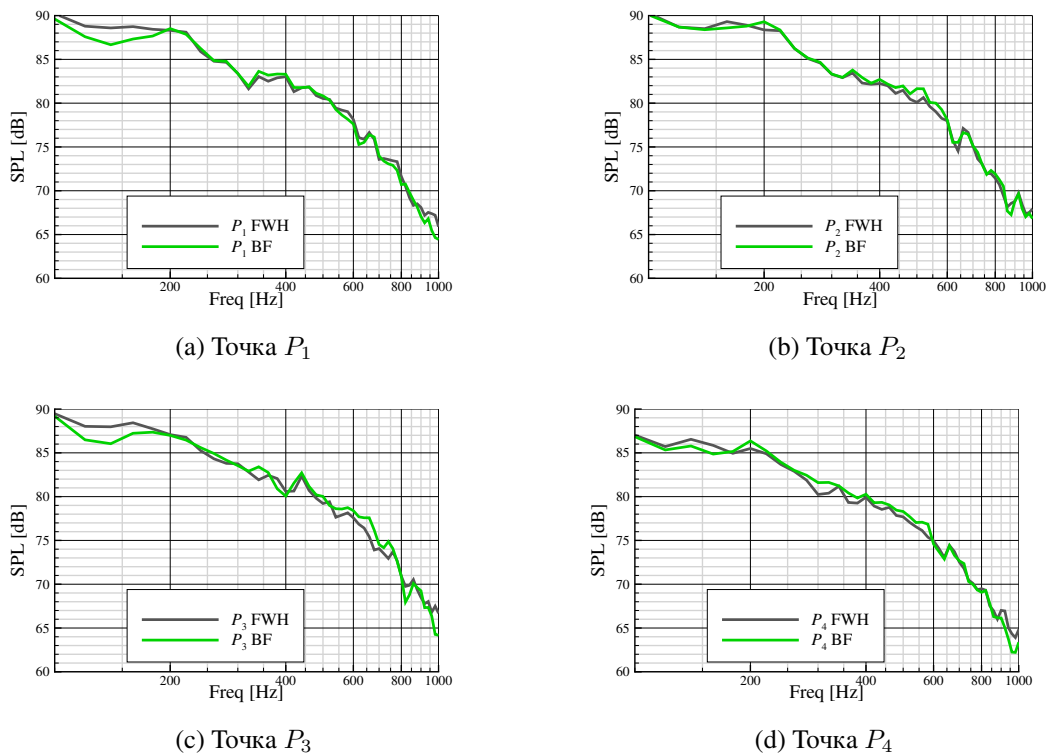


Рисунок 16: Сравнение спектров сигналов, посчитанных по методу FWH (серый) и излученных от найденных численным бимформингом источников (зеленый), в контрольных точках. Источник монопольного типа

В Заключение сформулированы основные результаты диссертационной работы.

1. Разработана математическая модель распределенного акустического источника, возникающего при турбулентном обтекании летательного аппарата и его конструктивных элементов. Модель представляет собой обратную задачу по поиску плотности простого слоя или плотностей простого и двойного слоя (в случаях монопольного и дипольного источника соответственно) в правых частях уравнения Гельмгольца. Особенностью модели является возможность использования большо-

- го объема данных вычислительного эксперимента, что позволяет отказаться от предположения о некоррелированности источника.
2. На основе конечно-элементного подхода сформулирована дискретная задача численного бимформинга. Для обеспечения корректности постановки предложен физически обусловленный способ снижения числа обусловленности используемой матрицы.
 3. Разработанный метод численного бимформинга реализован в модуле NumBeamForm в составе программного комплекса NOISEtte.
 4. Работоспособность и эффективность метода численного бимформинга продемонстрированы применительно к промышленно-ориентированной тестовой задаче по идентификации акустического источника на сегменте прямого крыла с выпущенной механизацией.
 5. С помощью метода численного бимформинга выявлены акустические источники на крыле модели прототипа сверхзвукового пассажирского самолета на режиме посадки.

Публикации автора по теме диссертации

1. Козубская Т.К., **Плаксин Г.М.**, Софронов И.Л. Постановка и метод решения задачи бимформинга для локализации акустического источника на основе данных вычислительного эксперимента // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2021, Т. 61, стр. 1904-1926. DOI: 10.31857/S0044466921110120
(Перечень ВАК)
Версия: Kozubskaya T.K., **Plaksin G.M.**, Sofronov I.L. Statement of the Beamforming Problem and a Method of Its Solution for the Localization of an Acoustic Source Based on Computational Experiment Data // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2021, 61(11), pp. 1864–1885. DOI: 10.1134/S0965542521110129
(WoS, Scopus)
2. Karakulev A., Kozubskaya T., **Plaksin G.**, Sofronov I. Ffowcs Williams – Hawkings analogy for near-field acoustic sources analysis // International Journal of Aeroacoustics, 2022, 21(5-7), pp. 457–475 (Online). DOI: 10.1177/1475472X221107367 (WoS, Scopus)
3. Kozubskaya T.K., **Plaksin G.M.**, Sofronov I.L. On numerical beamforming for correlated dipole type sources // Ж. Вычисл. Матем. И матем. Физ., 2023, 63(11), стр. 1923. DOI: 10.31857/S0044466923110182
(Перечень ВАК)

Версия: Kozubskaya T.K., **Plaksin G.M.**, Sofronov I.L. On Numerical Beamforming for Correlated Dipole-Type Sources // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2023, 63(11), pp. 2162–2175. DOI: 10.1134/S0965542523110131

(WoS, Scopus)

4. **Плаксин Г.М.**, Козубская Т.К., Софронов И.Л. О численном бимформинге для идентификации акустического источника по данным суперкомпьютерного моделирования / Доклады российской академии наук Раздел (Математика, Информатика, Процессы управления), 2024, Т. 64, с. 52–59. DOI: 10.31857/S2686954324050098

(Перечень ВАК)

Версия: **Plaksin G.M.**, Kozubskaya T.K., Sofronov I.L. On Numerical Beamforming for Acoustic Source Identification Based on Supercomputer Simulation Data // Doklady Mathematics, 2024, 110(2), pp. 435–441. DOI: 10.1134/S1064562424601550 **(WoS, Scopus)**

5. Kozubskaya T.K., **Plaksin G.M.**, Sofronov I.L., Rodionov P.V. Numerical Study of Noise Sources Generated by Wing of Supersonic Business Jet in Landing Mode // Supercomputing Frontiers and Innovations, 2025, 12(1), pp. 112–132. DOI: 10.14529/jsfi250108

(Scopus)

6. **Плаксин Г.М.** Реализация метода численного бимформинга в программном комплексе NOISEtte // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша, 2025, №79, стр. 1-16

(перечень ВАК)

Плаксин Глеб Максимович

Метод численного бимформинга в вычислительном эксперименте в аэроакустике

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать 02.04.2026. Заказ № А-4.

Формат 60x90/16. Усл. печ. л. 1.5. Тираж 90 экз.

ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, 125047, Москва, Миусская пл., 4