

Федеральное государственное автономное учреждение «Федеральный
научный центр Научно-исследовательский институт системных
исследований» Национального исследовательского центра «Курчатовский
институт»

На правах рукописи

Пестов Дмитрий Александрович

**Исследование взаимного влияния трещин на направление их
роста в различных условиях нагружения**

1.2.2 – математическое моделирование, численные методы и комплексы
программ

Автореферат

Диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2025

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном учреждении «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований» Национального исследовательского центра «Курчатовский институт».

Научный руководитель:

Смирнов Николай Николаевич

доктор физико-математических наук, профессор,
Заместитель заведующего отделением
фундаментальных и прикладных исследований
НИЦ «Курчатовский институт» – НИИСИ

Официальные оппоненты:

Савенков Евгений Борисович

доктор физико-математических наук,
член-корреспондент РАН, заместитель директора по
научной работе ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (г.
Москва)

Боронин Сергей Андреевич

кандидат физико-математических наук, старший
преподаватель Сколковского института науки и
технологий (г. Москва)

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное учреждение
науки Институт проблем машиноведения Российской
академии наук (г. Санкт-Петербург)

Защита состоится 11 декабря 2025 г. в 14:00 часов на заседании диссертационного совета 24.1.237.01, созданного на базе ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, расположенного по адресу: 125047, г. Москва, Миусская пл., д.4

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ИПМ им. М.В. Келдыша РАН https://keldysh.ru/council/3/D00202403/pestov_da_diss.pdf

Автореферат разослан «___» _____ 2025 г.

Ученый секретарь диссертационного совета 24.1.237.01

к.ф.-м.н.

М.А. Корнилина

Актуальность работы.

Задача вычислительного моделирования прочности материалов и конструкций является одной из важнейших инженерных задач. Одним из основных механизмов разрушения является рост и объединение микродефектов среды, называемых трещинами. Рост трещин может иметь различную природу. Это может быть хрупкое разрушение под действием больших нагрузок, коррозионное разрушение под действием сочетания химических и механических процессов, рост усталостных трещин под действием циклических нагрузок или рост трещин под действием внутреннего давления, который может быть как умышленным, как в процессе гидроразрыва, где рост трещин под давлением закачиваемой жидкости увеличивает проницаемость нефтенесущих пластов, так и случайным, как рост трещин в зданиях или дорожном покрытии, когда попавшая в полости материала вода расширяется при замерзании.

Задачи математического моделирования процессов роста трещин и их взаимного влияния приобретают особую актуальность в свете разработки вычислительных кодов для предсказательного моделирования роста и взаимодействия трещин в различных средах, включая конструкционные материалы или взаимодействие трещин гидроразрыва с природными разломами или другими трещинами при многостадийном ГРП. При этом, учитывая большую относительную протяженность системы трещин по сравнению с толщиной отдельной трещины, задача вычислительного моделирования механики трещин становится сложной ввиду малости расчетной ячейки, сравнимой с толщиной трещины и, как следствие, необходимости введения большого количества ячеек в трехмерной расчетной области. Поэтому, встает актуальная задача применения точных фундаментальных решений уравнений теории упругости для сокращения времени вычислений. В диссертации разрабатываются методы граничных элементов для решения интегральных уравнений и технологии их применения в задачах взаимодействия и ветвления трещин в материалах. Применение таких методов позволяет понизить размерность решаемой задачи: для трехмерных объектов ограничиться рассмотрением сеток только на двумерных границах, а для двумерных задач ограничиться рассмотрением условий на кривых, отображающих каждую трещину или свободную границу. Решение же во всей области получается как линейная комбинация фундаментальных решений с соответствующими весами, определяемыми из граничных условий. Это позволяет достичь существенного сокращения времени вычислений. Механика разрушения и, в частности, механика трещин активно развивалась на протяжении прошлого века, было получено много точных решений, множество задач были или решены или достаточно хорошо изучены. Так были получены критерии роста трещин, в том числе и критерии определения направления дальнейшего роста. Изучены вопросы распространения усталостных трещин, получены зависимости скорости их роста от перепадов приложенных нагрузок. Существенное развитие получили задачи моделирования трещин гидроразрыва, получены как аналитические, так и множество численных решений. Для статических задач о нагружении тел, ослабленных трещинами, получено множество аналитических решений в плоских случаях для различного взаимного расположения трещин и границ тела, а также получено некоторое количество аналитических решений для трехмерных случаев.

Таким образом, задачи с одиночными трещинами достаточно хорошо изучены в различных их аспектах, в том числе и в вопросе роста криволинейных трещин. Задачи с множественными трещинами сильно более тщательно изучены в статической постановке. Задачи же взаимодействия растущих трещин изучены заметно слабее ввиду того, что решение большинства из них возможно только численно, а множество параметров взаимодействия усложняет получение каких-либо общих законов и закономерностей.

Также одной из важных проблем моделирования трещин и, особенно, взаимодействия трещин, является нелинейность данной задачи в случае, если берега какого-либо участка трещин сомкнутся. В таком случае граничные условия на сомкнутом

участке меняются, что требует иного подхода к численному решению данных задач. Такая проблема встречается при моделировании взаимодействия трещин гидроразрыва с природными разломами, а также в других условиях, когда трещина растет в среде, находящейся под действием сжимающих напряжений.

В данной работе исследовано взаимодействие растущих криволинейных трещин и получены оценки взаимного влияния трещин на траекторию и прочностные характеристики в зависимости от взаимного расположения трещин.

Предложенная в данной работе модификация метода разрывных смещений позволяет решать нелинейные задачи с частично закрытыми системами трещин без необходимости итеративного пересчета всей матрицы коэффициентов метода, что существенно уменьшает вычислительную сложность данной задачи.

Цели работы.

Основной целью данной работы является оценка необходимости применения моделей криволинейного роста трещин в задачах взаимодействия трещин друг с другом или с другими неоднородностями среды. Ввиду более высокой по сравнению с моделями прямолинейных трещин вычислительной сложности данные модели зачастую не применяются в ситуациях, где они необходимы. Кроме того возможны и случаи, где без их применения можно обойтись, не теряя существенно в точности.

Одним из случаев, которые следует исследовать, является взаимодействие трещины с малыми дефектами среды. Так вопрос предсказания траектории трещины в среде, содержащей множество дефектов является достаточно малоизученным и может быть применимым для задач о росте трещин в неоднородных средах. Также важным является вопрос взаимодействия трещин с другими существующими в среде трещинами. Для системы трещин одной из существенных характеристик является коэффициент влияния: отношение вычисляемых коэффициентов интенсивности в кончиках трещин системы к теоретическим значениям коэффициентов интенсивности напряжений для одиночной трещины той же длины. Коэффициенты интенсивности напряжений позволяют прогнозировать рост и направление движения трещин, а коэффициент влияния – сравнивать возможности роста трещин системы в различных направлениях с известными результатами для одиночных трещин. Оценка данных коэффициентов может упростить оценку необходимости применения разрабатываемой модели в различных случаях.

Другим важным вопросом является взаимодействие активной трещины с закрытыми трещинами, оценка условий, при которых эти трещины будут активироваться и открываться, а также оценка взаимного влияния этих трещин, что может быть полезно в задачах оценки взаимодействия трещин гидроразрыва с природными разломами или существующими трещинами гидроразрыва.

Научная новизна работы.

В работе предложен новый метод, позволяющий моделировать рост криволинейных трещин с учетом взаимного влияния трещин и возможного смыкания берегов трещин под действием сжимающих напряжений.

С использованием разработанного метода в работе впервые исследовано взаимное влияние растущих криволинейных трещин в упругой плоскости и получены критерии оценки исходов их взаимодействия. Исследовано влияние трещины на траекторию и возможность роста окружающих трещин.

С использованием разработанного метода впервые показана устойчивость траектории трещины нормального отрыва к малым отклонениям и дефектам среды, а также изучено влияние случайных отклонений на траекторию роста трещины.

Достоверность результатов.

Предложенный в работе метод решения задачи о росте криволинейных трещин основан на граничноэлементном методе разрывных смещений, показавшем свою эффективность в решении задач для тела, ослабленного наличием трещин. Достоверность полученных результатов установлена путем сравнения с имеющимися аналитическими решениями и экспериментальными данными. Определены границы применимости данного метода. В пределах границ применимости показано хорошее совпадение численных характеристик и траектории трещины. Дальнейшее исследование проведено с учетом границ применимости, в которых верификация показала надёжность и достоверность результатов используемого численного метода.

Теоретическая и практическая ценность работы.

Теоретическая ценность работы заключается в разработанных методах, которые могут быть использованы в других задачах моделирования роста трещин при наличии контакта между их берегами. Показанная устойчивость траекторий растущих трещин к малым отклонениям позволяет использовать разработанные методы и в задачах с неоднородными средами или с наличием других дефектов. Прикладная ценность работы связана с полученными критериями необходимости применения моделей криволинейного роста для задач взаимодействия растущих трещин. Такая задача часто встречается при проведении гидроразрыва, как в формате взаимодействия трещины гидроразрыва с естественными разломами, так и в виде взаимодействия трещин при многостадийном гидроразрыве пласта.

Апробация работы.

Результаты работы были представлены на российских и международных конференциях:

1. Ломоносовские чтения. Секция механики. (г. Москва, 2025, 2024, 2021, 2020).
2. Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (г. Москва, 2024, 2023, 2021)
3. VI Всероссийская конференция молодых учёных-механиков YSM-2023 (г. Сочи, 2023)
4. 50th The International Summer School-Conference “Advanced Problems in Mechanics — 2022” (г. Санкт-Петербург, 2022)
5. IX международный научно-практический симпозиум «Безопасность космических полетов» (г. Санкт-Петербург, 2022)
6. Международная научно-практическая конференция "Инновационные решения в геологии и разработке ТРИЗ" (г. Москва, 2021)

А также на научно исследовательских семинарах:

1. Научно-исследовательский семинар кафедры волновой и газовой динамики механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова (2024)
2. Научно-исследовательский семинар кафедры механики композитов механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова (2024)
3. Научно-исследовательский семинар кафедры теории упругости механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова (2024)
4. Научно-исследовательский семинар кафедры теории пластичности механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова (2024)
5. Семинар лаборатории моделирования многофазных систем Сколковского института науки и технологий (2025)
6. Семинар ИПМ им. М.В. Келдыша РАН «Математическое моделирование» (2025)

По теме диссертации опубликованы 5 статей в научных журналах. Из них три опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных изданий, рекомендованных

Высшей аттестационной комиссией, две – в журналах, индексируемых в базе данных Scopus. Также опубликована глава в монографии.

Личный вклад.

Автором самостоятельно разработана модель криволинейного роста трещин, и реализована вычислительная программа. Полученные результаты, изложенные в диссертации, получены лично автором. Автором единолично опубликована одна работа по теме публикации. Результаты, относящиеся к диссертации, в работах, опубликованных в соавторстве, получены лично автором. В совместной работе с Звягиным А.В и Шаминой А.А. им принадлежат результаты, относящиеся к трёхмерным трещинам. В совместной работе с Ли К. последнему принадлежат постановка и результаты, связанные с плоско-трехмерной моделью трещины гидроразрыва. В совместных работах с Акулич А.В. ей принадлежит метод решения задачи роста прямолинейной трещины гидроразрыва с учетом отставания фронта жидкости от кончика трещины. Смирнову Н.Н. принадлежат некоторые постановки задач и общее научное руководство.

Положения, выносимые на защиту.

1. Предложен новый метод моделирования роста криволинейных трещин в упругой среде в плоской постановке. Модель развития трещины учитывает наличие нескольких трещин произвольной конфигурации с учетом возможного контакта берегов трещин.

2. Разработан и программно реализован вычислительный алгоритм для анализа развития системы трещин с учетом контактных условий на их берегах. Проведена его верификация и валидация. Показано точное (с отклонением менее 3%) совпадение численно предсказанной траектории растущей криволинейной трещины с экспериментом, а также устойчивость предложенного метода моделирования по отношению к выбору параметров алгоритма.

3. Показано, что траектория трещины при наличии внешнего перепада напряжений устойчива к малым возмущениям её начального состояния и траектории, в том числе случайным. Это обосновывает применимость разработанного метода для анализа развития систем трещин в неоднородных материалах или средах с дефектами, если характерный размер неоднородностей много меньше масштабов задачи.

4. С использованием разработанного метода определены критерии взаимодействия изначально параллельных трещин в ходе их роста. Определен характер зависимости критического расстояния между трещинами от режима нагружения и их длин.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и списка литературы. Работа представлена на 86 листах. Список литературы включает в себя 192 источника.

Во **введении** приведен обзор литературы по вопросам роста криволинейных трещин. Рассмотрена история возникновения механики трещин и её основополагающие работы. Далее приведен обзор работ касающихся критериев распространения трещин, а также определения направления их роста как для двумерных, так и для трехмерных задач с трещинами.

Также уделено внимание численным методам решения задач о телах, ослабленных трещинами, рассмотрены их преимущества и недостатки. Так использование методов конечных элементов позволяет моделировать тела произвольной геометрии под действием различных нагрузок. Однако применение таких методов к трещинам сопряжено со сложностями ввиду того, что трещины по сути представляют собой кривые на плоскости или поверхности в трехмерном теле, то есть один из их геометрических размеров мал в сравнении с размерами конечных элементов. Для корректного моделирования в окрестности трещин приходится измельчать сетку, вводить дополнительные степени

свободы или применять иные способы обеспечения точности расчетов, что приводит к дополнительным вычислительным сложностям, уменьшению точности и необходимости перестраивать расчетную сетку при росте трещин. В общих чертах, методы конечных элементов хорошо применимы, когда тело, содержащее трещины имеет сложную структуру, например для композитов или неоднородных тел, а трещины, наоборот, имеют достаточно простую форму.

Другим подходом к моделированию трещин является применение методов граничных элементов, где на элементы разбивается не всё тело, а его граница, в том числе поверхность трещины. Для корректного решения на поверхности трещины используются специальные граничные элементы, поскольку классические методы граничных элементов там неприменимы ввиду вырождения уравнений. Сложностью таких методов является нахождение подходящих решений. К преимуществам можно отнести меньшую вычислительную сложность моделирования трещины, поскольку на элементы разбивается не всё тело, а только поверхность трещины. К недостаткам можно отнести сложность моделирования тел сложной геометрии или внутренней структуры.

Также в обзоре уделено внимание работам, посвященным задаче роста трещин гидроразрыва, как одной из задач, где моделирование роста криволинейных трещин, а также оценки траектории трещин при взаимодействии наиболее актуальны. Приведен обзор различных моделей трещин гидроразрыва, их применимости, преимуществ и недостатков.

В главе 1 рассмотрена задача роста криволинейной трещины в плоской упругой постановке. Среда вокруг трещины предполагается линейно упругой. В среде предполагается плоско-деформированное состояние. Упругая задача ставится в напряжениях в виде уравнений упругости:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} &= 0\end{aligned}\quad (1)$$

и закона Гука, где G – модуль сдвига, а ν – коэффициент Пуассона.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_x}{\partial x} &= \frac{1}{2G} [(1 - \nu)\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}] \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} &= \frac{1}{2G} [(1 - \nu)\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}] \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) &= \frac{1}{2G} \sigma_{xy}\end{aligned}\quad (2)$$

Трещиной представляется кривая, на которой поле перемещений u_x, u_y терпит разрыв. Граничные условия ставятся на бесконечности (или, соответственно принципу Сен-Венана, на некотором удалении от трещины), а также на берегах трещины. Рассматривается случай, когда на бесконечности задано фиксированное поле напряжений:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}|_{\infty} &= \sigma_{xx}^0 \\ \sigma_{yy}|_{\infty} &= \sigma_{yy}^0 \\ \sigma_{xy}|_{\infty} &= \sigma_{xy}^0\end{aligned}\quad (3)$$

А на берегах трещины ставится условие свободной поверхности или заданного давления, приложенного к берегам. Таким образом, для точек кривой S , представляющей собой трещину, ставятся условия на напряжения, нормальные и касательные к этой кривой в данной точке

$$\begin{aligned}\sigma_{nn}|_{(x,y) \in C} &= p(s) \\ \sigma_{ns}|_{(x,y) \in C} &= 0\end{aligned}\quad (4)$$

Где s – параметр, описывающий положение точки на кривой C .

Ввиду линейности задачи её решение можно представить в виде суперпозиции решений двух задач: Первой, с граничными условиями на бесконечности при условии отсутствия трещины, и второй, где напряжения на бесконечности равны нулю, а условия на берегах трещины принимают вид

$$\begin{aligned}\sigma_{nn}|_{(x,y) \in C} &= p(s) - \sigma_n^0(s) \\ \sigma_{ns}|_{(x,y) \in C} &= 0 - \sigma_{ns}^0(s)\end{aligned}\quad (5)$$

где σ_n^0 и σ_{ns}^0 получаются из $\sigma_{xx}^0, \sigma_{xy}^0, \sigma_{yy}^0$ путем поворота системы координат на угол $\theta(s)$ – угол наклона кривой C в заданной точке к осям координат.

В качестве метода решения упругой задачи в работе используется метод разрывных смещений. Трещина разбивается на прямолинейные элементы, граничные условия ставятся на серединах этих элементов. С использованием известного точного решения для одиночного прямолинейного разрыва в среде, граничная задача (3-5) сводится к виду

$$\begin{aligned}\sigma_n^j &= \sum_{i=1}^N A_{nn}^{ij} \cdot D_n^i + A_{sn}^{ij} \cdot D_s^i \\ \sigma_s^j &= \sum_{i=1}^N A_{ns}^{ij} \cdot D_n^i + A_{ss}^{ij} \cdot D_s^i\end{aligned}, \quad j = 1, \dots, N \quad (6)$$

Здесь σ_n^j, σ_s^j – нормальные и касательные напряжения на берегах трещины для j -го элемента, D_n^i, D_s^i – нормальный и касательный разрывы смещения между берегами i -го элемента. A^{ij} – коэффициенты, описывающие зависимость напряжений в j -м элементе от смещений в i -м элементе, зависящие от взаимного расположения и размера элементов.

Рост трещины предполагается квазистатическим. В качестве способа определения направления роста трещин используется критерий наибольших растягивающих напряжений, где направление дальнейшего роста предполагается перпендикулярным наибольшим растягивающим напряжениям с окрестности кончика трещины. Используя асимптотическое разложение поля напряжений в окрестности кончика трещины, угол поворота можно выразить через значения коэффициентов интенсивности напряжений.

$$\theta = 2 \arctan \left(\frac{K_I - \sqrt{K_I^2 + 8K_{II}^2}}{4K_{II}} \right). \quad (7)$$

В качестве функции, описывающей возможность роста трещины, используется скорость высвобождения упругой энергии на единицу свободной поверхности, которая также может быть выражена через коэффициенты интенсивности напряжений.

$$G = \frac{1 - \nu^2}{E} K_I^2 + \frac{1 - \nu^2}{E} K_{II}^2 \quad (8)$$

Сами коэффициенты интенсивности вычисляются приближенно, через значения разрывов смещения в элементах, ближайших к кончику трещины.

$$\begin{aligned}K_I &= 0.806 \frac{G}{2(1 - \nu)} \sqrt{\frac{\pi}{\Delta s}} D_n \\ K_{II} &= 0.806 \frac{G}{2(1 - \nu)} \sqrt{\frac{\pi}{\Delta s}} D_s\end{aligned}\quad (9)$$

На основе уравнений (6,7,9) был написан программный код, позволяющий вычислить поле напряжений вокруг трещины или системы трещин, находящихся под заданными нагрузками, а также моделировать рост этой системы трещин.

Проведена верификация данного программного кода. Сравнение с аналитическим решением задачи об одиночной трещине под углом к растягивающим нагрузкам показало точное (менее 1% погрешности) определение коэффициентов интенсивности для одиночной трещины. Сравнение с решением задачи о двух параллельных трещинах, расположенных перпендикулярно приложенным растягивающим напряжениям, показало, что коэффициенты интенсивности определяются достаточно точно при условии, что расстояние между трещинами больше размера элемента. Сравнение с экспериментом (рост трещины в образце из оргстекла под действием сдвиговых нагрузок) показало точное совпадение экспериментальной и численной траектории роста трещины. Сравнение траекторий роста трещины при различном разрешении численного метода (рис.1) показывает, что итоговая траектория роста трещины мало зависит от размера численного элемента и от величины приращения на каждом шаге.

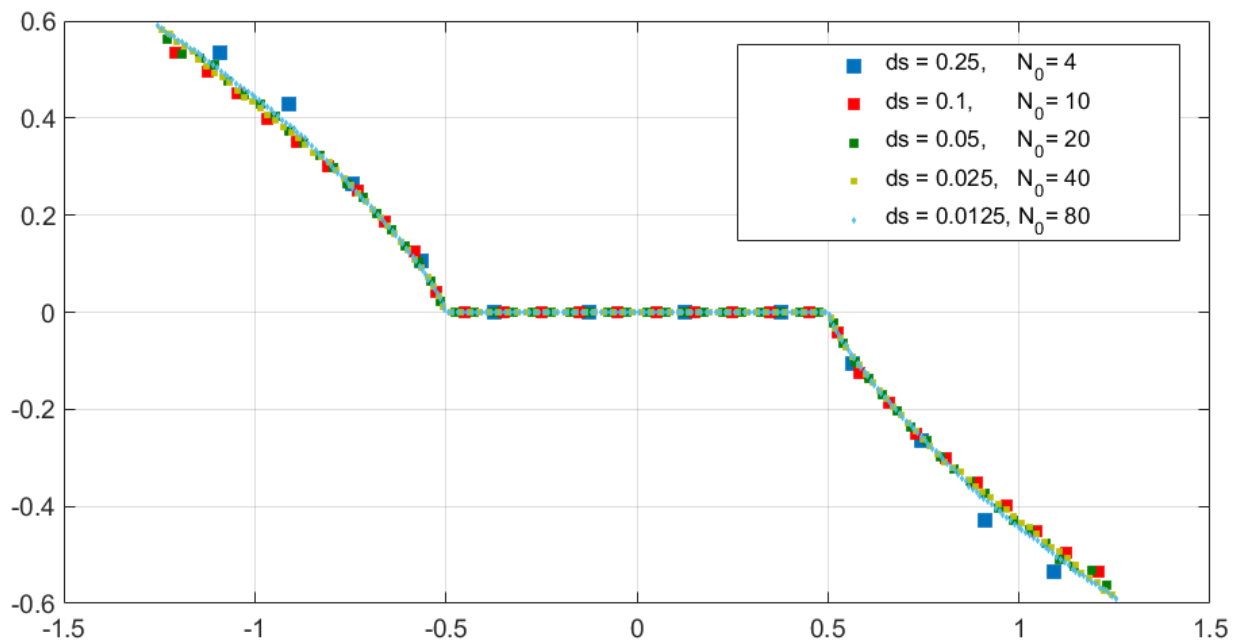


Рисунок 1. Траектория трещины при различных значениях длины ds граничного элемента. N_0 – начальное количество элементов в трещине.

Далее исследуется влияние трещины на поле напряжений в окружающей среде. Для этого определяется зависимость решения от параметров задачи. С учетом того, что численное решение даёт достаточно точное совпадение с аналитическими решениями в пределах своей применимости, анализируется используемое решение. Проведено обезразмеривание уравнений (6). Показана линейность решения задачи относительно характерного размера задачи и характерного давления, приложенного к системе. Таким образом, в рамках сделанных предположений, вокруг систем трещин отличающихся только масштабом под действием одинаково распределенных нагрузок, пропорциональных друг другу, поля напряжений будут геометрически подобны, и пропорциональны характерным приложенным напряжениям.

Обезразмеривание уравнения (7) показывает, что направление возможного роста трещин также не зависит от характерного размера и характерного напряжения. Масштаб задачи и характерное приложенное напряжение влияют на значение коэффициентов интенсивности напряжений K_I, K_{II} и, соответственно, значение функции G , но не влияют на их отношение.

Также в главе рассмотрено влияние наличия трещины на окружающее поле напряжений на примере одиночной прямолинейной трещины нормального отрыва. С

точки зрения влияния данной трещины на рост окружающих одной из важных составляющих является ориентация главных осей тензора напряжений. Согласно имеющимся данным, а также используемому критерию определения направления, рост трещин наиболее вероятен в направлении, перпендикулярном наибольшему растягивающему напряжению. Данные направления в окрестности трещины нормального отрыва показаны на рис.2. По их распределению сделано предположение, что область перед кончиком трещины должна способствовать небольшому отклонению растущих навстречу трещин, а также, вероятно, обеспечивать устойчивость направления роста самой рассматриваемой трещины.

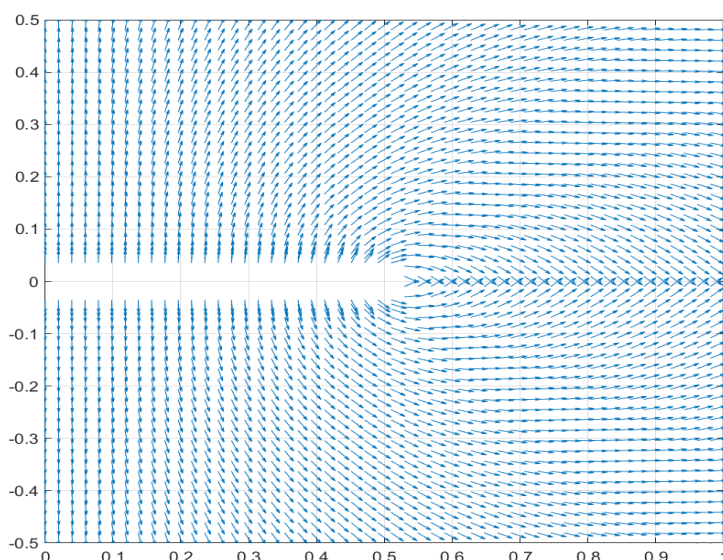


Рисунок 2. Поле напряжений в окрестности трещины нормального отрыва, направления минимальных растягивающих напряжений

Другие составляющие поля напряжений, такие как среднее напряжение и наибольшее сдвиговое напряжение также были рассмотрены и получены выводы о размерах и расположении областей, где наличие трещины затрудняет или способствует росту окружающих трещин.

Далее проверено предположение об устойчивости траектории роста трещин к отклонениям. Для этого проведено моделирование роста прямолинейной трещины с изломом под действием одноосного и всестороннего растяжения. Полученные результаты (рис. 3, 4) показывают, что в случае одноосного растяжения малое отклонение не влияет на дальнейшее направление роста, а в случае всестороннего растяжения рост трещины стабилизируется вдоль её протяженности.

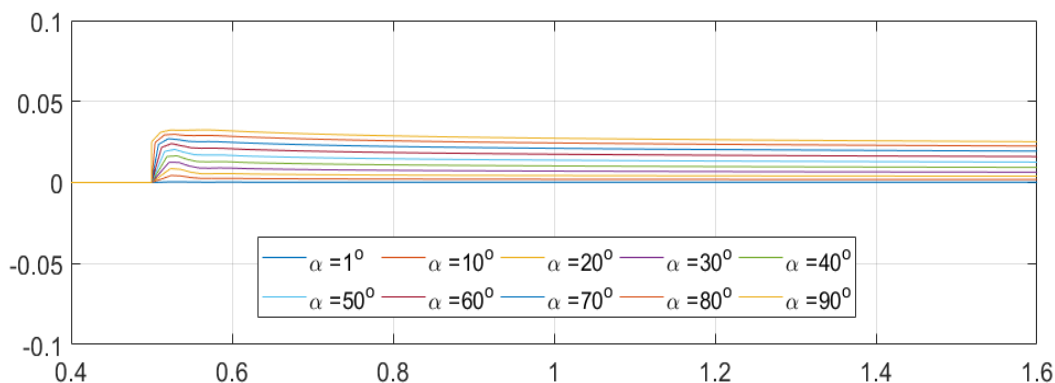


Рисунок 3. Траектории роста трещины при различных углах начального излома в случае одноосного растяжения.

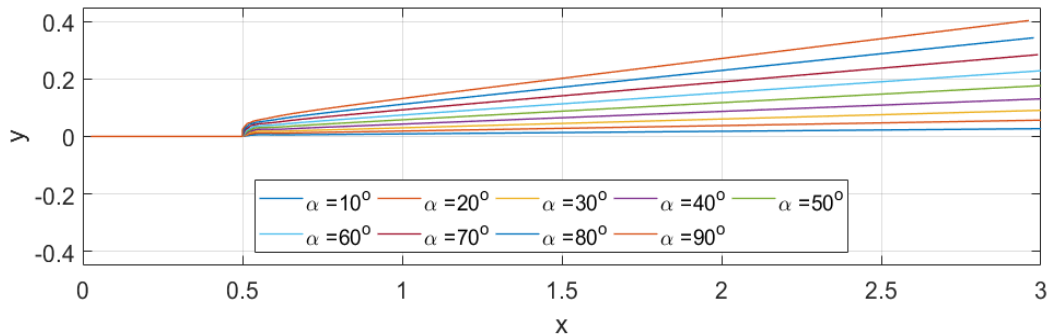


Рисунок 4. Траектории роста трещины для различных углов начального излома, в случае двухосного растяжения.

Затем исследован вопрос устойчивости траектории трещины к случайным отклонениям. Предложенный способ моделирования случайных отклонений представляет собой введение добавки к углу поворота θ вида $\theta = \theta_0 + \theta_r$, где θ_0 – угол поворота, определяемый из критерия наибольших растягивающих напряжений, а θ_r – равномерно распределенная случайная величина на отрезке $[-\alpha, \alpha]$, где α – угол наибольшего отклонения. Угол наибольшего отклонения можно связать с размером возможных неоднородностей в среде: если размер неоднородностей, вносящих случайные возмущения, сравним с размером граничного элемента, то угол α можно принять близким к 45° . Случаям, когда размер неоднородностей, способных вносить случайные отклонения, меньше длины граничного элемента, соответствуют меньшие углы α .

Для оценки влияния случайных отклонений рассмотрен рост трещины, расположенной перпендикулярно растягивающим нагрузкам. На рис. 5 показаны траектории роста трещины в данных условиях. Черным цветом показана траектория без случайных отклонений, красным и зеленым для значений $\alpha = 10^\circ$ и $\alpha = 45^\circ$ соответственно. Проведенная серия расчетов показывает, что для $\alpha = 10^\circ$ отклонение траектории составляет не более 1% от пройденного расстояния. Для $\alpha = 45^\circ$ оно может составлять до 5%.

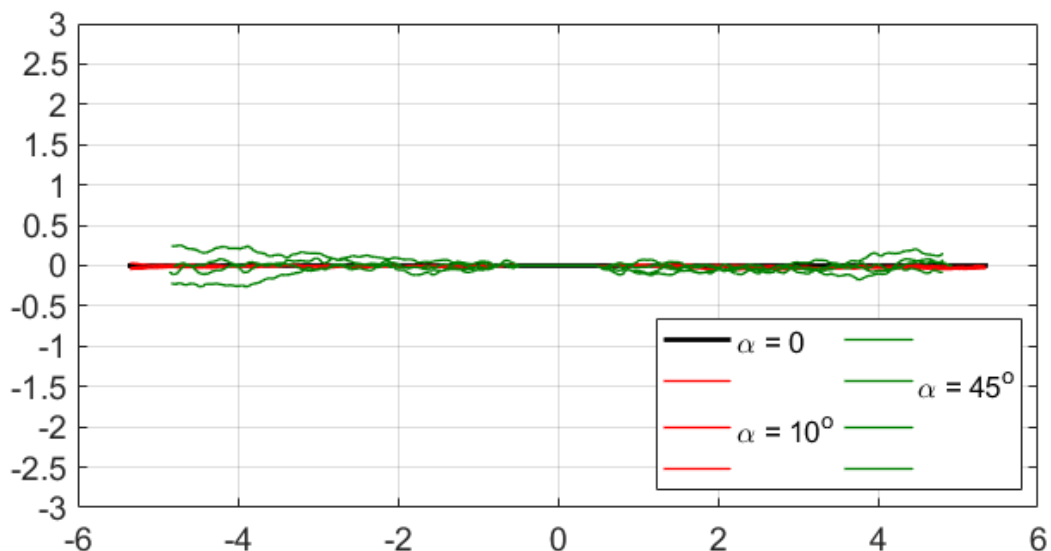


Рисунок 5. Траектории роста трещины для различных диапазонов случайных отклонений в случае одноосного растяжения.

Помимо случая одноосного растяжения также рассмотрен случай всестороннего растяжения, где внешнее поле напряжений не оказывает влияния на направление роста трещины и оно определяется только геометрией самой трещины. На рис. 6 показаны траектории роста для значений $\alpha = 0$ (невозмущенная траектория), $\alpha = 10^\circ$ и $\alpha = 45^\circ$. Серия вычислений показывает, что в таком случае отклонения для $\alpha = 10^\circ$ могут составлять до 7%, а для случая $\alpha = 45^\circ$ – до 25%. Также как и для одиночного отклонения имеет место стабилизация трещины вдоль своей протяженности по мере роста.

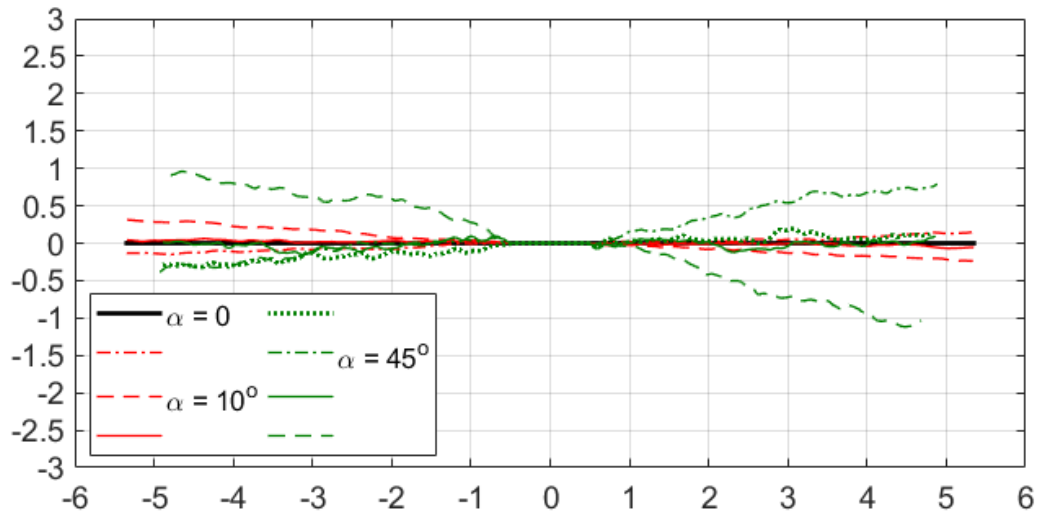


Рисунок 6. Траектории роста трещины для различных диапазонов случайных отклонений в случае одноосного растяжения. Черный – невозмущенный рост, красный $\alpha = 10^\circ$, зеленый – $\alpha = 45^\circ$.

Помимо этого рассмотрено влияние величины приращения ds на каждом шаге на итоговое отклонение траекторий. Показаны траектории для случая $\alpha = 45^\circ$ и различных значений ds для одноосного растяжения. Полученные результаты демонстрируют отсутствие существенной зависимости отклонений от величины ds . Для случая двухосного растяжения показано наличие зависимости траекторий и величины отклонения от длины элемента ds . Это обосновано тем, что в этом случае трещина стабилизируется не вдоль изначального направления, а вдоль своей протяженности, поэтому чем больше величина отклонения в сравнении с длиной трещины, тем больше изменяется итоговая траектория. Вместе с тем, итоговые траектории всех трещин всё ещё оказываются достаточно близки к прямолинейным.

По результатам, описанным в главе 1 можно утверждать, разработанный метод решения задач о криволинейном росте трещин обеспечивает достаточную точность для оценки влияния неоднородности поля напряжений на траекторию роста трещин. Траектория роста трещины устойчива к малым отклонениям, а также не зависит существенно от величины используемого граничного элемента и приращения на каждом шаге. Влияние случайных отклонений на траекторию трещины также невелико, особенно для малых углов α . Таким образом, предложенный метод может быть применим и для неоднородных сред или сред с дефектами, в случае если характерный размер неоднородностей или дефектов много меньше масштабов задачи.

В главе 2 с использованием разработанного программного кода исследованы задачи взаимодействия растущих трещин. Для ограничения числа параметров, влияющих на

результат взаимодействия, рассматривается случай изначально параллельных прямолинейных трещин, расположенных со смещением друг относительно друга (рис.7). Проанализированы сложности с определением скорости роста трещин при одновременном выполнении критериев разрушения более чем на одном кончике трещины. Для учета данной проблемы в рамках используемой модели рассмотрено два предельных случая. В первом случае предполагается, что на каждом шаге расчета происходит рост трещин на каждом из кончиков. Такая постановка, хоть и не имеет практического аналога, позволяет оценить влияние растущих трещин на траекторию и напряжения в кончиках друг друга.

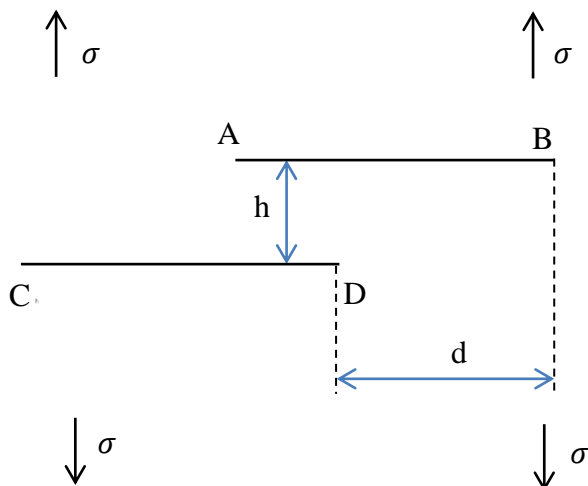


Рисунок 7. Схема начального расположения трещин.

Для оценки взаимного влияния на возможность роста используется коэффициент влияния: отношение численно полученного значения функции G для кончика трещины к теоретическому значению G_t для одиночной прямолинейной трещины той же длины. Так значения G/G_t меньше единицы означают, что текущее расположение трещин препятствует росту данного кончика трещины, а при $G/G_t > 1$, напротив, способствует.

Результаты для изначально соосных трещин ($d=0$) подтверждают известный вывод, что параллельно расположенные трещины препятствуют росту друг друга. Кроме того траектории таких трещин будут удаляться друг от друга по мере роста.

Наиболее содержательным является случай трещин, изначально расположенных со сдвигом, равным начальной длине. В этом случае изначально проекции трещин на ось имеют ровно одну общую точку — кончик трещины, который обозначается внутренним. Траектория роста трещин (рис.8) показывает, что в этой ситуации концы трещин, растущих навстречу друг другу, отклоняются в сторону сближения, а концы трещин, растущих в противоположных направлениях, отклоняются друг от друга. При этом эффект сближения соответствует результатам предыдущей главы, а отклонение противоположных концов аналогично тому, которое наблюдалось бы при наличии единственной трещины, соединяющей два отдалённых конца трещин вместо системы трещин.

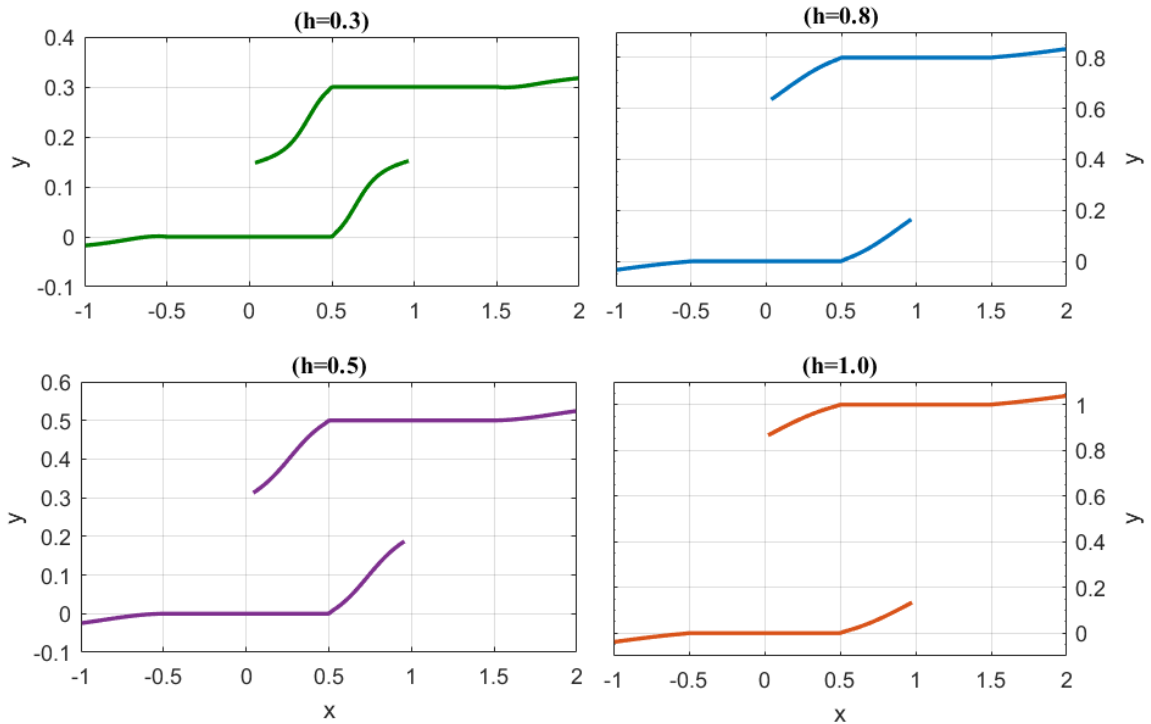


Рисунок 8. Траектории роста трещин при различных начальных h , $d = 1$.

Полученные графики коэффициента влияния (рис.9) показывают, во-первых существенное падение G на внутренних (ближайших к другой трещине) концах трещин по мере роста навстречу. Во-вторых, зависимость G от расстояния между плоскостями трещин. Чем меньше расстояние h , тем больше G . При этом на расстоянии h больше начальной длины трещины коэффициент влияния становится меньше единицы. Таким образом, максимальное значение коэффициента влияния наблюдается не при касании проекций трещин, а при частичном пересечении или, наоборот, при определённом расстоянии между проекциями. Также отмечается малое влияние учета криволинейности роста на значения G/G_t кроме случаев сближения трещин (рис.9(б) $h=0.3$, $h=0.5$). В этих случаях значения коэффициента влияния для прямолинейного роста (сплошные линии) и для криволинейного роста (штрихованные линии) могут отличаться почти вдвое и этим эффектом нельзя пренебречь.

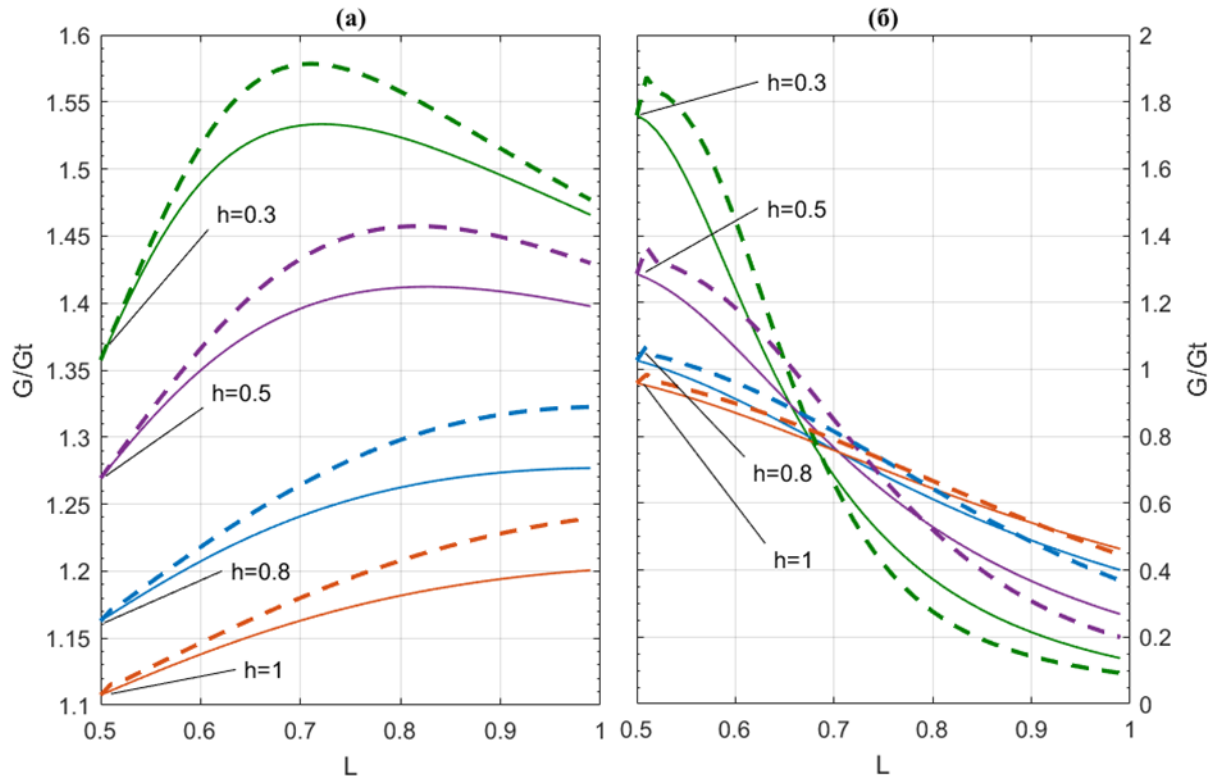


Рисунок 9. Изменение коэффициентов влияния по мере роста трещин. (а) – на внешних кончиках трещин, (б) – на внутренних. Сплошная линия – для прямолинейного роста, штрихованная – для криволинейного.

Вторым предельным случаем одновременного роста трещин принимается случай, когда на каждом шаге растут только те кончики трещин, для которых значение G максимально. За счет симметрии задачи на каждом шаге растут два кончика трещин. В такой постановке задача о двух параллельных трещинах приводит к результатам, не зависящим существенно от расположения трещин: Первоначально происходит сближение трещин до пересечения их проекций, после чего рост трещин продолжается в основном в противоположном направлении. В связи с этим была изучена следующая задача: имеются три изначально параллельных трещины одинаковой длины, расположенных на равном расстоянии между плоскостями трещин и с равным смещением между трещинами (рис. 10).

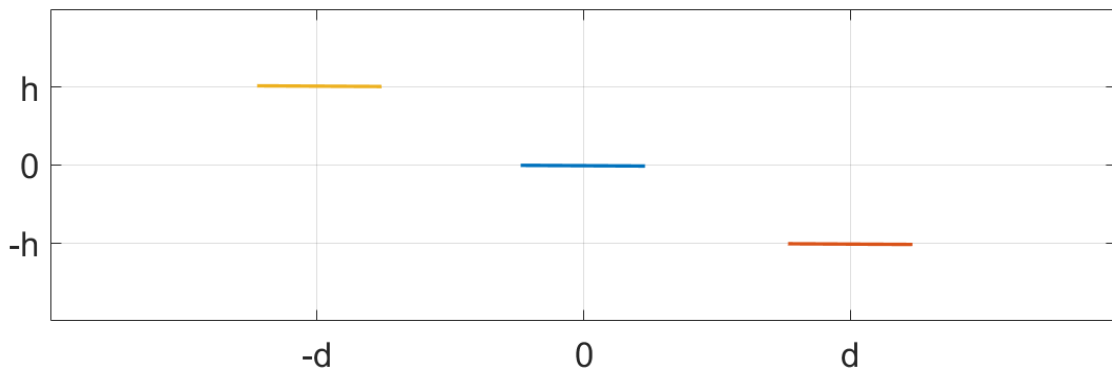


Рисунок 10. Схема начального расположения трещин

Рост трещин в таких условиях показал качественное различие в зависимости от начального расположения: при малых сдвигах d между плоскостями крайние трещины подавляют рост центральной и растут только крайние трещины в направлении от

центральной. При больших значениях сдвига d крайние трещины способствуют росту центральной. Далее центральная трещина растет до пересечения проекция, после чего исход взаимодействия зависит от расстояния h между плоскостями трещин, при малых расстояниях активируется рост крайних трещин. При больших расстояниях между плоскостями центральная трещина растет неограниченно. Распределение исходов в зависимости от начального расположения трещин приведено на рис.11. Критическое расстояние между плоскостями трещин практически не зависит от начального сдвига. Вывод про зависимость характера взаимодействия трещин от расстояния между плоскостями и наличие критического расстояния можно применить не только к данной начальной конфигурации трещин, но и к случаю взаимодействия двух трещин различной длины, рост одной из которых в противоположном направлении чем-то ограничен.

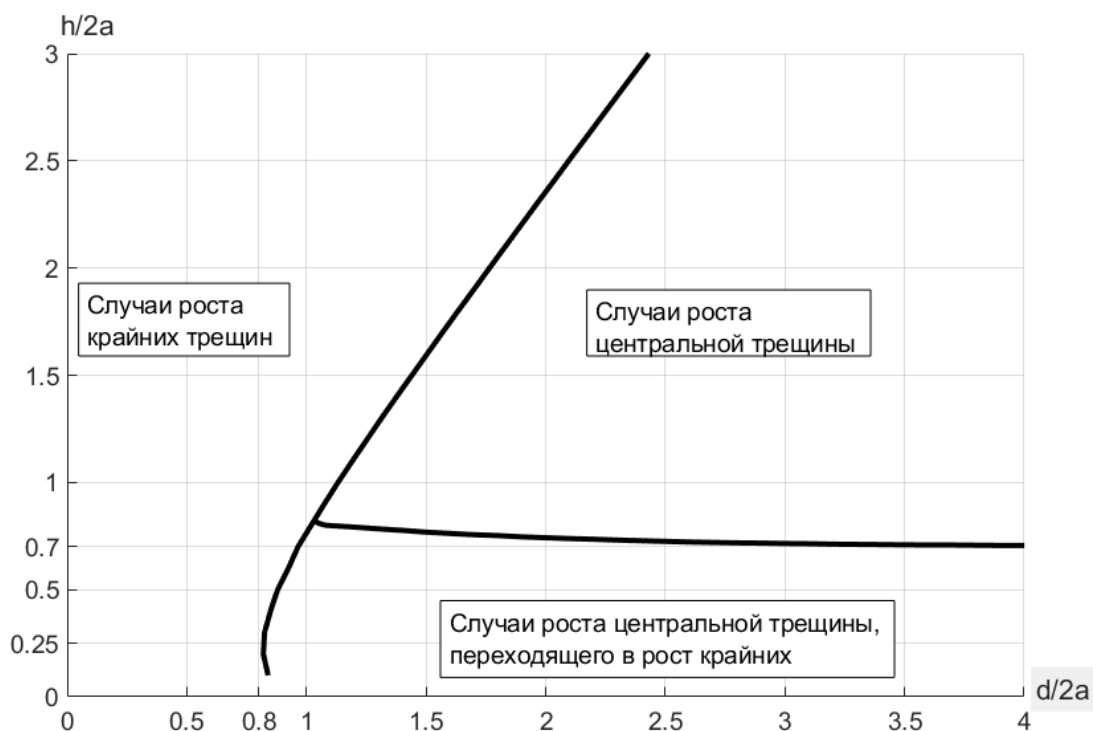


Рисунок 11. Распределение различных сценариев взаимодействия трещин в зависимости от начального расположения

Подобные графики также приведены для случаев всестороннего растяжения, а также для случая, когда внешние напряжения равны нулю, а к центральной трещине приложены сосредоточенные растягивающие силы. Во всех случаях при увеличении сдвига между трещинами граница между случаями роста центральной трещины и активацией роста крайних трещин выходит на асимптоту, однако критическое значение h в таких случаях составляет 0.75 длины меньшей трещины.

На основании полученных во второй главе результатов сделаны выводы о необходимости применения моделей криволинейного роста в случае, если расстояние между исследуемыми трещинами менее 0.75 длины меньшей из них ввиду возможно качественно различного сценария их взаимодействия.

В главе 3 рассматривается возникающая в случае наличия в среде сжимающих напряжений контактная задача между берегами трещин. На практике такая задача имеет место при взаимодействии трещин гидроразрыва с природными разломами. В таких условиях линейные методы, к которым относится и используемый в работе метод разрывных смещений, могут давать физически некорректный результат, заключающийся в

отрицательном раскрытии трещин, то есть перехлесте берегов друг сквозь друга. Причиной тому является изменение граничных условий в случае соприкосновения берегов. Так вместо граничного условия, описывающего свободные берега трещины,

$$\sigma_n = 0, \sigma_s = 0$$

Должно быть поставлено условие нулевого нормального разрыва смещений между берегами.

$$D_n = 0, \text{ при } \sigma_n \geq 0, \quad (10)$$

а также условие на касательный разрыв. В качестве данного условия можно использовать закон сухого трения. То есть в случае если касательные напряжения на стенках не превосходят трения, обеспечиваемого нормальными напряжениями, ставится условие прилипания:

$$D_s = D_s^0 = const, \quad |\sigma_s| \leq k_{\text{тр}} \sigma_n \quad (11)$$

В случае если касательные напряжения превосходят трение, условие на берегах принимает следующий вид, где $k_{\text{тр}}$ – коэффициент сухого трения, а знак перед ним противоположен изменению D_s :

$$\sigma_s = \pm k_{\text{тр}} \sigma_n, \quad D_s \neq D_s^0 \quad (12)$$

Таким образом, в зависимости от напряжений, приложенных к берегам трещины, и её раскрытия элементы трещины делятся на два типа: открытые и закрытые. Также для закрытых элементов может иметь место «скольжение», когда касательный разрыв смещения может изменяться на шаге вычислений, а к берегам прилагаются касательные нагрузки, ограничивающие это изменение.

Одной из существенных сложностей данного рода задач является то, что для корректного решения нужно сначала определить на каких граничных элементах ставятся те или иные условия, что можно сделать только корректно определив раскрытия и напряжения на них.

Далее в работе предложен метод решения данной задачи, основанный на использовании в таких задачах методе последовательных приближений. В методе последовательных приближений тип граничных условий на элементах определяются итеративно, по результатам вычисленных на шаге раскрытий. Этот метод, помимо проблем со сходимостью в некоторых конфигурациях трещин, имеет недостаток, заключающийся в том, что для каждого набора граничных условий приходится заново решать СЛАУ из $2N$ уравнений с плотной матрицей коэффициентов. Для решения данной проблемы в работе предложен следующий метод:

За основу взято решение уравнений (6), для нахождения разрывов смещения D_n, D_s

$$A^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_n \\ \sigma_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_n \\ D_s \end{pmatrix} \quad (13)$$

Элементами, которые необходимо проверить, будут все те, для которых значение $D_n^i < 0$. Эти элементы трещин являются закрытыми. Раскрытия и напряжения, относящиеся к закрытым элементам, обозначаются, как D^{cl} и σ^{cl} , соответственно. Для открытых – D^{op} и σ^{op} . Для закрытых элементов необходимо обеспечить раскрытие $D_n^{cl} = 0$, а касательный разрыв смещений задается равным либо начальному значению, если таковое имеется, либо полученному при расчете значению $D_s^{cl} = D_s^0$. В таких условиях ставится задача определения напряжений, которые необходимо обеспечить на берегах закрытых трещин, чтобы удовлетворить условиям на закрытых элементах. Уравнение (13) в таком случае примет следующий вид.

$$A^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_n^{cl} + \Delta\sigma_n^{cl} \\ \sigma_n^{op} \\ \sigma_s^{cl} + \Delta\sigma_s^{cl} \\ \sigma_s^{op} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ D_n^{op} + \Delta D_n^{op} \\ D_s^0 \\ D_s^{op} + \Delta D_s^{op} \end{pmatrix} \quad (14)$$

Или, с учетом имеющегося решения (13)

$$A^{-1} \begin{pmatrix} \Delta\sigma_n^{cl} \\ \mathbf{0} \\ \Delta\sigma_s^{cl} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D_n^{cl} \\ \Delta D_n^{op} \\ \mathbf{0} \\ \Delta D_s^{op} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где необходимо выяснить значения $\Delta\sigma_n^{cl}$ и $\Delta\sigma_s^{cl}$, после чего значения ΔD_n^{op} и ΔD_s^{op} дадут нам изменения в разрывах смещений открытых элементов, необходимые для удовлетворения граничных условий. Для решения этой системы берется подматрица матрицы A^{-1} , обозначаемая B . Пусть закрытыми являются первые k элементов.

$$B = \begin{pmatrix} B_{nn} & B_{sn} \\ B_{ns} & B_{ss} \end{pmatrix}, \text{ где } B_{nn}^{ij} = A^{-1ij}_{nn}, B_{sn}^{ij} = A^{-1ij}_{sn}, B_{ns}^{ij} = A^{-1ij}_{ns}, B_{ss}^{ij} = A^{-1ij}_{ss}, \text{ для } i, j = 1, \dots, k$$

При взятии обратной к ней B^{-1} , получается

$$B^{-1} \begin{pmatrix} -D_n^{cl} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta\sigma_n^{cl} \\ \Delta\sigma_s^{cl} \end{pmatrix} \quad (16)$$

Полученные напряжения $\Delta\sigma$ обозначают напряжения, приложенные к сомкнувшимся берегам трещин, обеспечивающие неподвижность этих берегов друг относительно друга и нулевое раскрытие. Физически эти напряжения обеспечиваются за счет давления берегов трещин друг на друга и за счет силы трения между берегами. Следовательно, значение $\Delta\sigma_n^i$ должно быть неотрицательным, а значение $|\Delta\sigma_s^i|$ не может превосходить значения $k_{тр}\Delta\sigma_n^i$. Из этого получаются условия для итерационного процесса:

$$\Delta\sigma_n^i \geq 0 \quad (17)$$

$$|\Delta\sigma_s^i| \leq k_{тр}\Delta\sigma_n^i \quad (18)$$

Для закрытых элементов должно быть выполнено условие (17), иначе этот элемент не закрыт, и необходимо его исключить из набора закрытых элементов.

Если не выполнено условие (18), значит силы трения между стенками недостаточно, чтобы обеспечить неизменность значения D_s , следовательно, этот элемент можно отнести к скользящим.

Для первого случая проблема решается исключением элемента из набора закрытых, и пересчетом матрицы B для другого набора.

Для второго случая, необходимо получить новое значение ΔD_s^i при граничном условии (12), когда берега могут сдвинуться, но к ним приложена сила трения.

$$\Delta\sigma_s^i = \pm k_{тр}\Delta\sigma_n^i \quad (19)$$

Допустим, что из набора закрытых элементов под это условие попадает первый. В результате преобразований из уравнения (15) получено следующее уравнение:

$$\begin{pmatrix} B_{nn}^{11} \pm k_{\text{тр}} B_{ns}^{11} & & B_{nn}^{1k} & 0 & & B_{nn}^{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{nn}^{k1} \pm k_{\text{тр}} B_{ns}^{k1} & & B_{nn}^{kk} & 0 & & B_{ns}^{kk} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{sn}^{11} \pm k_{\text{тр}} B_{ss}^{11} & & B_{sn}^{1k} & -1 & & B_{ss}^{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{sn}^{k1} \pm k_{\text{тр}} B_{ss}^{k1} & & B_{sn}^{kk} & 0 & & B_{ss}^{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\sigma_n^1 \\ \vdots \\ \Delta\sigma_n^k \\ \Delta D_s^1 \\ \vdots \\ \Delta\sigma_s^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D_n^1 \\ \vdots \\ -D_n^k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

Здесь знак перед $k_{\text{тр}}$ выбирается так, чтобы совпадать со знаком $\Delta\sigma_s^1$, полученного на предыдущем шаге. Решение данной системы позволяет найти как напряжения $\Delta\sigma$ на закрытых элементах, так и сдвиги ΔD_s на скользящих. Таким образом, получены новые значения ΔD_s^{cl} , для которых условие (18) выполнено. После этого элементы получают новые значения $D_s^{cl} = D_s^0 + \Delta D_s^{cl}$ и перестают быть скользящими. Шаг итерации для определения закрывшихся или открывшихся элементов требует решения системы из k уравнений, где k – число закрытых элементов. Следовательно, данный способ будет существенно упрощать расчет, если $k \ll N$. С другой стороны, можно уменьшить значение k , исключив часть закрытых элементов, для которых значение $\Delta\sigma_n$ достаточно велико и значение $|\Delta\sigma_s|$ существенно меньше $k_{\text{тр}}\Delta\sigma_n$. Такие элементы можно считать неактивными, и не включать в систему А, пока напряжения в этих элементах, вызванные другими элементами, не превзойдут пороговых значений, для которых нарушатся условия (17) или (18). Используя данные шаги, составлен итерационный алгоритм, и на его основе реализован численный код.

С использованием данного кода исследована задача взаимодействия трещины под действием внутреннего давления (трещины гидроразрыва) с параллельной ей трещиной, закрытой под действием внешних сжимающих нагрузок (природного разлома). Исследован характер активации природного разлома в зависимости от расстояния между трещинами и параметрами задачи, такими как давление в активной трещине, внешнее сжимающее напряжение и длина трещины гидроразрыва (длина разлома бралась много большей длины активной трещины, для учета именно влияния активированного участка). Была получена безразмерная переменная, описывающая поведение данной системы: $h^* = \frac{h\sigma}{l(p-\sigma)} = \frac{h\sigma\sqrt{\pi}}{K_{IC}\sqrt{l}}$, где h – расстояние между трещинами, K_{IC} – трещиностойкость среды, σ – величина приложенных к системе сжимающих напряжений, l – длина трещины гидроразрыва, а p – давление, приложенное к её берегам (в рассмотренном случае давление распределялось равномерно). В зависимости от значения данной переменной возможны три основных сценария взаимодействия:

При $h^* > 0.45$ активации трещины не происходит, влияние разлома на трещину гидроразрыва отсутствует.

При $0.45 > h^* > 0.1$ имеет место сдвиг берегов разлома, влияние разлома затрудняет рост трещины гидроразрыва.

При $h^* < 0.1$ имеет место раскрытие разлома, разлом притягивает траекторию трещины гидроразрыва. При $h^* < 0.02$ активированный участок разлома способствует росту трещины гидроразрыва.

В заключении приведены основные результаты работы:

В работе представлен метод решения задачи роста криволинейных трещин в плоской постановке на основе метода граничных элементов. Разработан метод решения контактной задачи в случае смыкания берегов трещин, не требующий итеративного пересчета всей матрицы коэффициентов системы. На основе предложенных методов реализован авторский программный код для решения задач о росте систем трещин, проведена его верификация и валидация.

Сравнение с аналитическими решениями для статических трещин показало высокую точность метода в условиях, когда расстояние между трещинами больше размеров граничных элементов. Сравнение с экспериментом показало точное совпадение численно предсказанной траектории роста трещины с полученной экспериментально.

С помощью разработанного программного кода проведено исследование влияния различных факторов на рост трещины нормального отрыва. Продемонстрирована малая зависимость численно рассчитанной траектории роста трещины от размера граничного элемента. Исследовано влияние трещины на окружающее её поле напряжений.

На основании полученных результатов предположена, а далее подтверждена устойчивость траектории трещины к малым отклонениям в случае наличия внешних напряжений, обеспечивающих направление роста. В тех же условиях показана устойчивость траектории трещины к случайным отклонениям на каждом шаге. Таким образом, разработанный метод может быть применим и в случае исследования неоднородных сред или сред с наличием дефектов, в случае если размер дефектов или неоднородностей меньше масштаба задачи.

С помощью разработанного программного кода исследовано взаимодействие растущих трещин. Показано наличие качественно различных сценариев взаимодействия изначально параллельных трещин в зависимости от их взаимного расположения. Получены критические значения расстояния между плоскостями трещин, на которых поведение системы качественно меняется. Показано, что взаимодействие происходит схожим образом в различных условиях нагружения. Разработаны критерии необходимости применения моделей криволинейного роста трещин в задачах взаимодействия трещин в зависимости от их длин и расположения.

Исследована задача о взаимодействии трещины гидроразрыва с параллельным ей разломом, получены оценки влияния с трещины на активацию разлома и разлома на рост и траекторию трещины. Получена зависимость характера взаимодействия от безразмерной переменной $h^* = \frac{h\sigma}{K_{IC}\sqrt{l}}$, связывающей расстояние между трещинами, сжимающие напряжения в среде, длину активной трещины и трещиностойкость среды.

Публикации автора по теме диссертации:

Статьи, опубликованные в рецензируемых научных журналах из перечня ВАК:

1. *Пестов Д. А.* Оценка применимости метода разрывных смещений в задачах роста и взаимодействия криволинейных трещин // *Успехи кибернетики*. — 2025. — Т. 6, № 1. — С. 94–103.
2. *Пестов Д. А., Акулич А. В., Звягин А. В. и др.* Фундаментальные аспекты численного моделирования трещины гидроразрыва // *Вестник кибернетики*. — 2018. — Т. 32, № 4.
3. *Пестов Д.А., Смирнов Н.Н., Акулич А.В., Тюренкова В.В.* Математическое моделирование задачи распространения трещины гидроразрыва // *Вестник кибернетики*. — 2017. — Т. 25, № 1. — С. 80–92.

Статьи, опубликованные в рецензируемых журналах, индексируемых в Scopus или Web of Science:

4. *Pestov D. A., Shamina A. A., Zvyagin A. V.* Investigation of the interaction of rectangular cracks by new numerical simulation methods // *Acta Astronautica*. — 2023. — Vol. 204. — P. 878–887.
5. *Smirnov N.N., Li K., Skryleva E.I., Pestov D.A. et al.* Mathematical modeling of hydraulic fracture formation and cleaning processes // *Energies*. — 2022. — Vol. 15. — P. 1967.