

Клюев Никита Андреевич

**Моделирование турбулентных течений с применением
пенализированных пристеночных функций**

Специальность 1.2.2. —
«Математическое моделирование, численные методы и
комплексы программ»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Работа выполнена в Федеральном государственном учреждении «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук».

Научный руководитель: **Жданова Наталья Сергеевна**,
кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

Официальные оппоненты: **Исаев Сергей Александрович**,
доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет гражданской авиации им. Главного маршала авиации А.А. Новикова»,
Заведующий лабораторией фундаментальных исследований

Петров Михаил Николаевич,
кандидат физико-математических наук, доцент, ФГАОУ ВО «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»,
Доцент кафедры вычислительной физики МФТИ

Ведущая организация: ФГУП «Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики»

Защита состоится **«04» июня 2026 года в 14:00 часов** на заседании диссертационного совета 24.1.237.01, созданного на базе ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, расположенного по адресу: 125047, Москва, Миусская пл., д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ИПМ им. М.В. Келдыша РАН https://keldysh.ru/council/3/D00202403/klyuev_na_diss.pdf.

Автореферат разослан «___» _____ 2026 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
24.1.237.01,
канд. физ.-мат. наук

Корнилина Марина Андреевна

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования.

Численное моделирование прочно утвердилось в качестве одного из ключевых методов аэродинамических исследований, став незаменимым инструментом для решения как фундаментальных, так и прикладных задач. В частности, при проектировании летательных аппаратов вычислительный эксперимент позволяет существенно сократить число дорогостоящих испытаний как в аэродинамических трубах, так и в ходе лётных экспериментов. Развитие вычислительной техники не только сокращает время моделирования, но и открывает возможности исследовать более сложные объекты с применением высокоточных математических моделей. В практических приложениях численное моделирование турбулентных течений остаётся затратным с точки зрения вычислительных ресурсов, что особенно критично проявляется при параметрических исследованиях и в процедурах оптимизации. В связи с этим сохраняется актуальность разработки экономичных, но обеспечивающих требуемую точность методов математического моделирования.

Наибольшее распространение в численном решении прикладных задач аэродинамики получили математические модели на основе уравнений Навье–Стокса, осреднённых по Рейнольдсу (RANS) или по Фавру, с использованием моделей турбулентности^{1,2}. Однако моделирование некоторых типов турбулентных течений, например, течений с отрывом пограничного слоя, с применением моделей на основе уравнений RANS может быть недостаточно точным. Для более точного моделирования таких течений можно использовать либо прямое численное моделирование (DNS)³, либо методы моделирования крупных вихрей (LES)⁴.

В отличие от подходов DNS и LES, которые из-за нестационарной природы турбулентности требуют решения нестационарных уравнений, подход RANS допускает стационарную постановку. Это позволяет существенно сократить вычислительные ресурсы, требуемые для получения численного решения задачи. Таким образом, методы на основе уравнений RANS выступают компромиссом между точностью моделирования и вычислительными затратами, что и объясняет их статус основного инструмента решения практических задач аэродинамики.

Особенностью течений с большими числами Рейнольдса является пограничный слой — тонкий слой жидкости или газа, формирующийся вблизи

¹Spalart, P. R. A one equation turbulence model for aerodynamic flows / P. R. Spalart, S. R. Allmaras // AIAA journal. 1992. Vol. 94.

²Wilcox, D. C. Formulation of the $k - \omega$ Turbulence Model Revisited / D. C. Wilcox // AIAA Journal. 2008. Vol. 46, no. 11. P. 2823–2838.

³Moin, P. Direct numerical simulation: A tool in turbulence research / P. Moin, K. Mahesh // Annual Rev. Fluid Mech. 1998. Vol. 30. P. 539–578.

⁴Lesieur, M. New trends in large-eddy simulations of turbulence / M. Lesieur, O. Métais // Annu. Rev. Fluid Mech. 1996. Vol. 28. P. 45–82.

твёрдых границ, в котором доминируют эффекты вязкости и турбулентного смешения. Именно в пограничном слое происходят ключевые процессы, которые влияют на силы и тепловые потоки, действующие на обтекаемые тела. Толщина пограничного слоя уменьшается с ростом числа Рейнольдса, и, следовательно, уменьшаются как характерные масштабы осреднённого течения, так и масштабы турбулентных пульсаций. Требования к разрешению расчётной сетки в пристеночной области зависят от подхода к моделированию турбулентности. Критерии для оценки размера пристеночной ячейки расчётной сетки формулируются в автономных координатах, нормированных на масштаб длины вязкого подслоя и обозначаемых верхним индексом «+». В то время как для методов DNS и LES характерный размер пристеночных ячеек в нормальном направлении должен составлять $\Delta h_y^+ \lesssim 1$, а в тангенциальном — $\Delta h_{x,z}^+ \sim 7 \dots 15$ и $\Delta h_{x,z}^+ \sim 10 \dots 40$ соответственно, требования для RANS существенно ниже. Для метода RANS характерный размер пристеночных ячеек в направлении нормали к стенке должен составлять $\Delta h_y^+ \sim 1$, а в тангенциальных направлениях может достигать десятков тысяч⁵. В работе⁶ необходимый размер расчётной сетки для численного моделирования обтекания гражданского самолёта на основе подходов RANS, LES и DNS оценивается в 10^7 , $10^{11.5}$ и 10^{16} узлов соответственно. Несмотря на то, что требования к размеру расчётной сетки при использовании RANS существенно ниже по сравнению с другими подходами к моделированию турбулентности, они всё ещё остаются значительными.

Таким образом, **актуальность** темы исследования обусловлена потребностью в разработке методики численного моделирования турбулентных течений, позволяющей снизить требования к вычислительным ресурсам и при этом обеспечить приемлемую для инженерных приложений точность.

Степень разработанности темы исследования. На сегодняшний день существует ряд методов для сокращения размера расчётной сетки, необходимой для получения корректного численного решения задач аэродинамики. Поскольку основная часть узлов расчётной сетки сосредоточена вблизи твёрдой поверхности, эти подходы нацелены на снижение требований к сеточному разрешению в этой области. Для этого численное разрешение тех или иных структур течения в пристеночной области заменяется менее затратной с вычислительной точки зрения математической моделью^{7,8}.

⁵Гарбарук, А. Лекция 2. Особенности применения вихререзающих подходов для пристенных течений / А. Гарбарук. URL: https://cfd.spb.ru/agarbaruk/SRS_methods/Term10_Part2_Lec02_les_chan.pdf.

⁶Spalart, P. Strategies for turbulence modelling and simulations / P. Spalart // Int. J. Heat and Fluid Flow. 2000. June. Vol. 21, no. 3. P. 252—263 ; 4th International Symposium on Engineering Turbulence Modelling and Measurements, AJACCIO, FRANCE, MAY, 1999.

⁷Craft, T. Development and application of wall-function treatments for turbulent forced and mixed convection flows / T. Craft, S. Gant, A. Gerasimov, H. Iacovides, B. Launder // Fluid Dynamics Research. 2006. Vol. 38, no. 2. P. 127—144 ; Seiken Symposium.

⁸Utyuzhnikov, S. Robin-type wall functions and their numerical implementation / S. Utyuzhnikov // Applied Numerical Mathematics. 2008. Vol. 58, no. 10. P. 1521—1533.

Широкое распространение получили методы пристеночных функций, при использовании которых пристеночная часть течения моделируется с помощью одномерных соотношений (пристеночных функций), в качестве которых часто используются аналитические выражения. Такой подход получил распространение как в методологии RANS^{9,10}, так и в методологии LES под названием LES с моделированием стенки (WMLES)¹¹.

Методы пристеночных функций различаются не только формой и способом задания самой функции, но и подходом к согласованию этой функции с внешним решением. Здесь и далее процесс согласования пристеночной функции и решения системы газодинамических уравнений будет называться сшивкой, а место согласования — точкой сшивки. Зачастую способ сшивки с внешним решением формулируется для дискретизованной модели, что приводит к зависимости точности численного решения как от способа дискретизации уравнений, так и от характеристик расчётной сетки, в особенности от величины пристеночного шага по нормали к стенке. Подобная сложная зависимость обуславливает повышенную сеточную чувствительность решения, которая может проявиться в немонотонном характере ошибок, в частности, в их росте при использовании более детальных сеток. Дополнительным источником неопределённости служит зависимость метода от программной реализации, часто представляющей собой «чёрный ящик» с неоднозначными настройками.

Среди недавних разработок выделяется метод пенализированных пристеночных функций (метод ППФ)¹², формулировка которого определена на уровне математической модели, а не её дискретного аналога, как в большинстве известных методов пристеночных функций. Метод ППФ сформулирован для преодоления недостатков традиционных подходов и обладает рядом преимуществ. В отличие от традиционных методов, в методе ППФ значительно снижено влияние сеточного разрешения на решение. Кроме того, в методе ППФ устранена необходимость явной интерполяции решения в точку сшивки, что исключает неопределённость, связанную с этой процедурой, и повышает точность расчётов. В основе метода лежит дифференциальная формулировка условия сшивки внешнего решения с пристеночной функцией и последующего переноса касательного напряжения из области сшивки на поверхность тела. Описанная процедура реализуется через решение вспомогательного дифференциального уравнения в частных производных для скорости трения (масштаба скорости в пограничном

⁹Patankar, S. V. Heat and Mass Transfer in Boundary Layers / S. V. Patankar, D. B. Spalding. Morgan-Grampia, 1968.

¹⁰Kalitzin, G. Near-wall behavior of RANS turbulence models and implications for wall functions / G. Kalitzin, G. Medic, G. Iaccarino, P. Durbin // Journal of Computational Physics. 2005. Vol. 204, no. 1. P. 265–291.

¹¹Kawai, S. Dynamic non-equilibrium wall-modeling for large eddy simulation at high Reynolds numbers / S. Kawai, J. Larsson // Physics of Fluids. 2013. Vol. 25, no. 1. P. 015105.

¹²Zhdanova, N. S. Penalized Wall Function Method for Turbulent Flow Modeling / N. S. Zhdanova, O. V. Vasilyev // Supercomputing Frontiers and Innovations. 2022. Dec. Vol. 9, no. 4. P. 55–68.

слое), которое основано на идеях метода характеристических штрафных функций.

Гибкость формулировки метода ППФ позволяет применять его с различными пристеночными функциями, включая неравновесные. Кроме того, метод ППФ позволяет динамически изменять положение точки сшивки. Данная особенность позволяет смещать точку сшивки в областях неравновесного пограничного слоя, в том числе в областях отрыва и присоединения потока, ближе к стенке, в сторону вязкого подслоя, где пристеночная функция, выведенная в предположении равновесного пограничного слоя, точнее описывает физику течения, чем на логарифмическом участке.

К моменту начала настоящего исследования метод ППФ был реализован и протестирован лишь для узкого класса двумерных течений на структурированных расчётных сетках. Результаты исследований, представленные в работах^{13,14}, с одной стороны, продемонстрировали перспективность метода ППФ, с другой — обозначили круг проблем, требующих решения для расширения области практического применения метода.

Таким образом, несмотря на то, что к настоящему времени разработано и широко используется множество методов пристеночного моделирования, вопрос повышения их эффективности и универсальности до сих пор остаётся открытым.

Целью диссертации является разработка методики численного моделирования турбулентных течений, позволяющей в рамках подхода RANS снизить требования к разрешению расчётной сетки в пристеночной области, и демонстрация применимости разработанной методики для решения широкого класса задач внешней аэродинамики, в том числе отрывных течений.

Для достижения поставленной цели решены следующие задачи:

1. Обобщение метода ППФ для численного моделирования пристеночных областей течений в присутствии продольного градиента давления.
2. Повышение устойчивости разрабатываемой методики численного моделирования пристеночных турбулентных течений.
3. Программная реализация методики численного моделирования турбулентных течений на основе метода ППФ для проведения расчётов задач с применением параллельных вычислительных систем.
4. Тестирование методики численного моделирования турбулентных течений на основе метода ППФ при численном решении модельных задач.
5. Проведение сравнительного анализа эффективности традиционных методов пристеночных функций и метода ППФ.

¹³ Vasilyev, O. V. Characteristic-based volume penalization-imposed wall function method for turbulent boundary layer modeling / O. V. Vasilyev, N. S. Zhdanova // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2023. Т. 63, № 5. С. 821—836.

¹⁴ Vasilyev, O. V. Generalisation of the Penalised Wall Function Method for the Simulation of Turbulent flows With Unfavourable Pressure Gradients / O. V. Vasilyev, N. S. Zhdanova // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2023. Т. 63, № 12. С. 2384—2401.

6. Исследование применимости методики численного моделирования турбулентных течений на основе метода ППФ для расчёта задачи внешнего обтекания самолёта с посадочной механизацией.

Научная новизна:

В диссертации представлена методика численного моделирования турбулентного пограничного слоя в рамках подхода RANS. Основная особенность методики — применение метода пенализированных пристеночных функций, который является новым перспективным подходом, относящимся к классу методов пристеночных функций. Метод ППФ основан на математических принципах, не используемых ни в одном из известных автору методов пристеночных функций. Основополагающее уравнение метода ППФ, связывающее скорость трения на поверхности тела с параметрами течения во внешней области турбулентного пограничного слоя, получено с использованием метода характеристических штрафных функций. Дифференциальная формулировка метода ППФ полностью устраняет плохо определённое условие сшивки решения и необходимость явной интерполяции решения в точку сшивки по соседним узлам, что влечёт за собой сниженную сеточную зависимость и повышенную точность метода ППФ по сравнению с традиционными методами пристеночных функций. Кроме того, гибкость формулировки метода ППФ обеспечивает возможность использования различных, аналитических и численных, вариантов пристеночных функций, а также адаптации положения точки сшивки к особенностям течения для повышения точности моделирования.

В диссертационной работе предложен новый метод адаптации положения точки сшивки, основанный на учёте локального сеточного разрешения и характеристик течения, который позволяет смещать точку сшивки в областях повышенного градиента давления. При использовании нового метода адаптации точка сшивки располагается наиболее близко к стенке в окрестности точек отрыва и присоединения потока, что не достигалось в более простом варианте.

Также в диссертации формулируется и тестируется новый подход для повышения устойчивости расчёта на неструктурированных сетках с применением метода ППФ. Предложенный подход основан на введении искусственной анизотропной вязкости в уравнение для скорости трения. В диссертации предлагается аппроксимация оператора вязкости на основе метода Галёркина с кусочно-линейными базисными функциями. В ранних формулировках метода ППФ лишь обозначалась возможность добавления изотропной искусственной вязкости в уравнение для скорости трения, а её применение не исследовалось.

В рамках диссертации впервые проведено сравнение метода ППФ с традиционным методом пристеночных функций (метод ТПФ). На примере результатов численного решения тестовых задач продемонстрированы преимущества метода ППФ, которые ранее формулировались только теоретически.

В диссертационной работе впервые рассматривается применение метода ППФ с предложенными модификациями для широкого класса двумерных и трёхмерных задач, включающих как безотрывные, так и отрывные течения

в условиях продольного градиента давления. Кроме того, впервые на основе метода ППФ выполнен промышленно-ориентированный расчёт обтекания самолёта с выпущенной посадочной механизацией, при этом для сокращения вычислительных затрат моделировалась лишь половина конфигурации с наложением условия симметрии.

Теоретическая значимость диссертационной работы заключается в переносе идей метода характеристических штрафных функций на новую область — методы пристеночных функций. Дополнительно значимость исследования заключается в разработке метода адаптации положения точки шивки, параметры которого не зависят от рассматриваемой задачи. В отличие от подхода из работы¹⁵, требующего ручного подбора настроечных констант, предложенный метод использует локальные характеристики течения, что обеспечивает его универсальность. Идеи предложенного метода адаптации положения точки шивки могут быть использованы для индикации отрывных течений в других приложениях, основанных на некотором масштабе скорости.

Практическая значимость диссертации заключается в разработке, реализации и верификации методики численного моделирования турбулентных течений на основе метода ППФ, которая позволяет проводить расчёты практически значимых задач с существенно меньшими вычислительными затратами без потери точности получаемого решения, что подтверждается решением широкого круга тестовых задач. При этом метод ППФ лишён недостатков, присущих традиционным методам пристеночных функций.

Методология и методы исследования. Основным методом исследования в диссертации является численное моделирование течений вязкого совершенного газа в рамках подхода RANS. В качестве модели турбулентности используется модель Спаларта–Аллмараса¹⁶.

Для аппроксимации конвективных слагаемых используется конечно-объёмный подход с использованием вершинно-центрированных контрольных объёмов. Для реконструкции на гранях применяются квазиодномерные реконструкции семейства EBR¹⁷ (Edge-Based Reconstruction schemes, схемы, основанные на квазиодномерных рёберно-ориентированных реконструкциях) с приближённым решением задачи распада разрыва методом Роу¹⁸. Вязкие

¹⁵Vasilyev, O. V. Characteristic-based volume penalization-imposed wall function method for turbulent boundary layer modeling / O. V. Vasilyev, N. S. Zhdanova // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2023. Т. 63, № 5. С. 821–836.

¹⁶Spalart, P. R. A one equation turbulence model for aerodynamic flows / P. R. Spalart, S. R. Allmaras // AIAA Journal. 1992. Vol. 94.

¹⁷Bakhvalov, P. Edge-based reconstruction schemes for unstructured tetrahedral meshes / P. Bakhvalov, I. Abalakin, T. Kozubskaya // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2016. Vol. 81, no. 6. P. 331–356.

¹⁸Roe, P. L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes / P. L. Roe // Journal of computational physics. 1981. Vol. 43, no. 2. P. 357–372.

слагаемые аппроксимируются с применением метода локальных разбиений сеточных элементов¹⁹. В диссертации для моделирования стационарных задач применяется метод установления, где используется одношаговый неявный метод Эйлера первого порядка с одной итерацией по методу Ньютона для решения образующейся на каждом шаге по времени системы нелинейных алгебраических уравнений. Для решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), получаемой на каждой итерации метода Ньютона, применяется стабилизированный метод бисопряжённых градиентов BiCGStab²⁰ с симметричным предобуславливанием Гаусса–Зейделя SGS.

Для метода ППФ используется конечно-разностная аппроксимация конвективного и источникового слагаемых. Искусственная вязкость аппроксимируется с применением метода Галёркина с кусочно-линейными базисными функциями и диагонализацией матрицы масс. Аппроксимация по времени уравнения для скорости трения в методе ППФ аналогична аппроксимации системы уравнений RANS.

Метод ППФ реализован в виде модуля в программном комплексе NOISEtte²¹, с помощью которого были проведены все расчёты, представленные в диссертации, с применением технологий параллельного программирования MPI и OpenMP на языке C++.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Разработан метод адаптации положения точки сшивки решений, учитывающий локальные характеристики течения и пристеночное разрешение сетки, позволяющий обобщить метод пенализированных пристеночных функций на случай отрывных течений.
2. Предложен подход к стабилизации численного решения в рамках метода пенализированных пристеночных функций на неструктурированных сетках, основанный на введении направленной искусственной вязкости в уравнение для расчёта скорости трения.
3. Создана программная реализация метода пенализированных пристеночных функций, включающая новый алгоритм адаптации точки сшивки и стабилизированное уравнение для скорости трения, с применением гибридного параллелизма (MPI + OpenMP).
4. Проведён сравнительный анализ метода пенализированных пристеночных функций и традиционного метода пристеночных функций, подтвердивший снижение сеточной зависимости и повышение точности

¹⁹ Bakhvalov, P. A. Method of averaged element splittings for diffusion terms discretization in vertex-centered framework / P. A. Bakhvalov, M. Surnachev // Journal of Computational Physics. 2022. Vol. 450. P. 110819.

²⁰ Vorst, H. A. van der. BI-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of BI-CG for the solution of nonsymmetric linear systems / H. A. van der Vorst // SIAM J. Sci. Stat. Comput. 1992. Vol. 13, no. 2. P. 631–644.

²¹ Gorobets, A. Technology for Supercomputer Simulation of Turbulent Flows in the Good New Days of Exascale Computing / A. Gorobets, A. Duben // Supercomputing Frontiers and Innovations. 2021. Feb. Vol. 8, no. 4. P. 4–10.

расчётов при использовании метода пенализированных пристеночных функций.

5. Продемонстрирована эффективность методики численного моделирования турбулентного пограничного слоя на основе модифицированного метода пенализированных пристеночных функций для решения промышленно-ориентированных задач аэродинамики и показано снижение требований к пристеночному разрешению расчётной сетки без существенной потери точности решения.

Личный вклад автора. Автором диссертации были предложены: метод искусственной анизотропной вязкости для повышения устойчивости численного расчёта с применением метода ППФ; метод адаптации положения точки сшивки в методе ППФ, основывающийся на локальном пристенном разрешении расчётной сетки и учитывающий продольный градиент давления. Все предложенные модификации метода ППФ были реализованы в программном комплексе NOISEtte автором лично. Вклад автора также заключается в реализации метода ППФ для объёмных неструктурированных сеток. Автором лично были построены все используемые в диссертации неструктурированные и объёмные расчётные сетки и все сетки для расчёта обтекания профиля NASA 0012. Автором лично проведена основная часть представленных в работе расчётов и анализ их результатов. Вклад автора является определяющим при получении всех научных результатов, выносимых на защиту.

Достоверность полученных результатов обеспечивается сравнением результатов моделирования с применением метода ППФ с результатами расчётов, выполненных с помощью верифицированного на широком классе задач программного комплекса NOISEtte без применения методов пристеночных функций. Часть тестовых случаев основана на материалах ресурса NASA²², посвящённого верификации и валидации численных реализаций моделей турбулентности, с данными которого также проводится сравнение. Кроме того, результаты численного моделирования сопоставляются с экспериментальными данными. Полученные результаты демонстрируют хорошее согласование с имеющимися референсными данными.

Апробация работы. Основные результаты диссертации доложены на 6 конференциях:

1. VI Всероссийская конференция молодых ученых-механиков, Сочи, 04.09.2023 - 14.09.2023;
2. XXXIV научно-техническая конференция по аэродинамике, п. Володарского, 29.02.2024 - 01.03.2024;
3. Новые горизонты прикладной математики, Москва, 18.04.2024-19.04.2024;
4. «Супервычисления и математическое моделирование», Саров, 20.05.2024-24.05.2024;

²²NASA Langley Research Center Turbulence Modeling Resource. URL: <https://turbmodels.larc.nasa.gov>.

5. X российская конференция «Вычислительный эксперимент в аэроакустике и аэродинамике», Светлогорск, 16.09.2024–21.09.2024;
6. II Российская конференция «Новые горизонты прикладной математики», Москва, 17.04.2025–19.04.2025.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 3 печатных изданиях [1–3], входящих в перечень ВАК, 2 из которых изданы в журналах индексируемых Web of Science и Scopus [2; 3].

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав и заключения. Полный объем диссертации составляет 131 страницу текста с 59 рисунками и 2 таблицами. Список литературы содержит **105** наименований.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность темы диссертации, кратко приводится степень её разработанности, описываются цели и задачи, поставленные перед автором работы. Также излагаются научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы и положения, выносимые на защиту. Кратко описываются методология работы, степень достоверности полученных результатов и их апробация. Указывается личный вклад автора.

Первая глава посвящена обзору литературы по теме пристеночного моделирования с применением методов пристеночных функций. В первом разделе анализируются существующие методы пристеночных функций. Излагаются преимущества и недостатки существующих подходов как с точки зрения математической формулировки, так и с точки зрения прозрачности и эффективности программной реализации. Второй раздел посвящён обзору различных законов стенки, используемых в методах пристеночных функций. Рассматриваются как аналитические, так и численные законы стенки, при этом особое внимание уделяется специфике их применения в контексте численного моделирования.

Вторая глава посвящена описанию математической модели, применяемой в диссертационной работе. В начале главы приводится система осреднённых уравнений Навье–Стокса и её замыкание на основе модели турбулентности Спаларта–Аллмараса.

Далее излагается метод ППФ, включая вывод основного уравнения для скорости трения и различные методы адаптации положения точки сшивки к локальным особенностям течения. В методе ППФ алгебраическое условие сшивки пристеночной функции $u^+ = f(y^+)$ и решения уравнений RANS заменяется релаксационным условием для скорости трения u_τ в ограниченном слое сшивки, из которого значение u_τ переносится на стенку. Для этого вводится вспомогательное поле скорости трения $u_\tau(\mathbf{x}, t)$, эволюция которого описывается следующим

уравнением в частных производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\tau}{\partial t} - \underbrace{\mathcal{H} \left(\delta_{\text{EL}}^+ - \frac{u_\tau}{\nu} \delta(\mathbf{x}) \right)}_{\text{перенос } u_\tau \text{ на поверхность}} \frac{L}{\eta_s} \frac{\partial u_\tau}{\partial \mathbf{n}} = \\ = \underbrace{\chi_\delta \left(\frac{\frac{u_\tau}{\nu} \delta(\mathbf{x}) - \delta_{\text{EL}}^+}{\sigma^+} \right)}_{\text{релаксация } u_\tau \text{ в области сшивки}} \frac{1}{\eta_f} \frac{u_\parallel(\mathbf{x}) - u_\tau f \left(\frac{u_\tau}{\nu} \delta(\mathbf{x}) \right)}{f(\delta_{\text{EL}}^+) + \delta_{\text{EL}}^+ f'(\delta_{\text{EL}}^+)} + \underbrace{D u_\tau}_{\text{оператор сглаживания}}, \quad (1) \end{aligned}$$

где δ_{EL}^+ — расстояние от стенки до точки сшивки в координатах вязкого подслоя, \mathbf{n} — единичный вектор нормали, $u_\parallel = |\mathbf{u} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})\mathbf{n}|$ — параллельная стенке компонента скорости, L — характерный масштаб длины, η_s — масштаб времени переноса величины u_τ , η_f — масштаб времени релаксации условия сшивки. Маркировочные функции $\mathcal{H}(\xi)$ и $\chi_\delta(\xi)$ отвечают за ограничение действия соответствующей им части уравнения. Функция Хевисайда $\mathcal{H}(\xi)$ задаёт область переноса величины u_τ при расстоянии до стенки $\delta(\mathbf{x}) < \frac{\nu}{u_\tau} \delta_{\text{EL}}^+$, функция $\chi_\delta(\xi)$ ограничивает слой сшивки пристеночной функции с решением RANS и задаётся половиной функции Гаусса:

$$\chi_\delta(\xi) = \mathcal{H}(\xi) \exp(-\xi^2/2).$$

Параметр σ^+ определяет нормализованную характерную толщину области сшивки. Направленный перенос скорости трения u_τ из точки сшивки в сторону стенки на масштабе времени η_s осуществляется конвективным слагаемым в левой части уравнения (1), которое основано на методе характеристических штрафных функций²³. Оператор искусственной вязкости $D u_\tau$ может опционально применяться для сглаживания поля u_τ .

При использовании метода ППФ на твёрдой поверхности изменяется граничное условие для скорости \mathbf{u} . Вместо условия прилипания задается условие непротекания:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \Big|_{\tilde{y}=0} = 0$$

для компоненты скорости, направленной вдоль нормали к стенке, $u_\perp(\mathbf{x}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$, и условие на трение для тангенциальной компоненты скорости u_\parallel :

$$(\nu + \nu_T) \frac{\partial \mathbf{u}_\parallel}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\tilde{y}=0} = \left(\frac{\mathbf{u}_\parallel}{u_\parallel} \Big|_{\tilde{y}=0} \right) u_\tau^2(\tilde{x}, t),$$

где значение u_τ определяется из решения уравнения (1).

²³*Brown-Dymkoski, E. A Characteristic Based Volume Penalization Method for General Evolution Problems Applied to Compressible Viscous Flows / E. Brown-Dymkoski, N. Kasimov, O. V. Vasilyev // J. Comp. Phys. 2014. Vol. 262. P. 344–357.*

Для корректного и точного описания течений в областях торможения, отрыва и присоединения потока в методе ППФ используются методы адаптации положения точки сшивки. Возможность обобщения метода на случай переменного положения точки сшивки обеспечивается гибкостью его формулировки. В работе рассмотрены три метода адаптации положения точки сшивки.

Сначала описан наиболее простой метод адаптации положения точки сшивки. В данном подходе автоматическое смещение положения точки сшивки достигается введением пороговой скорости трения u_τ^{\min} и замены расстояния от точки сшивки до стенки δ_{EL} на ограниченное эффективное значение δ_{EL}^{eff} , определяемое следующим образом:

$$\delta_{EL}^{\text{eff}} = \frac{\nu\delta_{EL}^+}{\max(u_\tau, u_\tau^{\min})}. \quad (2)$$

Далее этот метод обозначается как ППФ_{max}. Применение выражения (2) смещает точку сшивки ближе к стенке в окрестностях точек отрыва и присоединения потока.

Основной недостаток метода адаптации ППФ_{max} заключается в том, что в (2) не учитывается локальное пристеночное разрешение расчётной сетки. Это приводит к тому, что при расчёте на сетках с высоким разрешением в нормальном направлении точка сшивки может быть значительно удалена от стенки в области отрывного течения по сравнению с первым узлом сетки, хотя теоретически имеется запас по узлам для приближения точки сшивки к стенке, а следовательно, для повышения точности решения. Дополнительным недостатком метода адаптации ППФ_{max} является неопределённость в выборе параметра u_τ^{\min} .

Для преодоления недостатков метода ППФ_{max} предложен метод адаптации положения точки сшивки ППФ_Δ, учитывающий локальное разрешение расчётной сетки. В формулировке метода адаптации явно задаётся наименьшее возможное расстояние от точки сшивки до стенки, которое определяется величиной первого пристеночного шага сетки Δ в нормальном направлении. Это достигается с помощью следующего выражения для эффективного положения точки сшивки δ_{EL}^{eff} :

$$\delta_{EL}^{\text{eff}} = \frac{\nu\delta_{EL}^+(\beta + (1 - \beta)\min((u_\tau/u_\tau^{\min})^\alpha, 1))}{\max(u_\tau, u_\tau^{\min})}. \quad (3)$$

Параметр задачи α определяет скорость смещения точки сшивки. В работе использовалось постоянное значение $\alpha = 2.2$. Параметр β вычисляется по формуле:

$$\beta = \frac{u_\tau^{\min}\Delta}{\nu\delta_{EL}^+}. \quad (4)$$

Значение параметра u_τ^{\min} можно определить как скорость трения, при которой пристеночный шаг сетки Δ в безразмерных координатах вязкого подслоя принимает значение Δ_{\min}^+ , которое является параметром задачи. Следовательно,

значение u_τ^{\min} выражается через безразмерное пристеночное разрешение Δ_{\min}^+ :

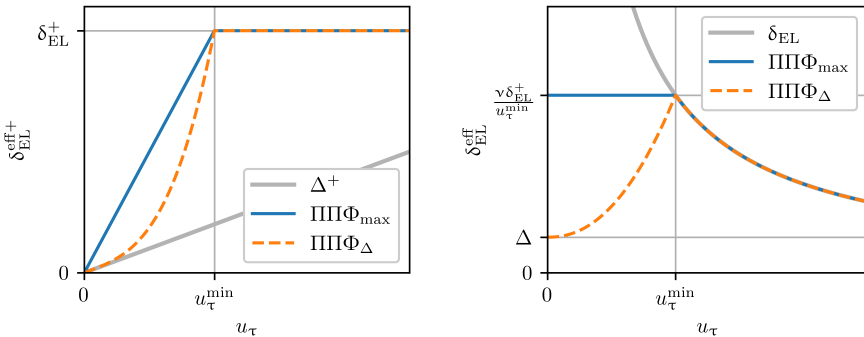
$$u_\tau^{\min} = \frac{\nu \Delta_{\min}^+}{\Delta}. \quad (5)$$

Другими словами, если скорость трения u_τ становится меньше u_τ^{\min} , текущее пристеночное разрешение сетки достаточно для смещения точки сшивки на безразмерное расстояние Δ_{\min}^+ до стенки. Подставляя (5) в (4), можно получить упрощённую формулу для параметра β :

$$\beta = \frac{\Delta_{\min}^+}{\delta_{EL}^+}.$$

В методе ППФ $_\Delta$ величина Δ определяется либо через пристеночный шаг сетки в нормальном направлении, либо как внешний параметр задачи.

На рисунке 1 приводится зависимость положения точки сшивки от скорости трения u_τ в методах адаптации ППФ $_{\max}$ и ППФ $_\Delta$, в частности, при стремлении u_τ к нулю, что характерно для областей отрыва и присоединения потока. На рисунке 1а изменение положения точки сшивки в зависимости от



а) В безразмерных координатах вязкого подслоя б) В исходных физических координатах подслоя

Рисунок 1 — Зависимость положения точки сшивки от значения скорости трения u_τ

u_τ представлено в координатах вязкого подслоя, а на рисунке 1б — в исходных физических координатах. В координатах вязкого подслоя (см. рисунок 1а) точка сшивки в методе ППФ $_\Delta$ находится ближе к стенке при $u_\tau < u_\tau^{\min}$, чем в методе ППФ $_{\max}$. Как видно из рисунка 1б, в методе ППФ $_{\max}$ при стремлении u_τ к нулю положение точки сшивки в физических координатах δ_{EL}^{eff} остаётся постоянным.

В то же время в методе ППФ $_{\Delta}$ точка сшивки стремится к пристеночному положению Δ . Если Δ является пристеночным сеточным разрешением в нормальном к стенке направлении, то точка сшивки стремится к первому пристеночному узлу. Таким образом, при использовании метода адаптации положения точки сшивки ППФ $_{\Delta}$ можно ожидать, что течение в окрестности критических точек будет моделироваться точнее, чем при использовании метода ППФ $_{\max}$.

Определение (5) пороговой скорости трения u_{τ}^{\min} зависит от локального пристеночного шага сетки и не предусматривает адаптацию положения точки сшивки при наличии градиента давления и отличных от нуля значениях скорости трения. В последнем случае точка сшивки находится в области повышенной ошибки аппроксимации профиля продольной скорости пристеночной функцией, полученной в предположении равновесности пограничного слоя, что приводит к уменьшению точности моделирования течения.

Для расширения области применимости метода ППФ в работе предложен новый метод адаптации положения точки сшивки ППФ $_p$, учитывающий степень неравновесности пограничного слоя на основе локальных параметров течения. Пороговая скорость трения u_{τ}^{\min} в (3) определяется следующим образом:

$$u_{\tau}^{\min} = \max(u_{p_{\tau}}, u_{p_n}), \quad (6)$$

где масштабы скорости $u_{p_{\tau}}$ и u_{p_n} основаны на определении $p^+ = \frac{\partial p}{\partial \tau} \frac{\nu}{\rho u_{\tau}^3}$. Величины $u_{p_{\tau}}$ и u_{p_n} выражаются через компоненты градиента давления следующим образом:

$$u_{p_{\tau}} = C_{p_{\tau}} \left(\frac{\nu}{\rho} \left| \frac{\partial p}{\partial \tau} \right| \right)^{1/3},$$

$$u_{p_n} = C_{p_n} \left(\frac{\nu}{\rho} \left| \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \right| \right)^{1/3}.$$

Параметры $C_{p_{\tau}} = 5$ и $C_{p_n} = 2$ определяют чувствительность метода адаптации к продольной и поперечной компонентам градиента давления соответственно. Одновременное использование в (6) как продольной, так и поперечной компонент градиента давления обеспечивает ненулевое значение u_{τ}^{\min} в неравновесных областях течения. В настоящей работе $C_{p_{\tau}}$ и C_{p_n} были подобраны при решении задачи обтекания профиля NASA 0012 под углом атаки $\alpha = 5^{\circ}$ таким образом, чтобы обеспечить устойчивость расчёта при наиболее близком к стенке положении точки сшивки в области торможения потока.

Таким образом, в методе ППФ $_p$ градиент давления лежит в основе критерия адаптации положения точки сшивки. Данный подход применим как в окрестностях отрыва и присоединения потока, так и в областях неравновесного пограничного слоя при значительной величине трения. Предложенный вариант определения пороговой скорости трения u_{τ}^{\min} (6) не зависит от параметров

расчётной сетки. Расширенная область применимости и сниженная сеточная зависимость качественно отличают метод ППФ_p от методов ППФ_{max} и ППФ_Δ, что подтверждают результаты проведённых расчётов, представленные в Главе 5 диссертации.

Третья глава содержит описание численного метода для проведения расчетов с применением разработанной математической модели. Вначале приводится общий алгоритм реализации методов пристеночных функций с уточнениями для метода ППФ и традиционного метода пристеночных функций (метод ТПФ), основанного на сшивке в первых пристеночных узлах, что характерно для многих методов пристеночных функций. Далее кратко излагается метод дискретизации системы осреднённых уравнений Навье–Стокса. Затем подробно рассматривается дискретизация уравнения для скорости трения (1). На этапе решения уравнения для скорости трения решение уравнений RANS считается «замороженным». Конвективное слагаемое аппроксимируется неявно с помощью метода направленных разностей, строящихся на значении интерполируемых в точку пересечения грани сетки нормалью, выпущенной из рассматриваемого узла. Источниковый член также аппроксимируется неявным образом.

В главе излагается предложенный в работе метод повышения устойчивости расчёта с применением метода ППФ на основе включения искусственной анизотропной вязкости. Для сглаживания поля скорости трения используется оператор анизотропной вязкости следующего вида:

$$Du_{\tau} = \chi_{\nu} \left(\delta_{EL}^{+} - \frac{u_{\tau}}{\nu} \delta(\mathbf{x}) \right) \operatorname{div} (\nu_a h_{\mathbf{n}} \mathbf{A} \operatorname{grad} u_{\tau}),$$

где ν_a — коэффициент вязкости, $h_{\mathbf{n}}$ — локальный размер элемента в направлении нормали \mathbf{n} , матрица $\mathbf{A} = \mathbf{nn}^T$ обеспечивает анизотропное сглаживание вдоль нормалей, а $\chi_{\nu}(\xi)$ — маркировочная функция вида:

$$\chi_{\nu}(\xi) = \max \left(\mathcal{H}(\xi), \chi_{\delta} \left(\frac{\xi}{\sigma^{+}} \right) \right).$$

Функция $\chi_{\nu}(\xi)$ локализует действие оператора вязкости только внутри области переноса и сшивки, что предотвращает диффузию начального решения u_{τ} из внешних областей, которая может существенно замедлять сходимость численного расчёта. Анизотропия вязкости вдоль нормалей необходима для минимизации размывания решения в тангенциальном направлении. Включение $h_{\mathbf{n}}$ в коэффициент вязкости обусловлено тем, что численные колебания в решении напрямую связаны с характеристиками используемой расчётной сетки.

Для дискретизации оператора искусственной анизотропной вязкости применяется метод локальных разбиений элементов (AES). Метод AES основан на осреднении аппроксимаций методом Галёркина на симплицальных разбиениях исходной сетки, что в двумерном случае означает всевозможные разбиения элементов сетки на треугольники, а в трёхмерном — на тетраэдры. Для дискретизации оператора вязкости в уравнении (1) получена аппроксимация методом

Галёркина с кусочно-линейными базисными функциями для треугольных и тетраэдральных элементов.

В заключительной части главы представлены вспомогательные элементы разрабатываемой методики численного моделирования турбулентных течений с применением метода ППФ. Сначала излагается метод устранения непостоянства положения точки сшивки для повышения устойчивости моделирования сложных течений с применением разработанного метода адаптации положения точки сшивки. Также рассматривается метод распространения на всю расчётную область величины пристеночного шага сетки для применения методов адаптации положения точки сшивки на сетках с переменным пристеночным шагом.

В четвёртой главе излагаются детали программной реализации метода ППФ в программном комплексе (ПК) NOISEtte. Метод ППФ реализован на языке C++ в виде модуля `module_PWF` с применением технологий гибридной параллелизации MPI и OpenMP. Схема взаимодействия модуля ППФ с программным комплексом (ПК) NOISEtte в процессе расчёта показана на рисунке 2. Процедуры модуля `module_PWF` вызываются на различных этапах расчёта: во время инициализации и в основном цикле интегрирования по времени.

Произведена оценка параллельной эффективности реализации метода ППФ в ПК NOISEtte, которая проводилась на примере решения трёхмерной задачи обтекания выпуклости в канале. Измерения проводились на суперкомпьютере К-60, установленном в Суперкомпьютерном Центре коллективного пользования ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. Было задействовано до 32 расчётных узлов кластера, что составляет 896 процессорных ядер. Результаты тестирования параллельной реализации представлены на рисунке 3, где показана зависимость ускорения от количества используемых вычислительных узлов. Ускорение вычислялось как отношение времени счёта на одном узле кластера ко времени счёта на заданном количестве узлов. Параллельная эффективность реализации метода ППФ близка к эффективности базовой версии ПК NOISEtte, что является хорошим результатом, учитывая неравномерность распределения по расчётной области интенсивности вычислений уравнения для скорости трения.

В пятой главе приводятся результаты расчётов модельных задач с применением разработанной методики численного моделирования турбулентных течений, включающей модифицированный в работе метод пенализированных пристеночных функций, обладающий расширенными функциональными возможностями и повышенной эффективностью.

В качестве референсного решения, которое на рисунках и в таблицах будет обозначаться как «СА», используется расчёт без применения пристеночных функций на сетке с разрешённым вязким подслоем $y_1^+ \sim 1$.

В разделе 5.1 рассматривается обтекание плоской пластины без градиента давления. Геометрия расчётной области с граничными условиями представлена на рисунке 4. Исследовалось применение методов ППФ и ТПФ на сетках с различным пристеночным разрешением $y_1^+ \sim 10, 30, 50$ и 100 . Распределения

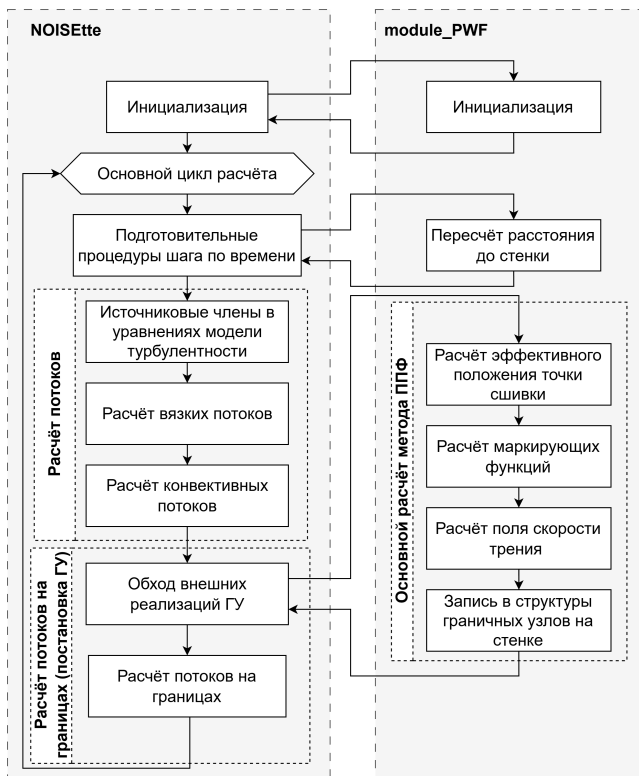


Рисунок 2 — Схема взаимодействия модуля `module_PWF`, реализующего метод ППФ, с ПК NOISEtte

коэффициента трения, полученные в расчётах с применением метода ППФ, представлены на рисунке 5а, где распределения хорошо согласуются с референсным решением и решением, полученным с использованием программного комплекса CFL3D²⁴. В случае метода ТПФ (рисунок 5б) на сетке с $y_1^+ \sim 10$ (самой подробной для методов пристеночных функций) наблюдается наибольшее отклонение от референсного решения. В этом случае точка сшивки располагается в буферной области турбулентного пограничного слоя, где снижена точность аппроксимации профиля продольной скорости аналитической пристеночной функцией. Таким образом, демонстрируется преимущество метода ППФ в виде сниженной сеточной зависимости, которое сохраняется и на неструктурированных сетках со схожими характеристиками (шагом в продольном и поперечном направлениях и степенью анизотропии), что также демонстрируется в разделе.

²⁴NASA Langley Research Center Turbulence Modeling Resource. URL: <https://turbmodels.larc.nasa.gov>.

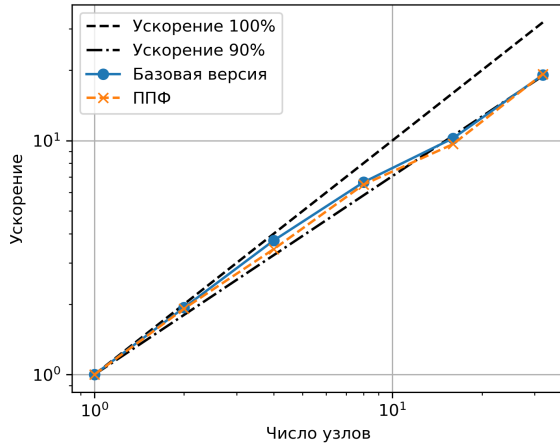


Рисунок 3 — Зависимость ускорения расчёта от количества используемых узлов кластера

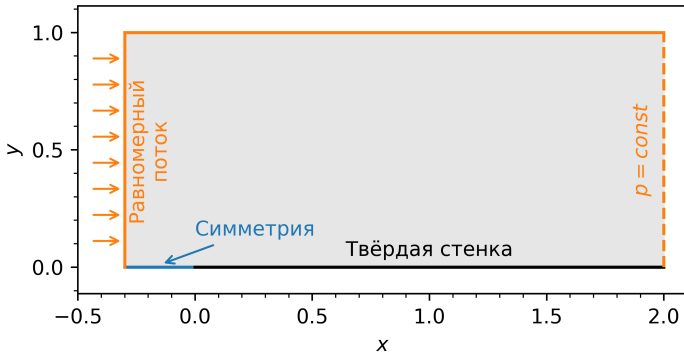
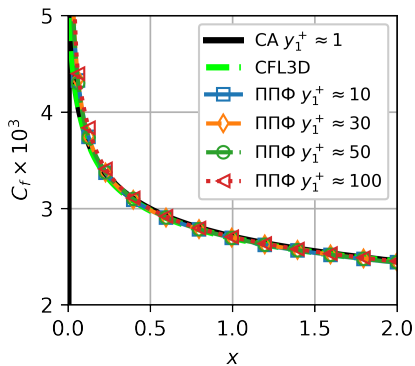


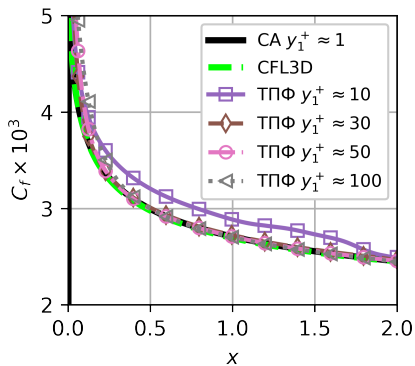
Рисунок 4 — Расчётная область и граничные условия для задачи обтекания плоской пластины

На примере безградиентного обтекания пластины исследуется применение искусственной анизотропной вязкости для стабилизации решения на неструктурированных сетках. При использовании коэффициента $\nu_a = 1$ заметно снижается амплитуда осцилляций в распределении коэффициента трения (рисунок ба), а также наблюдается уменьшение невязок на несколько порядков (рисунок бб).

В разделе 5.2 рассматривается обтекание плоской пластины в присутствии неблагоприятного градиента давления, формирующего область рециркуляционного течения, на расчётных сетках с пристеночным разрешением $y_1^+ \sim 10$ и 100.

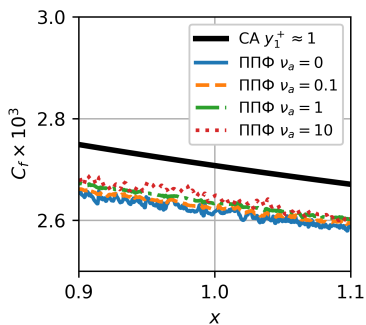


а) Метод ППФ

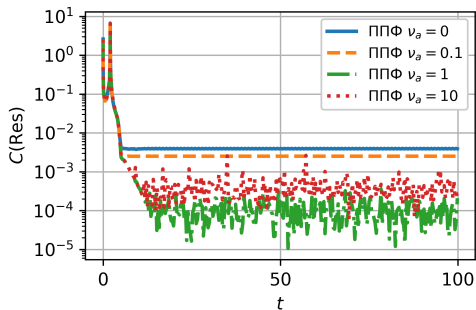


б) Метод ТПФ

Рисунок 5 — Распределение коэффициента трения в расчётах на структурированных сетках



а) Распределение C_f в окрестности точки $x = 1$



б) Зависимость максимума невязки от времени

Рисунок 6 — Исследование применения искусственной анизотропной вязкости

Схема постановки граничных условий и линии тока приведены на рисунке 7. Сначала проводится сравнение методов адаптации положения точки шивки ППФ_{max} и ППФ_Δ. В случае метода ППФ_{max} точка шивки в области рециркуляции располагается выше, чем у метода ППФ_Δ при одинаковом значении параметра δ_{EL}^+ (рисунок 8а), что обуславливает большую точность решения с применением метода ППФ_Δ (рисунок 8б). Дополнительно проведено исследование влияния параметров метода ППФ_Δ на результаты численного моделирования.

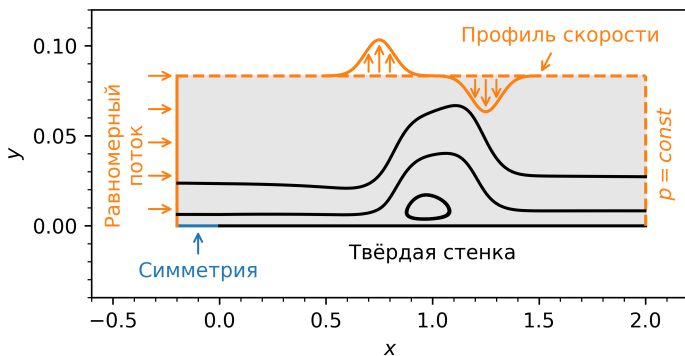
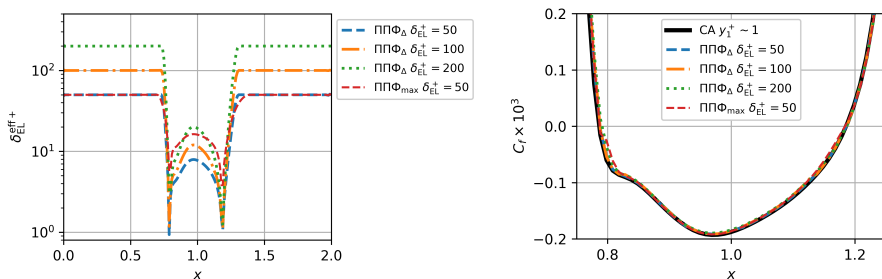


Рисунок 7 — Постановка задачи обтекания пластины с неблагоприятным градиентом давления и линии тока

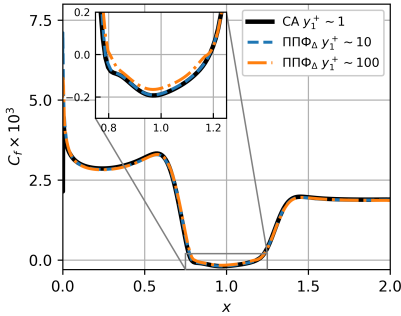


а) Распределение эффективного положения точки сшивки δ_{EL}^{eff+} б) Распределение коэффициента трения в области рециркуляционного течения

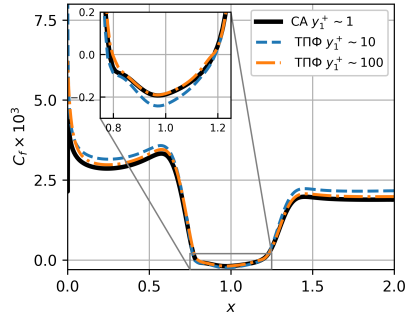
Рисунок 8 — Сравнение методов адаптации положения точки сшивки ППФ_{max} и ППФ_Δ

На примере отрывного обтекания пластины проведено сравнение методов ППФ и ТПФ. Как и в задаче с безградиентным обтеканием пластины, для метода ППФ (рисунок 9а) наблюдается меньшая зависимость решения от используемой сетки по сравнению с методом ТПФ (рисунок 9б).

В разделе 5.3 рассматривается течение в канале с объёмной выпуклостью на поверхности стенки. Форма выпуклости в сечении плоскостью $y = 0$ и соответствующие граничные условия показаны на рисунке 10. Расчёты с применением методов пристеночных функций проводились на сетках, обозначенных номерами 5–7, которым соответствовало различное пристеночное

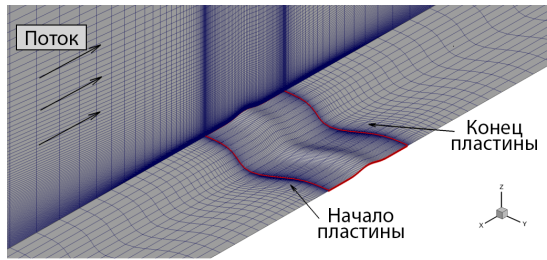
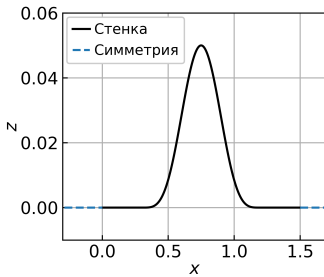


а) Метод ППФ



б) Метод ТПФ

Рисунок 9 — Влияние сеточного разрешения на распределение вдоль пластины коэффициента трения



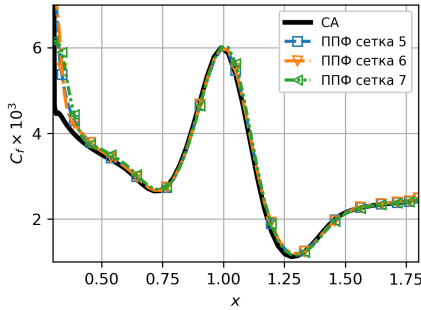
а) Сечение поверхности выпуклости плоскостью $y = 0$

б) Расчётная сетка на нижней поверхности и в плоскости $y = 0$

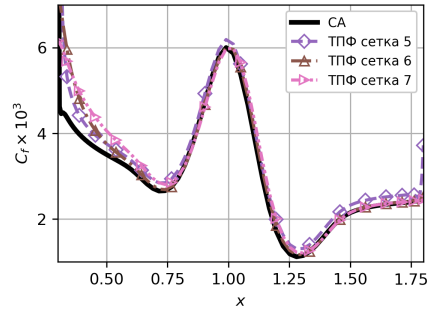
Рисунок 10 — Постановка задачи течения в канале с трёхмерной выпуклостью

разрешение. Сетка 5 построена с первым пристеночным шагом $z_1 = 10^{-3}$, соответствующим диапазону $z_1^+ = 60 \dots 170$; сетка 6 — с первым пристеночным шагом $z_1 = 5 \times 10^{-4}$, соответствующим диапазону $z_1^+ = 30 \dots 90$; сетка 7 — с первым пристеночным шагом $z_1 = 10^{-4}$, соответствующим диапазону $z_1^+ = 7 \dots 20$. При использовании метода ППФ (рисунок 11а) наблюдается сниженная зависимость решения от пристеночного разрешения и большая точность в сравнении с методом ТПФ (рисунок 11б).

В разделе 5.4 рассматривается задача дозвукового обтекания аэродинамического профиля *NACA 0012*, на которой проводится сравнение методов адаптации положения точки сшивки ППФ $_{\Delta}$ и ППФ $_p$. В методе ППФ $_{\Delta}$ параметр Δ определялся через пристеночное разрешение. Расчёты с применением метода



а) Метод ППФ



б) Метод ТПФ

Рисунок 11 — Распределение коэффициента трения на пластине в сечении плоскостью $y = -0.5$

ППФ проводились на трёх расчётных сетках: две структурированные с постоянным пристеночным шагом $y_1 = 5 \times 10^{-5}$ ($y_1^+ = 10 \dots 50$) и $y_1 = 1 \times 10^{-4}$ ($y_1^+ = 20 \dots 100$) и неструктурированная сетка с $y_1 = 5 \times 10^{-5}$ в центральной части профиля и $y_1 = 5 \times 10^{-6}$ в областях передней и задней кромок профиля, где ожидается присутствие точек торможения, отрыва и присоединения потока.

Главным отличием метода ППФ_p от ППФ_Δ является независимость определения величины u_τ^{\min} от характеристик расчётной сетки. Это свойство демонстрируется в распределениях эффективного положения точки сшивки $\delta_{EL}^{+\text{eff}}$ на верхней поверхности профиля (рисунок 12), где переход от исходного положения точки сшивки δ_{EL}^+ к адаптированному в случае метода ППФ_p не зависит от расчётной сетки, а в случае ППФ_Δ наблюдается выраженная зависимость от сеточного разрешения. В частности, для угла атаки $\alpha = 0^\circ$ в расчёте ППФ_Δ точка сшивки смещается в сторону стенки в задней части профиля, где течение безотрывное. Это вызвано увеличением значения u_τ^{\min} из-за уменьшения пристеночного шага сетки в этой области.

При использовании предложенного в работе метода ППФ_p ошибка в определении коэффициента трения в случае сеток с постоянным пристеночным шагом меньше, чем при использовании метода ППФ_Δ (рисунок 13). В случае адаптированной сетки ошибка в C_f меньше в случае метода ППФ_Δ, так как сетка была специально построена таким образом, чтобы увеличить значение u_τ^{\min} (при этом происходит смещение точки сшивки в сторону стенки) в областях, где ожидается значительное отклонение от предположения равновесного пограничного слоя. Для углов атаки $\alpha \leq 10^\circ$, когда течение остаётся безотрывным, оба метода на всех сетках демонстрируют хорошую точность в определении коэффициентов подъёмной силы и сопротивления: отклонения от референсного решения составили менее 3%. При этом наблюдается снижение времени расчёта до сходимости более чем в 3 раза в случае сеток с постоянным пристеночным шагом.

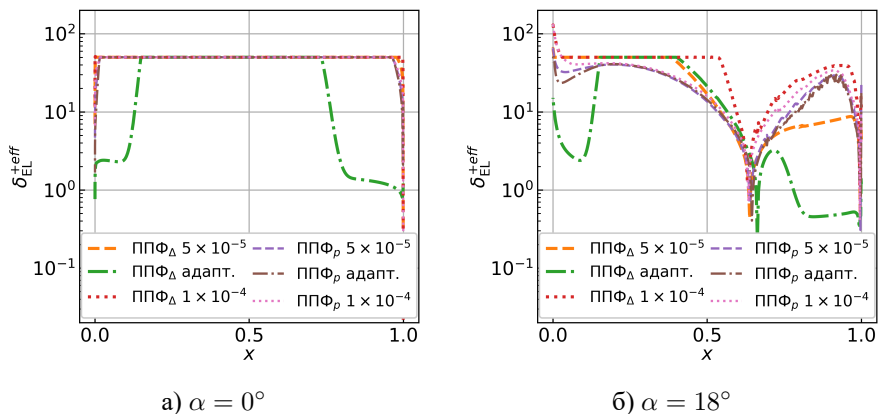


Рисунок 12 — Распределение эффективного положения точки шивки δ_{EL}^{+eff} на верхней поверхности профиля

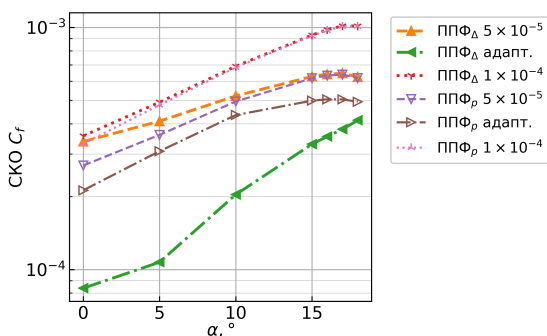


Рисунок 13 — Среднеквадратичное отклонение от референсного решения по коэффициенту трения C_f на поверхности профиля

В разделе 5.5 метод ППФ применяется для моделирования обтекания модели самолёта CRM-HL (High-Lift Common Research Model, типовая модель самолёта с развитой механизацией) с выпущенным предкрылком в симметричной постановке²⁵. В качестве метода адаптации положения точки шивки использовался метод ППФ_p. На рисунке 14 приведены распределение коэффициента давления на поверхности модели и линии тока.

На основе сеток, предоставленных в рамках тестового случая (на рисунках и таблицах обозначены индексом «CA»), для расчётов с применением метода

²⁵High Lift Prediction Workshop. URL: <https://hiliftpw.larc.nasa.gov/>.

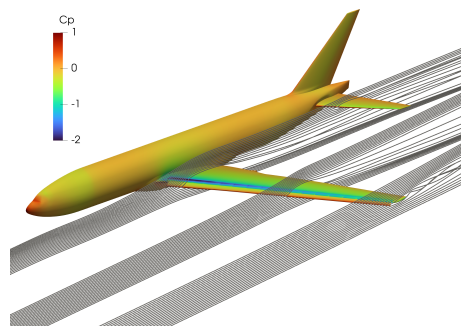


Рисунок 14 — Распределение коэффициента давления на поверхности модели и линии тока

ППФ построены сетки с увеличенными в 20 раз пристеночным шагом. Характеристики расчётных сеток приведены в таблице 1. В таблице 1 приведены полученные коэффициенты сил и момента. На сетках семейства С, являющихся

Таблица 1 — Характеристики расчётных сеток и коэффициенты сил и моментов, полученные в расчёте и эксперименте

Сетка	Число узлов, млн.	y_1^+	C_D	C_L	C_m
Сетка А _{СА}	19.1	~ 2	0.0432	0.624	0.115
Сетка А _{ППФ}	12.8	~ 35.3	0.0451	0.623	0.112
Сетка В _{СА}	81.5	~ 1.3	0.0434	0.631	0.119
Сетка В _{ППФ}	54.7	~ 24.1	0.0442	0.622	0.112
Сетка С _{СА}	143.4	~ 0.87	0.0434	0.636	0.124
Сетка С _{ППФ}	88.8	~ 17.0	0.0446	0.635	0.121
Эксперимент	—	—	0.0435	0.625	0.130

самыми подробными, отклонение от расчёта с разрешённым вязким подслоем по всем коэффициентам при использовании метода ППФ не превышает 3% при сокращении объёма сетки более чем на треть. При этом в расчёте на сетке В_{СА} отклонение от расчёта на самой подробной сетке в коэффициентах подъёмной силы C_L и момента C_m оказывается больше, чем при использовании метода ППФ на сопоставимой по мощности сетке С_{ППФ}.

При использовании метода ППФ общий вид течения заметно не меняется, что демонстрируется на распределениях коэффициента трения (рисунок 15).

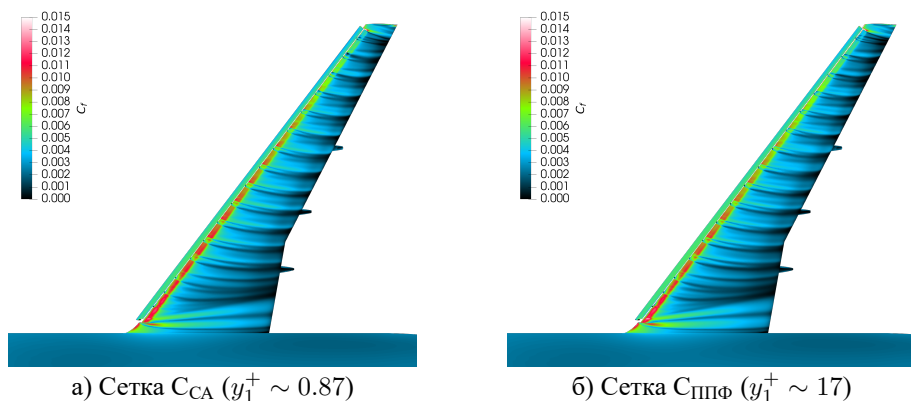


Рисунок 15 — Распределение коэффициента трения на поверхности крыла.
Вид сверху

В **заключении** представлены основные результаты диссертации, их значимость, а также возможные направления дальнейшего развития темы. Основные результаты работы заключаются в следующем:

1. Разработана методика адаптации положения точки сшивки решений осреднённых уравнений Навье–Стокса и пристеночной функции. Предложенная методика адаптации основана на учёте локальных характеристик течения и пристеночного разрешения сетки. Применение предложенной методики позволяет обобщить метод пенализированных пристеночных функций на случай отрывных течений и повысить точность решения задач при наличии точек отрыва и присоединения потока.
2. Предложен метод стабилизации численного решения на основе анизотропной искусственной вязкости в уравнении для расчёта скорости трения в методе пенализированных пристеночных функций. Применение искусственной вязкости существенно снижает численные осцилляции при расчёте на неструктурированных сетках. Для аппроксимации оператора искусственной вязкости разработана численная схема на основе метода локальных разбиений элементов. Разработанная схема обладает компактным шаблоном, что существенно в случаях, когда на высоту области действия оператора сглаживания приходится малое число узлов расчётной сетки.
3. Создана программная реализация метода пенализированных пристеночных функций с предложенными модификациями для решения трёхмерных задач на неструктурированных сетках. Реализация выполнена в программном комплексе NOISEtte с гибридной параллелизацией на основе технологий MPI и OpenMP. Эффективность параллелизации подтверждена расчётами на суперкомпьютере.

4. Проведён сравнительный анализ метода пенализированных пристеночных функций и традиционного метода пристеночных функций. На примере решения тестовых задач продемонстрированы снижение сеточной зависимости решения и повышение точности результатов при использовании метода пенализированных пристеночных функций.
5. Продемонстрирована эффективность метода пенализированных пристеночных функций для решения промышленно-ориентированных задач аэродинамики. Показано снижение требований к пристеночному разрешению расчётной сетки без существенной потери точности решения.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Клюев, Н. А.* Применение метода пенализированных пристеночных функций для численного моделирования обтекания аэродинамического профиля : Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша / Н. А. Клюев. — Москва, 2025. — (БАК).
2. *Vasilyev, O. V.* Comparative Study of Conventional and Penalized Wall Function Methods in Turbulent Flow Modeling / O. V. Vasilyev, N. S. Zhdanova, N. A. Kluev // *Mathematical Models and Computer Simulations*. — 2024. — Vol. 16, Suppl 1. — S139—S161. — (Scopus, WoS, BAK).
3. *Vasilyev, O. V.* Penalized Wall Function Method with Dynamic Solution Matching in the Separation and Reattachment Regions / O. V. Vasilyev, N. S. Zhdanova, N. A. Kluev // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. — 2024. — Vol. 45, no. 11. — P. 5932—5947. — (Scopus, WoS, BAK).

Клюев Никита Андреевич

Моделирование турбулентных течений с применением пенализированных пристеночных функций

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать 02.04.2026. Заказ № А-4

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1,75 Тираж 85 экз.

ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 125047, Москва, Миусская пл., д.4