

## ОТЗЫВ

официального оппонента д.ф.-м.н. Гердта Владимира Петровича на диссертационную работу Капцова Евгения Игоревича «Симметрии и законы сохранения нелинейных дискретных моделей сплошной среды», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.07 – «Вычислительная математика»

### *Актуальность темы диссертации.*

В работе рассматриваются вопросы конечно-разностного моделирования уравнений механики сплошной среды с применением аппарата группового анализа. Исследование свойств уравнений, связанных с их групповой структурой, при построении конечно-разностных схем – перспективное направление в конечно-разностном моделировании, активно развиваемое В.А. Дородницыным и его учениками на протяжении последних десятилетий. Разностные схемы, обладающие симметриями, зачастую обладают и инвариантными решениями, законами сохранения; степень таких уравнений может быть понижена, а иногда они могут быть и полностью проинтегрированы. В диссертационной работе приведён ряд примеров, существенно дополняющих прежние результаты в построении инвариантных разностных схем, а также предложены новые методы, с помощью которых получены новые инвариантные схемы уравнений сплошной среды, обладающие законами сохранения. Приведён пример схемы для обыкновенного дифференциального уравнения (уравнение Шварца), которая полностью проинтегрирована с помощью одного из описанных методов. Большое внимание уделено одномерным уравнениям мелкой воды в координатах Лагранжа. Для них построены схемы, обладающие всеми локальными законами сохранения. Кроме того, проведена групповая классификация уравнений течения жидкостей и газов в лагранжевых координатах. Результаты классификации применяются при построении схем для уравнений мелкой воды, но обладают и самостоятельной ценностью. Диссертация Е.И. Капцова, безусловно, актуальна, предлагает новые методы и новые примеры применения группового анализа при построении конечно-разностных схем уравнений сплошной среды, существенно дополняя имеющуюся теорию группового анализа конечно-разностных уравнений.

Диссертационная работа включает в себя введение, пять глав, заключение, список литературы и приложения.

**Во введении** приводится обоснование актуальности темы исследований, обзор литературы по теме диссертационной работы, дается описание применяемых методов, излагаются поставленные цели работы, формулируется научная новизна исследований, теоретическая и практическая значимость полученных результатов.

**В первой главе** приводятся необходимые сведения из группового анализа, а также краткие сведения и основные обозначения, используемые при построении конечно-разностных схем. Далее, с помощью разностного аналога теоремы Нётер, построена конечно-разностная схема для одного обыкновенного дифференциального уравнения из классификационного списка С. Ли. Эта схема завершает ранее начатую В.А. Дородницыным и соавторами работу по классификации обыкновенных разностных уравнений второго порядка. Схема является точной (в узлах разностной сетки её решения в точности совпадают с решениями дифференциального уравнения). Далее строится схема для частного случая системы уравнений Ермакова. При этом используется обобщение разностного аналога теоремы Нётер на случай системы уравнений. Полученная схема интегрируема в той же степени, что и исходная система уравнений Ермакова. Тут же проводится численный анализ полученных схем.

**Вторая глава** посвящена построению разностных схем для обыкновенных дифференциальных уравнений, не обладающих функциями Лагранжа или Гамильтона (т.е. не допускающих вариационной постановки). Для интегрирования таких схем возможно применение разностного аналога т.н. метода сопряжённых уравнений. С помощью этого метода полностью проинтегрирована инвариантная схема для уравнения третьего порядка.

**В третьей главе** предложен новый, прямой метод отыскания законов сохранения разностных схем для уравнений в частных производных. В качестве примеров рассмотрены линейное и нелинейное волновые уравнения. Для них, с помощью прямого метода, построены различные полиномиальные схемы, обладающие локальными законами сохранения. Произведена классификация полиномиальных инвариантных разностных схем по количеству и типу допускаемых ими законов сохранения.

**В четвертой главе** проведена групповая классификация уравнений специального вида течения жидкостей и газов, зависящих от двух произвольных элементов. Полученные результаты применяются в пятой главе, но также представляют и самостоятельный интерес.

**В пятой главе** рассмотрены одномерные уравнения мелкой воды в координатах Лагранжа с различными профилями дна. С помощью прямого метода и анализа инвариантов алгебр Ли уравнений получены схемы, обладающие локальными законами сохранения. Основной результат – это инвариантная разностная схема для случая горизонтального дна, обладающая законами сохранения массы, импульса, энергии и движения центра масс. Получены также инвариантные схемы для произвольного профиля дна, обладающие некоторыми локальными законами сохранения. Произведена численная реализация одной из схем. Результаты сравниваются с другими известными схемами.

**В приложения** вынесены вопросы численных реализаций инвариантных разностных схем.

**В заключении** подведены итоги проведённого исследования. Список литературы состоит из 157 источников.

### ***Новизна и достоверность результатов***

Все полученные в работе результаты являются новыми. Диссертационная работа основана на материалах 8 научных статей, которые были опубликованы в международных журналах. Результаты диссертации прошли апробацию на профильных зарубежных и отечественных конференциях и семинарах. Результаты проведённых численных расчетов были проверены путём их сравнения с результатами расчетов по ранее известным разностным схемам или же с расчетами, полученными другими методами. Результаты групповой классификации из четвёртой главы проверялись путём сопоставления их с результатами других классификаций, частично пересекающихся с проведённой. Встречающиеся в работе тождества могут быть проверены непосредственно. Достоверность полученных результатов сомнений не вызывает.

### ***Критические замечания к диссертации***

В диссертации полностью отсутствует упоминание/обсуждение возможности/перспектив обобщения разработанных методов и подходов к построению и анализу инвариантных схем для пространственно-двумерных уравнений в частных производных. В частности, для двумерных уравнений мелкой воды (см., например, недавнюю работу: A.Bihlo, R.O.Popovich. Zeroth-order conservation laws of two-dimensional shallow water equations with variable bottom topography · Studies in Applied Mathematics. Stud. Appl. Math. 2020, 1–31 (arXiv:1912.11468 [math-ph])). Как в диссертации, так и в

автореферате многократно встречается «систематическая» опечатка «разносный» вместо «разностный».

### *Заключение*

Диссертационная работа Капцова Е.И. представляет собой завершённое научное исследование, содержащее новые актуальные результаты в сфере численного моделирования уравнений сплошной среды с применением методов группового анализа. Диссертация соответствует паспорту научной специальности 01.01.07 «Вычислительная математика». Структура и оформление диссертации и автореферата соответствуют требованиям ГОСТ Р 7.0.11-2011. Автореферат верно отражает содержание диссертации.

Считаю, что диссертационная работа «Симметрии и законы сохранения нелинейных дискретных моделей сплошной среды» соответствует требованиям Положения о присуждении ученых степеней, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а её автор – Капцов Евгений Игоревич – заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.07 – «Вычислительная математика».

Официальный оппонент:

начальник сектора алгебраических и квантовых вычислений

Лаборатории информационных технологий

Международной межправительственной организации

Объединенного института ядерных исследований (ОИЯИ г. Дубна)

доктор физико-математических наук, профессор

Гердт Владимир Петрович

Почтовый адрес: Международная межправительственная организация

Объединенный институт ядерных исследований, ул. Жолио-Кюри, 6

г. Дубна, Московская обл., Россия, 141980

Телефон: +7 (49621) 6-50-59;

Адрес электронной почты: gerdt@jinr.ru

Подпись начальника сектора алгебраических и квантовых вычислений ЛИТ  
ОИЯИ д.ф.-м.н., профессора В.П. Гердта ЗАВЕРЯЮ

Ученый секретарь ЛИТ, к. ф.-м. н.

Дереновская О.Ю.

