



**УТВЕРЖДАЮ**

Врио директора ИГиЛ СО РАН

д.ф.-м.н.

Е.В. Ерманюк

« 01 »

10

2020 г.

### **Отзыв ведущей организации**

на диссертационную работу Капцова Евгения Игоревича  
«Симметрии и законы сохранения нелинейных дискретных моделей  
сплошной среды», представленную на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук  
по специальности 01.01.07 – «Вычислительная математика»

Диссертационная работа Е.И. Капцова направлена на развитие методов построения инвариантных разностных схем, обладающих законами сохранения; их исследование и применение для получения численных решений моделей механики сплошной среды. Выполненные исследования в значительной мере опираются на методы группового анализа дифференциальных уравнений, которые активно разрабатывались в работах Л.В. Овсянникова, Н.Х. Ибрагимова, В.И. Фушича, П. Олвера и других специалистов. Наряду с классическим групповым анализом получили развитие методы приближенных групп преобразований и методы исследования групповых свойств дискретных уравнений, заданных на сеточных пространствах. Ключевая роль в развитии и применении теории групп преобразований в сеточных пространствах принадлежит В.А. Дородницыну, под руководством которого выполнена представленная работа.

### **Актуальность темы исследования**

В диссертации Е.И. Капцова обобщены известные и предложены новые методы и приёмы построения инвариантных конечно-разностных схем как для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), так и для уравнений в частных производных. Применимость этих методов связана с инвариантностью уравнений относительно групп непрерывных преобразований (симметрий), что характерно для моделей, описывающих физические процессы, в частности, для уравнений механики сплошной среды. Наличие симметрий уравнений даёт возможность строить конечно-разностные схемы, обладающие важными качественными характеристиками, такими, как наличие законов сохранения и интегрируемость. Сохранение качественных свойств уравнений, описывающих физические процессы, зачастую имеет определяющее значение при моделировании процессов в механике сплошной среды, что делает разработанные методы практически полезными при моделировании в задачах газовой динамики и гидродинамики, метеорологии, геофизики, в гражданском строительстве, при

решении транспортных задач и др. Результаты диссертационной работы также вносят вклад в теорию группового анализа в конечно-разностных пространствах, а проведённая групповая классификация уравнений, описывающих некоторые классы движения жидкости и газа в лагранжевых координатах, полезна в качестве справочного материала.

### **Общая характеристика работы**

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы, включающего 157 наименований, списков таблиц и рисунков и пяти приложений. Объём диссертационной работы составляет 208 страниц.

Во **введении** обосновываются актуальность и новизна работы, формулируются цели исследования, теоретическая и практическая значимость полученных результатов, а также приводятся основные положения, выносимые на защиту.

**Первая глава** посвящена построению инвариантных конечно-разностных схем для обыкновенных дифференциальных уравнений и систем с помощью разностного аналога тождества Нётер. В первой части главы приводятся необходимые сведения из теории группового анализа дифференциальных уравнений. Там же приводятся основные определения и обозначения из теории конечно-разностных схем, которые используются в дальнейшем. В главе построен новый пример инвариантной конечно-разностной схемы для уравнения второго порядка. Эта схема обладает разностными аналогами всех дифференциальных первых интегралов исходного уравнения и полностью интегрируема. Схема завершает список инвариантных схем для уравнений классификационного списка Ли, ранее построенных В.А. Дородницыным и его соавторами. Среди семейства инвариантных схем выделена точная схема, решения которой совпадают с решениями дифференциального уравнения в узлах конечно-разностной сетки вне зависимости от выбора величины шага сетки. Приводится ряд известных семейств инвариантных разностных схем, для которых в работе найдены точные схемы. Выполнено обобщение разностного аналога тождества Нётер на случай системы ОДУ и приводится пример инвариантной схемы для системы уравнений Ермакова. Эта схема интегрируема в той же степени, что и дифференциальная система. Её первые интегралы получены с помощью разностного аналога тождества Нётер для систем уравнений.

Во **второй главе** предложен новый метод (метод сопряженного уравнения) для нахождения первых интегралов инвариантных конечно-разностных схем для ОДУ, которые не допускают вариационной формулировки. Метод позволяет понижать степень схем, а в некоторых случаях такие схемы могут быть проинтегрированы полностью. Рассмотрен пример схемы для уравнения Шварца третьего порядка. Эта схема проинтегрирована полностью и является точной.

**Третья глава** посвящена инвариантным конечно-разностным схемам для уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными. С помощью нового метода, являющегося разностным аналогом известного «прямого метода» для дифференциальных уравнений, построены схемы для линейного волнового уравнения и нелинейного волнового уравнения специального вида. Построенные полиномиальные схемы обладают разностными аналогами локальных законов

сохранения, причём количество допускаемых схемами законов сохранения зависит от способа приближения схем полиномами и от выбранного набора симметрий. Производится классификация возможных инвариантных полиномиальных схем для нелинейного волнового уравнения по количеству допускаемых законов сохранения.

**В четвёртой главе** проведена групповая классификация уравнений Эйлера-Лагранжа специального вида. Полученные результаты представляют интерес в качестве справочных данных, поскольку охватывают различные примеры уравнений механики сплошной среды, включая уравнения мелкой воды и уравнения изэнтропической газовой динамики.

**В пятой главе** на основе развиваемого в работе метода построены инвариантные конечно-разностные схемы для одномерных уравнений мелкой воды в лагранжевых координатах, обладающие разностными аналогами локальных законов сохранения. Получена схема для уравнений мелкой воды в случае плоского дна, обладающая законами сохранения массы, энергии, импульса и движения центра масс. Для случая произвольной топографии дна предложены инвариантные схемы, сохраняющие массу и энергию или импульс. Выполнена численная реализация построенных схем. Результаты сравниваются с некоторыми известными схемами для уравнений изэнтропической газовой динамики. Приведено описание программного комплекса для проведения расчетов.

**В заключении** сформулированы основные результаты работы.

**В приложения** вынесены результаты численной реализации построенных инвариантных разностных схем и некоторые детали реализации вспомогательного программного комплекса, а также законы сохранения уравнений специального вида в эйлеровых и лагранжевых координатах.

### **Научная новизна результатов**

В диссертационной работе предложены новые методы построения инвариантных конечно-разностных схем, обладающих законами сохранения, в том числе для уравнений, которые не допускают вариационной формулировки. Построены новые примеры инвариантных разностных схем для уравнений механики сплошной среды, в том числе для волновых уравнений и уравнений мелкой воды в лагранжевых координатах. Проведенная в работе классификация уравнений, описывающих некоторые классы течения жидкости и газа, также является новой.

### **Достоверность полученных результатов и выводов**

Проверка предлагаемых методов на конкретных примерах уравнений с известными точными решениями наглядно демонстрирует достоверность методов и полученных на их основе результатов. В случае отсутствия точного решения результаты подтверждаются сравнением решений, полученных авторским подходом и с помощью проверенных численных методов. Тождества, встречающиеся в работе, проверяются непосредственно. Достоверность результатов сомнений не вызывает.

### **Апробация и публикации**

Все основные результаты работы отражены в 5 публикациях в отечественных изданиях из перечня ВАК, в 3 рейтинговых международных журналах, индексируемых

в базах Scopus и WoS, а также в трудах и тезисах конференций. Работа прошла апробацию на семинарах, международных и всероссийских конференциях. Основные результаты, включенные в диссертацию, получены либо лично автором, либо с его определяющим участием.

### **Замечания по диссертации**

1. Выполненное построение инвариантных разностных схем для ОДУ второго порядка носит иллюстративный характер, поскольку все рассмотренные примеры (уравнения (1.21), (1.45), (1.47), (1.49), (2.15)) допускают интегрирование в явном виде. Практическая значимость построения разностных схем для таких уравнений неочевидна.
2. В автореферате на рис. 2 (в диссертации этот рисунок отсутствует) показано сравнение численных решений системы ОДУ второго порядка типа Ермакова (уравнения (1.65)), полученных методом Рунге-Кутты и по предложенной инвариантной схеме. Судя по графику к преимуществу инвариантной схемы можно отнести то, что она позволяет продлить решение ближе к точке сингулярности правой части системы. К сожалению, диссертант не посчитал нужным обсудить этот важный момент более подробно.
3. Инвариантные конечно-разностные схемы, наследующие дополнительные законы сохранения исходной дифференциальной модели, представляют интерес и могут быть полезны для описания гладких решений. В диссертационной работе такие схемы строятся для гиперболических уравнений, для которых характерно образование разрывов. Очевидно, что одновременное выполнение законов сохранения массы, импульса и энергии на разрывных решениях уравнений теории мелкой воды невозможно, что существенно ограничивает область применимости предлагаемых схем.
4. Выполненные тестовые расчеты распространения волн для одномерных уравнений изэнтропической газовой динамики на основе инвариантной схемы сравниваются с известными схемами 60-х годов прошлого века. Отсутствует сопоставление с современными схемами повышенной точности, например, со схемами MUSCL, TVD, WENO и CABARET.
5. Работа содержит излишне много информации справочного характера. По этой причине не всегда легко выделить оригинальные достижения диссертанта. Для читателя было бы удобнее видеть примеры численной реализации инвариантных схем и их сопоставление с известными методами по ходу изложения, а не в отдельных приложениях.

### **Заключение**

Высказанные замечания не умаляют достоинств диссертационной работы Е.И. Капцова «Симметрии и законы сохранения нелинейных дискретных моделей сплошной среды», являющейся законченной научно-квалификационной работой, которая вносит заметный вклад в развитие теории группового анализа в конечно-разностных пространствах. Работа отвечает паспорту научной специальности 01.01.07 – «Вычислительная математика». Автореферат отражает содержание диссертации.

Считаем, что диссертационная работа Капцова Евгения Игоревича удовлетворяет требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям, согласно пп. 9-14 «Положения о присуждении ученых степеней», утвержденного постановлением Правительства РФ от 24 сентября 2013 г. № 842. На основании изложенного Капцов Евгений Игоревич заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.07 – «Вычислительная математика».

Отзыв на диссертацию обсужден и одобрен 30.09.2020 на заседании семинара отдела Прикладной гидродинамики ИГиЛ СО РАН под руководством чл.-корр. РАН В.В. Пухначева и д.ф.-м.н. Е.В. Ерманюка.

Главный научный сотрудник  
лаборатории прикладной и вычислительной  
гидродинамики ИГиЛ СО РАН  
доктор физико-математических наук



Остапенко Владимир Викторович

Ведущий научный сотрудник лаборатории  
дифференциальных уравнений ИГиЛ СО РАН  
доктор физико-математических наук



Чесноков Александр Александрович

**Полное наименование организации:** Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук

**Адрес:** 630090, г. Новосибирск, просп. Лаврентьева, д. 15

**Сайт организации:** <http://www.hydro.nsc.ru>

**Электронная почта:** [igil@hydro.nsc.ru](mailto:igil@hydro.nsc.ru)