

## ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертационную работу Коптевой Натальи Викторовны **Апостериорные и априорные оценки конечноэлементных решений некоторых сингулярно возмущенных уравнений на анизотропных сетках**, представленную на соискание ученой степени доктора физико – математических наук по специальности 01.01.07 – вычислительная математика.

### **Актуальность темы выполненной работы**

Исследуемые явления и процессы характеризуются разными масштабами по времени и пространству. В силу этого прикладные математические модели характеризуются малыми (большими) параметрами в определяющей системе уравнений. Мы часто имеем сингулярно возмущенные задачи, когда присутствуют малые параметры при старших производных. В этом случае решение задачи сильно меняется вблизи границы (пограничные слои) или внутри области.

Вычислительные алгоритмы должны быть адаптированы для учета особенностей сингулярно возмущенных задач. Стандартный подход связан с использованием существенно более подробной расчетной сетки в области сильного изменения решения. Мы можем ориентироваться на анизотропные расчетные сетки, когда сгущение проводится только по нормали к пограничному (внутреннему) слою, по направлению сильного изменения решения.

Теоретические оценки точности для задач с пограничными слоями наиболее естественно проводить в равномерной норме, оценки в интегральных нормах затушевывают основные особенности таких задач. Наиболее принципиальные результаты получены при использовании конечно-разностных аппроксимаций на кусочно-равномерных и

сгущающихся сетках. Основные особенности задачи учитываются при явном выделении сингулярных слагаемых решения на основе асимптотического анализа задачи.

В настоящее время основная вычислительная технология приближенного решения краевых задач для стационарных и нестационарных уравнений с частными производными связывается методом конечных элементов. Поэтому представляет несомненный интерес численный анализ конечно-элементных аппроксимаций по пространству при решении сингулярно возмущенных задач с оценками точности в равномерной норме. Необходимо также исследовать не только линейные, но и важными для практики математического моделирования нелинейные задачи.

При обосновании вычислительных алгоритмов повышенное внимание уделяется не только получению априорных, но и апостериорных оценок. Последние позволяют получить гораздо более точные оценки точности полученного приближенного решения. На повестке дня стоит получение апостериорных оценок для численных решений сингулярно возмущенных краевых задач.

В силу выше отмеченного тема диссертационной работы Коптевой Н.В. является, безусловно, актуальной. В ней получены априорные и апостериорные оценки точности приближенного решения краевых задач для сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений второго порядка с нелинейной правой частью в равномерной норме при конечно-элементной аппроксимации по пространству.

### **Общая методология и методика исследования**

Работа выполнена на единой методологической основе с использованием современного математического аппарата теории уравнений с частными производными и численного анализа. Проводится асимптотический анализ сингулярно возмущенных задач с нелинейными правыми частями в областях с кусочно-гладкими границами, строятся конечно-элементные или конечно-разностные аппроксимации, получаются

априорные и апостериорные оценки точности с явным выделением зависимости от малого параметра.

### **Степень обоснованности и достоверности**

Основные результаты диссертационной работы сформулированы в виде математически строго доказанных теорем. Положения, выносимые на защиту, прошли апробацию на различных международных научных конференциях, представлены в 17 статьях, которые опубликованы в высокорейтинговых международных журналах.

### **Научная новизна полученных результатов**

В диссертационной работе получены следующие основные результаты, обладающие научной новизной:

- Получены апостериорные оценки точности в равномерной норме численного решения сингулярно возмущенных эллиптических уравнений реакции-диффузии с нелинейной правой частью в многоугольных областях при конечно-элементной аппроксимации по пространству. Нелинейная правая часть удовлетворяет одностороннему условию Липшица, используются стандартные лагранжовые конечные элементы. Оценки получены как для квазиравномерной триангуляции области, так и для анизотропных расчетных сеток. Явно выделена зависимость точности от малого параметра, постоянные в оценках не зависят от диаметров элементов сетки и их аспектного соотношения;
- Установлены апостериорные оценки в равномерной норме точности решений задачи Дирихле для полулинейных параболических уравнений второго порядка, в том числе сингулярных, в области с липшицевой границей. Производная нелинейной правой части по решению предполагается неотрицательной и ограниченной. Исследуются задачи без и с конечно-элементной аппроксимацией по пространству. Рассмотрены стандартные чисто неявная и симметричная разностные схемы, а также схема разрывного метода Галеркина. Численный анализ проведен на основе оценок функции

Грина для параболического оператора и специальных интерполянтов по времени;

- Построены комбинированные аппроксимации для решений сингулярно возмущенных эллиптических уравнений реакции-диффузии в гладких областях с нелинейными правыми частями, для которых вырожденное уравнение и исходная задача могут иметь несколько решений. Вблизи границы используется кусочно-равномерная или сгущающаяся ортогональная криволинейная сетка, на которой строятся конечно-разностные аппроксимации, учитывающие сингулярность задачи. Внутри области применяются квазиравномерная триангуляция Делоне и кусочно-линейные конечные элементами со сосредоточенными массами. Такая аппроксимация обеспечивает выполнение принципа максимума на дискретном уровне и дает возможность построить верхние и нижние решения при доказательстве существования приближенного решения и исследования его точности в равномерной норме. Для задач в выпуклом многоугольнике приближенное решение строится с учетом угловых пограничных функций.

### **Значимость результатов для науки и практики**

Результаты, изложенные в диссертации, имеют важное теоретическое и практическое значение. Полученные в диссертации теоретические результаты являются основой для построения и обоснования вычислительных алгоритмов практически важных прикладных проблем, математические модели которых строятся на основе сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений.

В целом, результаты полученные Коптевой Н.В. по априорным и апостериорным оценкам численных решений краевых задач для сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений второго порядка можно оценить как научное достижение в области теории численного решения краевых задач для многомерных нелинейных сингулярно возмущенных уравнений с частными производными.

## **Внутреннее единство структуры работы**

Работа хорошо написана и структурирована: основные классы рассматриваемых сингулярно возмущенных задач выделены в отдельные главы, логично объединены для достижения поставленной цели диссертационной работы.

## **Замечания по диссертационной работе**

1. Не очень удачным является использование термина «норма максимума модуля».
2. Вычислительные эксперименты для иллюстрации теоретических результатов могли быть более полными и более содержательными. Оценки точности содержат несколько слагаемых с теоретически значимыми коэффициентами, что подразумевает достаточно обширное методическое исследование результатов расчетов.
3. Диссертация и автореферат содержат совсем не обязательные описки и неточности.

## **Заключение**

В целом диссертация Коптевой Н.В. **Апостериорные и априорные оценки конечноэлементных решений некоторых сингулярно возмущенных уравнений на анизотропных сетках** является законченным научным исследованием. Научная новизна основных результатов диссертации высокая. Автореферат в целом правильно отражает содержание диссертации.

Диссертация Коптевой Н.В. посвящена актуальным вопросам теоретического исследования точности приближенного решения важных для практики краевых задач для сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений второго порядка, выполнена на хорошем научном уровне и является научно-квалификационной работой, в которой на основании выполненных автором исследований разработаны теоретические

положения, совокупность которых можно квалифицировать как крупное научное достижение вычислительной математики.

Работа **Апостериорные и априорные оценки конечноэлементных решений некоторых сингулярно возмущенных уравнений на анизотропных сетках** удовлетворяет всем требованиям ВАК согласно п.9 «Положения о присуждении ученых степеней», предъявляемым к диссертациям, представленным на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.07 – вычислительная математика, а ее автор, Коптева Наталья Викторовна, безусловно, заслуживает присуждения ей ученой степени доктора физико-математических наук.

Официальный оппонент,

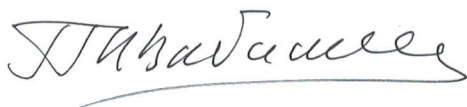
Заведующий лабораторией №76

Федерального государственного бюджетного учреждения науки

Института проблем безопасного развития атомной энергетики РАН,

доктор физико-математических наук,

профессор



Вабищевич Петр Николаевич

24 сентября 2019 г.

115191, Москва,

Большая Тульская ул., д.52

Телефон: +7(495) 955-23-96

E-mail: [vab@ibrae.ac.ru](mailto:vab@ibrae.ac.ru)

Подпись П.Н. Вабищевича заверяю

Ученый секретарь

Института проблем безопасного развития атомной энергетики РАН

кандидат технических наук



В.Е. Калантаров