

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ ИМ. М.В. КЕЛДЫША  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК»

*На правах рукописи*

Суслов Кирилл Сергеевич

**ПРОЕКТИРОВАНИЕ МНГОВИТКОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ  
КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ С МАЛОЙ ТЯГОЙ С  
ПОМОЩЬЮ МЕТОДОВ УСРЕДНЕНИЯ И ПАРАМЕТРИЗАЦИИ  
РЯДАМИ ФУРЬЕ**

Специальность 1.1.7 – Теоретическая механика, динамика машин

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
профессор, д.ф.-м.н.  
М.Ю. Овчинников

Москва – 2026

# Оглавление

|                                                                                                                    |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Введение . . . . .                                                                                                 | 4         |
| <b>Глава 1. Модель усреднённого орбитального движения космического аппарата с малой тягой . . . . .</b>            | <b>15</b> |
| 1. Модель движения . . . . .                                                                                       | 15        |
| 2. Метод усреднения . . . . .                                                                                      | 18        |
| 3. Учёт внешних возмущений и факторов . . . . .                                                                    | 24        |
| 3.1. Полярное сжатие Земли . . . . .                                                                               | 25        |
| 3.2. Выключение двигателя в тени Земли . . . . .                                                                   | 26        |
| 4. Валидация модели усреднённой динамики . . . . .                                                                 | 30        |
| 5. Поиск решений в явном виде в случае малых эксцентриситетов . . . . .                                            | 36        |
| Выводы по Главе 1 . . . . .                                                                                        | 43        |
| <b>Глава 2. Методика поиска квазиоптимального управления при межорбитальных перелётах с малой тягой . . . . .</b>  | <b>45</b> |
| 1. Задача оптимального управления . . . . .                                                                        | 45        |
| 2. Переход к модели усреднённой динамики . . . . .                                                                 | 47        |
| 2.1. Задача оптимизации затрат рабочего тела в модели двигателя с идеально регулируемой тягой . . . . .            | 48        |
| 2.2. Задача быстрогодействия в модели двигателя с ограниченной тягой и фиксированной скоростью истечения . . . . . | 51        |
| 3. Обобщение усреднённой модели на почти периодическое управление . . . . .                                        | 56        |
| 4. Решение модельных задач . . . . .                                                                               | 58        |
| 4.1. Задача №1: перелёт с ГПО на ГСО в плоской модели с ИРТ-двигателем . . . . .                                   | 59        |

|                                                                                                                                       |           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 4.2. Задача №2: перелёт с ССПО на ГСО с двигателем ограниченной тяги с учётом полярного сжатия Земли и выключения ДУ в тени . . . . . | 65        |
| Выводы по Главе 2 . . . . .                                                                                                           | 71        |
| <b>Глава 3. Баллистический анализ миссии по исследованию магнитосферы Земли . . . . .</b>                                             | <b>72</b> |
| 1. Концепция миссии по исследованию магнитосферы Земли с помощью формации МКА . . . . .                                               | 72        |
| 2. Выбор стартовой и целевой орбит вывода МКА . . . . .                                                                               | 75        |
| 3. Постановка задачи баллистического анализа . . . . .                                                                                | 76        |
| 4. Результаты . . . . .                                                                                                               | 78        |
| 5. Анализ законов управления . . . . .                                                                                                | 80        |
| Выводы по Главе 3 . . . . .                                                                                                           | 84        |
| <b>Заключение . . . . .</b>                                                                                                           | <b>88</b> |
| <b>Список литературы . . . . .</b>                                                                                                    | <b>89</b> |
| <b>Приложение 1: Вывод коэффициентов Фурье возмущающего ускорения за счёт полярного сжатия Земли . . . . .</b>                        | <b>99</b> |

# Введение

## Актуальность темы исследования

В настоящее время в космической отрасли отчётливо видна тенденция к миниатюризации космических аппаратов (КА). В течение последних десяти лет ежегодное количество запущенных КА массой до тонны стремительно растёт и уже исчисляется тысячами околоземных и межпланетных платформ [1]. В первую очередь данное явление связано с развитием в области производства компонентов КА, что привело к улучшению массогабаритных характеристик научной аппаратуры, блоков управления и других элементов КА. Во-вторых, малые космические аппараты (МКА) обладают преимуществами по сравнению с крупными платформами, к которым можно отнести дешевизну производства и возможность серийного выпуска. Также малая масса и размеры МКА делают возможным сценарий попутного запуска, когда МКА устанавливается на ракету-носитель вместе с основной нагрузкой. Помимо этого, появление МКА снижает порог входа в космическую отрасль для частных компаний, а также для институтских и школьных конструкторских бюро.

Однако массогабаритные ограничения, накладываемые на конструкцию МКА, приводят к неэффективности, а иногда и невозможности установки на них жидкостных реактивных двигателей (ЖРД), которые классически используются на крупных КА в качестве маршевых двигательных установок (ДУ). Вместо них ДУ для МКА конструируются на базе высокоэффективных двигателей малой тяги [2, 3, 4, 5]. По сравнению с ДУ на базе ЖРД они имеют на порядок большие значения удельного импульса (тысячи секунд по сравнению с сотнями секунд), что приводит к снижению массы и объёма необходимого

запаса рабочего тела. К тому же, по ресурсу работы двигатели малой тяги значительно превосходят ЖРД. Двигатели малой тяги могут работать непрерывно в течение длительного времени (от десятков суток вплоть до года) и поддерживают до тысяч включений, в то время как суммарный ресурс работы ЖРД исчисляется десятками минут, а число включений обычно не превышает десяти.

Несмотря на вышеописанные преимущества, двигатели малой тяги обладают важной особенностью. Значение максимально возможной тяги таких двигателей составляет от 0.001 до 100 мН, что значительно меньше характерных значений силы гравитационного притяжения Земли (для КА массой 100 кг на низкой околоземной орбите сила тяжести составляет около 1 кН). Поэтому, чтобы значительно изменить орбиту КА с помощью двигателей малой тяги, двигатель должен работать в течение десятков, а иногда и сотен суток, причём траектория КА будет иметь спиральный вид. Такие траектории называются многовитковыми, и их проектирование и исследование являются актуальными и важными задачами в современной динамике космического полёта.

Построение многовитковой траектории является частью проектирования миссии МКА в околоземном пространстве, если в её рамках планируется значительно изменять орбиту спутника средствами собственной маршевой ДУ. Такая необходимость часто возникает при попутном запуске МКА, так как разгонный блок после доставки основной нагрузки на целевую орбиту не всегда обладает достаточным количеством топлива и ресурсом включений, чтобы вывести МКА на его рабочую орбиту. Это особенно актуально в задаче развёртывания многоспутниковых систем, когда ракета-носитель за один запуск выводит десятки МКА на промежуточную орбиту, а затем каждый спутник самостоятельно доводится на персональную рабочую орбиту для формирования требуемой структуры группировки. Помимо околоземных миссий, построение многовитковой траектории МКА необходимо при проектировании межпланетных перелётов, а именно на этапах раскрутки у Земли и скрутки у целевого небесного тела. Также стоит отметить, что задача построения многовитковых траекторий возникает не только при проектировании миссий малых КА, но и КА большей

массы, если характерные значения реактивного ускорения на несколько порядков меньше, чем ускорение за счёт гравитационного притяжения небесного тела, около которого происходит движение.

## **Проработанность и современное состояние исследований по теме**

Многовитковая траектория является результатом орбитального движения КА в поле притяжения небесного тела под действием реактивного ускорения, малого по сравнению с ускорением за счёт гравитации. Первые результаты исследования динамики КА в такой постановке были получены аналитически для частных случаев управления и рассматриваемых орбит. Чаще всего для получения аналитических зависимостей реактивное ускорение считается постоянным по направлению и/или величине, а орбиты, по которым движется спутник, считаются круговыми или околокруговыми [6, 7, 8, 9, 10, 11]. Хотя подавляющее число аналитических результатов было получено на заре космической эры [6, 7, 8, 9], работы в этом направлении ведутся и сейчас [10, 11]. В настоящее время аналитические выражения для динамики КА на многовитковых траекториях используются для предварительного баллистического анализа миссии.

На практике реактивное ускорение может менять своё направление и величину, а орбиты обладают ненулевым эксцентриситетом, что усложняет анализ орбитального движения КА. При этом одной из основных задач баллистического анализа является построение траектории, оптимальной в некотором смысле. Критериями оптимальности могут выступать количество затраченного рабочего тела, время перелёта или другие характеристики траектории. Поэтому для построения траекторий движения КА используются численные методы оптимизации, которые условно можно разделить на две группы [12, 13]. К первой группе относятся вариационные (или не прямые) методы, которые основаны на выведении необходимых условий оптимальности, например, из принципа максимума Понтрягина [14]. Для того чтобы траектория удовлетворяла ограничениям, задача оптимизации сводится к краевой задаче [15, 16, 17, 18, 19, 20, 21]. Вторая группа – это параметрические (или прямые) методы оптимизации, ос-

новой принцип которых заключается в параметризации управления конечным набором скалярных параметров и поиске таких их значений, которые доставляют минимум целевой функции и удовлетворяют ограничениям на траекторию [22, 23]. Таким образом, задача оптимизации сводится параметрическими методами к задаче нелинейного программирования. Параметризация управления может проводиться различными способами в зависимости от специфики и сложности решаемых задач [24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32].

Также при построении траекторий КА часто используется управление на основе функции Ляпунова [33, 34, 35]. В оригинальной постановке оно не является оптимальным, однако гарантирует асимптотическую сходимость к целевому положению КА и не требует большого количества вычислений. При этом существуют работы по оптимизации управления на основе функции Ляпунова, основанные на подборе элементов весовой матрицы коэффициентов [36, 37].

Несмотря на разнообразие методов, проектирование многовитковых траекторий КА с малой тягой связано с различными сложностями. Во-первых, для управлений нетривиального вида отсутствует простая интерпретируемая связь между свойствами управления и итоговой траекторией перелёта, что связано со сложностью и нелинейностью орбитальной динамики. Во-вторых, большое время перелёта, связанное с малостью реактивного ускорения, приводит к большим вычислительным затратам при построении траекторий. В-третьих, задачи оптимизации многовитковых траекторий являются многоэкстремальными и обладают высокой чувствительностью к начальному приближению, которое, к тому же, сложно получить. Все эти трудности усугубляются необходимостью множественного построения траекторий на этапе баллистического анализа миссии, когда приходится варьировать различные внешние параметры, такие как дата старта, характеристики КА и его двигателя, критерий оптимальности, ограничения на траекторию и др.

Для борьбы с вышеописанными трудностями были разработаны и продолжают разрабатываться различные подходы. Снизить вычислительные затраты и время интегрирования отдельной многовитковой траектории можно, численно

или аналитически усредняя уравнения движения на одном орбитальном витке [38, 39, 40]. Начальное приближение зачастую ищется в упрощённых моделях или учитывает особенности задачи. Для упрощения задачи построения оптимальной траектории используются дифференциальные или дискретные методы продолжения [41, 42].

Таким образом, анализ литературы позволяет сделать вывод, что в настоящее время проводится много исследований, связанных с проектированием многовитковых траекторий КА с малой тягой, а значит, тематика настоящей диссертационной работы является актуальной и востребованной.

## **Цели и задачи диссертационной работы**

Целью настоящей работы является создание методов проектирования многовитковых траекторий перелёта космического аппарата с малой тягой. Для достижения поставленной цели в работе решаются следующие задачи:

- разработка и анализ модели усреднённого орбитального движения КА с малой тягой.
- разработка методики поиска квазиоптимального управления при межорбитальных перелётах с малой тягой в модели усреднённой динамики.
- применение разработанной методики к задаче баллистического анализа миссии по исследованию магнитосферы Земли.

## **Методология и методы диссертационного исследования**

В работе используются методы небесной механики, теорий возмущений и оптимального управления, а также вычислительной математики. Математическая постановка основана на уравнениях орбитального движения в возмущённой задаче двух тел в терминах оскулирующих элементов эллиптической орбиты. Основу методики составляет метод усреднения из теории возмущений. Задачи поиска оптимального управления с помощью параметризации сводятся

к задачам нелинейного программирования, которые решаются градиентными методами оптимизации.

### **Положения, выносимые на защиту:**

1. Разработана модель усреднённого орбитального движения космического аппарата с двигателем малой тяги. В рамках модели учтены возмущающее ускорение за счёт полярного сжатия Земли и прерывание работы электрореактивного двигателя в тени. С помощью численного моделирования показано, что траектории космических аппаратов, построенные в рамках модели усреднённого движения, аппроксимируют траектории в исходной задаче с высокой точностью на необходимых для практических задач промежутках времени. Получены приближённые решения в квадратурах и элементарных функциях для эволюции почти круговой орбиты под действием периодического возмущающего ускорения.
2. Разработана методика поиска квазиоптимального управления при многовитковом межорбитальном перелёте с малой тягой. В рамках методики предложены методы решения задачи минимизации затрат рабочего тела при межорбитальном перелёте с двигателем идеально регулируемой тяги и задачи быстродействия при межорбитальном перелёте с двигателем ограниченной тяги в классе периодических функций реактивного ускорения и реактивной тяги. Предложен подход к учёту слабой неперiodичности управления с помощью введения изменяющихся во времени параметров, определяющих периодическое управление.
3. С помощью разработанных методик проведён баллистический анализ перспективной миссии МКА по исследованию магнитосферы Земли с точки зрения возможности вывода единичного МКА с геопереходной орбиты на рабочую орбиту силами собственной ДУ на базе ЭРД. Сделаны оценки количества рабочего тела и ресурса работы ДУ, построены траектории перелёта на рабочую орбиту и обеспечивающие их законы управления. Сделаны выводы о реализуемости миссии.

## **Научная новизна**

В работе предложена новая модель управляемого орбитального движения в возмущённой задаче двух тел, основанная на уравнениях усреднённого движения и аппроксимации возмущающего ускорения. Получены новые приближённые аналитические решения возмущённой задачи двух тел. На основе приближённой модели разработана новая методика проектирования многовитковых траекторий.

## **Теоретическая и практическая значимость работы**

В работе сделан вклад в изучение управляемого движения в рамках усреднённых моделей. Обнаружены связи между спектральными свойствами возмущающего ускорения и эволюцией мгновенной орбиты. Предложенные в работе методики могут быть использованы при баллистическом анализе перспективных миссий в околоземном пространстве. Многовитковые траектории, получаемые с помощью методов, представленных в работе, могут быть использованы в будущих миссиях малых космических аппаратов.

## **Достоверность результатов**

Достоверность полученных в диссертации результатов обеспечивается тем, что разработанная методика основана на классических методах теоретической механики и теории возмущений. При реализации методики использовались широко известные и проверенные программные комплексы и пакеты. Проведена валидация предложенной методики на модельных задачах. Результаты, полученные в диссертации, соотносятся с результатами, получаемыми другими методами построения многовитковых траекторий КА с малой тягой.

## Апробация работы

Результаты работы были представлены на следующих всероссийских и международных конференциях:

- 74-й Международный астронавтический конгресс (г. Баку, 2023).
- Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С. П. Королёва и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства (г. Москва, 2023, 2024, 2025).
- Всероссийская конференция «Проблемы и перспективы космических миссий с ЭРДУ» (г. Махачкала, 2022).
- Международная научная конференция по механике «Десятые Поляховские чтения» (г. Санкт-Петербург, 2024).
- 58-е Научные чтения, посвященные разработке научного наследия и развитию идей К.Э. Циолковского (г. Калуга, 2023)
- 3-я Российская молодёжная научная конференция «Новые горизонты прикладной математики» (г. Москва, 2026)
- 64-я Всероссийская научная конференция МФТИ (г. Москва, 2021)

Результаты работы обсуждались на следующих научных семинарах:

- семинар «Динамика космических систем» отдела №7 в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (под руководством М.Ю. Овчинникова),
- семинар «Динамические системы и механика» в МАИ (НИУ) (под руководством Б.С. Бардина),
- семинар по теории управления и динамике систем в ИПМех РАН (под руководством Ф.Л. Черноусько),
- семинар «Динамические системы и механика» в ИКИ РАН (под руководством Н.А. Эйсмонта),
- семинар Баллистического центра ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (под руководством А.Г. Тучина),
- семинар отдела №5 в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (под руководством Ю.Ф. Голубева).

## Публикации

По теме диссертации опубликовано 7 научных работ в изданиях, рекомендованных ВАК, в которых изложены основные научные результаты диссертации. Из них 4 статьи опубликованы в журналах, индексируемых в базах научного цитирования Scopus и/или Web of Science.

### **Основные публикации автора по теме работы:**

1. Suslov, K. S., Shirobokov, M. G., Tselousova, A. A. Minimum-Energy Transfer Optimization between Near-Circular Orbits Using an Approximate Closed-Form Solution // *Aerospace*. 2023, 10, 1002. <https://doi.org/10.3390/aerospace10121002>
2. Suslov, K. S., Shirobokov, M. G., Trofimov, S. P. Approximate Finite Fourier Solution to the Periodically Perturbed Two-Body Problem // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2024, 47(8), pp. 1698–1708. <https://doi.org/10.2514/1.G007900>
3. Ovchinnikov, M. Y., Suslov, K. S., Tkachev, S. S., Shirobokov, M. G., Shestakov, S. A. Academy transaction note “time-optimal low thrust control using finite-Fourier parametrization” // *Acta Astronautica*. 2026, 239, pp. 478–482. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2025.11.029>
4. Suslov, K. S. Energy-Optimal Low Thrust Optimization using Finite-Fourier Parametrization with Nonstationary Spectrum // *Astrodynamics* <https://doi.org/10.1007/s42064-026-0312-x>
5. Suslov, K. S., Shirobokov, M. G., Bogachev, S. A. Ballistic analysis of a small spacecraft mission for studying the Earth’s magnetosphere // *Cosmic Research*. 2024, 62(6), pp. 632–642. <https://doi.org/10.1134/S0010952524600987>
6. Суслов, К.С. Приближенное решение задачи двух тел, возмущённой периодическим ускорением // *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша*. 2023, № 68, 17 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2023-68>
7. Васильев, Д. С., Комаров, А. А., Корнеев, К. Р., Попова, Ю. В., Степанова, Е. С., Суслов, К. С., Широбоков, М. Г. Перспективные проекты примене-

### **Личный вклад соискателя и соответствие паспорту специальности**

Содержание диссертационной работы и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Постановки задач были сформулированы научным руководителем Овчинниковым М.Ю., результаты исследований обсуждались с соавторами. Во всех работах в соавторстве части, связанные с диссертационной работой, были выполнены соискателем лично.

Диссертационная работа соответствует паспорту специальности (ПС) 1.1.7 «Теоретическая механика, динамика машин» по ряду направлений. При анализе уравнений движения КА используются методы аналитической механики (направление 1 ПС) и динамики космических аппаратов (направление 10 ПС). Для верификации моделей движения проводилось математическое и компьютерное моделирование динамики (направление 14 ПС) движения КА с двигателем малой тяги. Работа имеет выраженный фундаментальный характер и поэтому относится к физико-математической отрасли наук.

### **Объём и структура диссертации**

Объём диссертационной работы составляет 102 страницы. Работа включает в себя 37 рисунков и 8 таблиц. Список литературы содержит 68 наименований.

Диссертационная работа имеет следующую структуру. Она состоит из введения, трёх глав, заключения, списка использованной литературы и одного приложения. Во введении проводится обзор существующих подходов к построению многовитковых траекторий КА с малой тягой, сформулированы цели и задачи работы, обоснована актуальность и практическая значимость.

Первая глава посвящена разработке и анализу модели усреднённого управляемого орбитального движения КА в окрестности небесного тела. Выдвигается предположение об управляющем реактивном ускорении, позволяющее записать уравнения усреднённой системы в компактном виде, обладающем практически важными свойствами. Обнаружены новые свойства динамики задачи двух тел, возмущённой периодическим реактивным ускорением. Предложены подходы к учёту внешних возмущений и факторов, влияющих на управляемое орбитальное движение. Получены решения в квадратурах и конечных формулах для случаев малых эксцентриситетов.

Во второй главе предложена методика оптимизации многовитковых траекторий КА с малой тягой на основе усреднённой модели движения. За счёт перехода к усреднённой модели и аппроксимации управляющего ускорения/тяги задачи поиска межорбитального перелёта, оптимального по затратам рабочего тела или времени, сводятся к задачам нелинейного программирования небольшой размерности. Предложенные методики проходят валидацию на двух модельных задачах.

В третьей главе применение разработанной методики демонстрируется в задаче баллистического анализа перспективной миссии по исследованию магнитосферы Земли на базе МКА. Оцениваются время и затраты рабочего тела, необходимые на вывод МКА на высокоэллиптическую полярную орбиту. Дается заключение о реализуемости миссии на базе предлагаемой малогабаритной платформы с точки зрения баллистического анализа. В заключении приводятся основные результаты диссертационной работы.

# Глава 1. Модель усреднённого орбитального движения космического аппарата с малой тягой

## 1. Модель движения

В работе исследуется орбитальное движение в окрестности небесного тела (Земли, Луны или другой планеты Солнечной системы) космического аппарата, оснащённого двигателем малой тяги. Тяга считается малой, если характерная величина реактивного ускорения мала по сравнению с ускорением КА за счёт притяжения небесного тела. В таком случае удобно рассматривать динамику КА в рамках задачи двух тел, возмущённой реактивным ускорением (учёт различных внешних возмущений будет рассмотрен далее в главе 1). Уравнения движения запишем в виде уравнений Гаусса [43] в терминах модифицированных равноденственных элементов [44]  $p$ ,  $e_x$ ,  $e_y$ ,  $i_x$ ,  $i_y$  и эксцентрической долготы  $F$ :

$$\frac{dp}{dt} = \frac{2}{\sigma} \sqrt{\frac{p^3}{\mu}} \cdot a_c, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{de_x}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left\{ \sin L(F) \cdot a_r - e_y \frac{i_x \sin L(F) - i_y \cos L(F)}{\sigma} \cdot a_n + \right. \\ \left. + \left( \cos L(F) + \frac{e_x + \cos L(F)}{\sigma} \right) \cdot a_c \right\}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{de_y}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left\{ -\cos L(F) \cdot a_r + e_x \frac{i_x \sin L(F) - i_y \cos L(F)}{\sigma} \cdot a_n + \right. \\ \left. + \left( \sin L(F) + \frac{e_y + \sin L(F)}{\sigma} \right) \cdot a_c \right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{di_x}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{1 + i_x^2 + i_y^2}{2\sigma} \cos L(F) \cdot a_n, \quad (4)$$

$$\frac{di_y}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{1 + i_x^2 + i_y^2}{2\sigma} \sin L(F) \cdot a_n, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} = \frac{\sigma}{1 - e_x^2 - e_y^2} \left\{ \sqrt{\frac{\mu (1 - e_x^2 - e_y^2)^3}{p^3}} + \sin F \frac{de_x}{dt} - \cos F \frac{de_y}{dt} + \right. \\ + 2\sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{\sqrt{1 - e_x^2 - e_y^2}}{\sigma} \cdot a_r + \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{i_y \cos L(F) - i_x \sin L(F)}{\sigma} \cdot a_n \\ \left. + \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{(\sigma + 1) (e_y \cos L(F) - e_x \sin L(F)) b}{\sigma} \cdot a_c \right\}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \sin L(F) &= \frac{(1 - e_x^2 b) \sin F + e_x e_y b \cos F - e_y}{1 - e_x \cos F - e_y \sin F}, \\ \cos L(F) &= \frac{(1 - e_y^2 b) \cos F + e_x e_y b \sin F - e_x}{1 - e_x \cos F - e_y \sin F}, \\ b &= \frac{1}{1 + \sqrt{1 - e_x^2 - e_y^2}}, \\ \sigma &= \frac{1 - e_x^2 - e_y^2}{1 - e_x \cos F - e_y \sin F}. \end{aligned}$$

Реактивное ускорение определяется тремя независимыми компонентами  $a_r, a_c, a_n$  в орбитальной системе координат (Рис. 1):

$$\mathbf{a} = a_r \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} + a_c \frac{\mathbf{w} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{w} \times \mathbf{r}|} + a_n \frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|},$$

где  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{v}$  – радиус-вектор и вектор скорости КА соответственно, а  $\mathbf{w} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ .

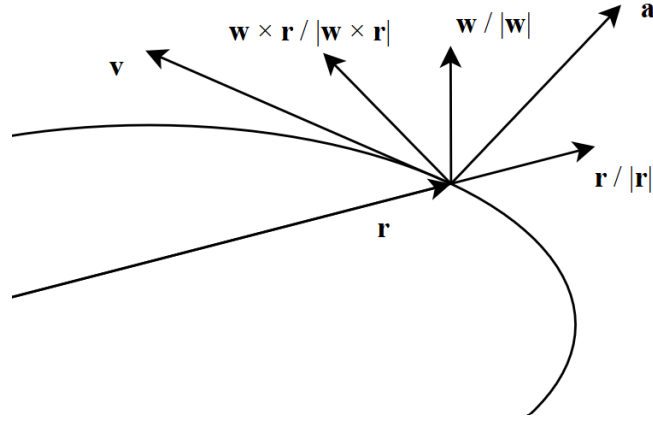


Рис. 1. Орбитальная система координат.

Модифицированные равноденственные элементы являются аналогом классических кеплеровых элементов орбиты [7]: большой полуоси  $a$ , эксцентриситета  $e$ , наклонения  $i$ , долготы восходящего узла  $\Omega$  и аргумента перицентра  $\omega$ , и связаны с ними формулами

$$\begin{aligned} p &= a(1 - e^2), \\ e_x &= e \cos(\omega + \Omega), \\ e_y &= e \sin(\omega + \Omega), \\ i_x &= \tan \frac{i}{2} \cos \Omega, \\ i_y &= \tan \frac{i}{2} \sin \Omega. \end{aligned}$$

Эксцентрическая долгота  $F$  связана с эксцентрической аномалией следующим образом:  $F = E + \omega + \Omega$ , где  $E$  – эксцентрическая аномалия. Преимущество модифицированных равноденственных элементов по сравнению с кеплеровыми элементами орбиты заключается в том, что они не вырождаются для случаев круговых и экваториальных орбит, т.е. при  $e = 0$  и  $i = 0$ . Единственным исключением являются ретроградные экваториальные орбиты ( $i = \pi$ ), тогда вырождаются элементы  $i_x$  и  $i_y$ . Однако существуют подходы к решению этой проблемы, например, добавление ретроградного фактора [45]. Далее, для краткости, будем называть переменные  $p$ ,  $e_x$ ,  $e_y$ ,  $i_x$ ,  $i_y$  элементами мгновенной орбиты КА или орбитальными элементами.

## 2. Метод усреднения

Для компактности перепишем уравнения (1)–(6) в виде

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, F)\mathbf{a}, \quad (7)$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\sqrt{(1 - e_x^2 - e_y^2)^3 \mu}}{\sqrt{p^3}(1 - e_x \cos F - e_y \sin F)} + \mathbf{b}^T(\mathbf{x}, F)\mathbf{a}, \quad (8)$$

где  $\mathbf{x} = (p, e_x, e_y, i_x, i_y)^T$ . В таком виде уравнения движения позволяют использовать условие малости тяги  $\varepsilon = a_{\text{хар}}/a_\mu = a_{\text{хар}}p^2/(1 - e_x^2 - e_y^2)^2/\mu \ll 1$ , где  $a_{\text{хар}}$  – характерная величина реактивного ускорения,  $a_\mu = \mu/a^2$  – величина ускорения за счёт притяжения Земли как точечной массы, для разделения переменных на медленную  $\mathbf{x}$  и быструю  $F$ , так как

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &\sim \varepsilon \sqrt{\frac{p}{\mu}}, \\ \frac{dF}{dt} &\sim (1 + \varepsilon) \sqrt{\frac{p}{\mu}}. \end{aligned}$$

Данное свойство позволяет воспользоваться теорией возмущений, а именно методом усреднения [39]. Рассмотрим усреднённую систему

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{A}(\bar{\mathbf{x}}, \tilde{F}(\bar{\mathbf{x}}, t)) \mathbf{a} dt, \quad (9)$$

где  $\bar{\mathbf{x}} = [\bar{p}, \bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{i}_x, \bar{i}_y]$  – вектор усреднённых орбитальных элементов, а  $\tilde{F}(\bar{\mathbf{x}}, t)$  есть решение уравнения

$$\left. \frac{d\tilde{F}}{dt} = \frac{\sqrt{(1 - \bar{e}_x^2 - \bar{e}_y^2)^3 \mu}}{\sqrt{\bar{p}^3}(1 - \bar{e}_x \cos \tilde{F} - \bar{e}_y \sin \tilde{F})} \right|_{\bar{\mathbf{x}}=\text{const}}. \quad (10)$$

Согласно теории метода усреднения [39], при условии существования предела в (9), решение усреднённой системы (9) аппроксимирует решение исходной системы (7) с точностью порядка  $\varepsilon$  на интервалах времени порядка  $1/\varepsilon$ . Таким

образом, рассматривая вместо системы (7)–(8) усреднённую систему (9), можно исследовать приближённую динамику элементов мгновенной орбиты КА на больших интервалах времени при условии малости реактивного ускорения.

До этого момента не уточнялось, как вектор реактивного ускорения  $\mathbf{a}$  зависит от времени, орбитальных элементов и угловой переменной. Однако не любое реактивное ускорение гарантирует существование предела в (9). В данной работе предлагается рассматривать множество реактивных ускорений, близких к периодическим по угловой переменной. Как уже говорилось, реактивное ускорение считается малым по сравнению с ускорением, действующим на КА за счёт притяжения небесного тела. Поэтому в течение одного витка мгновенной орбиты значения орбитальных элементов меняются незначительно, что подтверждается фактом разделения переменных на медленную и быструю. Таким образом, для значительного изменения параметров орбиты КА необходимо длительное воздействие реактивного ускорения; при этом воздействие должно быть схожим на соседних витках траектории, что говорит о нём как о близком к периодическому. О естественности данного предположения говорит также и то, что множество управлений, полученных при проектировании многовитковых перелётов с малой тягой, демонстрируют почти периодическую структуру. В качестве приближения предлагается рассмотреть реактивное ускорение, строго периодическое по эксцентрической долготе  $F$  и представимое в виде тригонометрического ряда

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(F) = \boldsymbol{\alpha}_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (\boldsymbol{\alpha}_k \cos kF + \boldsymbol{\beta}_k \sin kF). \quad (11)$$

Покажем, что в случае, когда реактивное ускорение определяется выражением (11), существует предел (9). Заметим, что подынтегральное выражение в (9) в таком случае явно не зависит от времени  $t$ . Учитывая, что в силу уравнения (10) переменная  $\tilde{F}$  является монотонно возрастающей функцией времени

$t$ , перейдём в (9) от интегрирования по  $t$  к интегрированию по  $\tilde{F}$ :

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} = \lim_{T(\Delta\tilde{F}) \rightarrow \infty} \frac{1}{T(\Delta\tilde{F})} \int_{\tilde{F}_0}^{\tilde{F}_0 + \Delta\tilde{F}} A(\bar{\mathbf{x}}, \tilde{F}) \mathbf{a}(\tilde{F}) \left( \frac{d\tilde{F}}{dt} \right)^{-1} d\tilde{F}. \quad (12)$$

Теперь обратим внимание на то, что в силу (1)–(5), (10) и (11) подынтегральная функция является периодической по  $\tilde{F}$  с периодом  $2\pi$ . То же можно сказать и о подынтегральной функции в выражении

$$T(\Delta\tilde{F}) = \int_{\tilde{F}_0}^{\tilde{F}_0 + \Delta\tilde{F}} \left( \frac{d\tilde{F}}{dt} \right)^{-1} d\tilde{F}.$$

Значит, представив  $\Delta\tilde{F}$  в виде  $2\pi k + \varphi$ , где  $k$  – целое число и  $\varphi \in [0, 2\pi)$ , можно переписать выражение (12) в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} &= \\ &= \lim_{T(\Delta\tilde{F}) \rightarrow \infty} \frac{k \int_{\tilde{F}_0}^{\tilde{F}_0 + 2\pi} A(\bar{\mathbf{x}}, \tilde{F}) \mathbf{a}(\tilde{F}) \left( \frac{d\tilde{F}}{dt} \right)^{-1} d\tilde{F} + \int_{\tilde{F}_0}^{\tilde{F}_0 + \varphi} A(\bar{\mathbf{x}}, \tilde{F}) \mathbf{a}(\tilde{F}) \left( \frac{d\tilde{F}}{dt} \right)^{-1} d\tilde{F}}{k \int_{\tilde{F}_0}^{\tilde{F}_0 + 2\pi} \left( \frac{d\tilde{F}}{dt} \right)^{-1} d\tilde{F} + \int_{\tilde{F}_0}^{\tilde{F}_0 + \varphi} \left( \frac{d\tilde{F}}{dt} \right)^{-1} d\tilde{F}}. \end{aligned}$$

Из-за монотонности  $\tilde{F}$  по  $t$  верно  $k \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \infty$ . Учитывая, что интегралы от  $\tilde{F}_0$  до  $\tilde{F}_0 + \varphi$  ограничены из-за ограниченности  $\varphi$ , уравнение можно переписать в виде

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} = \frac{\int_0^{2\pi} A(\bar{\mathbf{x}}, \tilde{F}) \mathbf{a}(\tilde{F}) \left( \frac{d\tilde{F}}{dt} \right)^{-1} d\tilde{F}}{\int_0^{2\pi} \left( \frac{d\tilde{F}}{dt} \right)^{-1} d\tilde{F}}. \quad (13)$$

Итак, показано, что в рамках предположения о реактивном ускорении (11) усреднённая система определяется уравнением (13). Преобразуем его правую

часть, подставив в неё (10):

$$\begin{aligned}
& \frac{\int_0^{2\pi} A(\bar{\mathbf{x}}, \tilde{F}) \mathbf{a}(\tilde{F}) \left(\frac{d\tilde{F}}{dt}\right)^{-1} d\tilde{F}}{\int_0^{2\pi} \left(\frac{d\tilde{F}}{dt}\right)^{-1} d\tilde{F}} = \\
& = \frac{\int_0^{2\pi} A(\bar{\mathbf{x}}, \tilde{F}) \mathbf{a}(\tilde{F}) \sqrt{\bar{p}^3} (1 - \bar{e}_x \cos \tilde{F} - \bar{e}_y \sin \tilde{F}) / \sqrt{(1 - \bar{e}_x^2 - \bar{e}_y^2)^3} \mu d\tilde{F}}{\int_0^{2\pi} \sqrt{\bar{p}^3} (1 - \bar{e}_x \cos \tilde{F} - \bar{e}_y \sin \tilde{F}) / \sqrt{(1 - \bar{e}_x^2 - \bar{e}_y^2)^3} \mu d\tilde{F}} = \\
& = \frac{\int_0^{2\pi} A(\bar{\mathbf{x}}, \tilde{F}) \mathbf{a}(\tilde{F}) \sqrt{\bar{p}^3} (1 - \bar{e}_x \cos \tilde{F} - \bar{e}_y \sin \tilde{F}) / \sqrt{(1 - \bar{e}_x^2 - \bar{e}_y^2)^3} \mu d\tilde{F}}{2\pi \sqrt{\bar{p}^3} / (1 - \bar{e}_x^2 - \bar{e}_y^2)^3 / \mu} = \\
& = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A(\bar{\mathbf{x}}, \tilde{F}) \mathbf{a}(\tilde{F}) (1 - \bar{e}_x \cos \tilde{F} - \bar{e}_y \sin \tilde{F}) d\tilde{F}.
\end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (13) переписывается в виде

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A(\bar{\mathbf{x}}, \tilde{F}) \mathbf{a}(\tilde{F}) (1 - \bar{e}_x \cos \tilde{F} - \bar{e}_y \sin \tilde{F}) d\tilde{F}. \quad (14)$$

Перейдём к рассмотрению подынтегрального выражения в (14). Оказывается, что все элементы матрицы  $A(\bar{\mathbf{x}}, \tilde{F}) (1 - \bar{e}_x \cos \tilde{F} - \bar{e}_y \sin \tilde{F})$  являются линейными комбинациями  $\sin k\tilde{F}$  и  $\cos k\tilde{F}$ , причём  $k = 0, 1, 2$ . Поэтому, а также из-за ортогональности системы тригонометрических функций  $\{1, \sin nF, \cos nF\}_{n=1}^{\infty}$  на отрезке  $[0, 2\pi]$ , после взятия интеграла в (14) справа останутся только коэффициенты  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1$  и  $\beta_2$  тригонометрического ряда (11). Компоненты с частотами  $k > 2$  не будут присутствовать в правых частях усреднённой системы, а потому не будут влиять на динамику орбитальных элементов в модели усреднённого движения. Таким образом, можно сказать, что в случае, когда малое реактивное ускорение является периодическим на витке, на усреднённую динамику мгновенной орбиты КА влияют только компоненты его разложения в тригонометрический ряд по  $F$ , постоянные во времени ( $k = 0$ ) или периодические с частотами  $k = 1, 2$ .

Отметим, что данное свойство уравнений, записанных в терминах модифицированных равноденственных элементов орбиты, обнаруживается только в

случае, когда уравнения движения записаны в терминах эксцентрической долготы  $F$  и она же выбрана в качестве угловой переменной, тригонометрическим рядом по которой представляется вектор реактивного ускорения. При выборе других углов, например, истинной долготы  $L = f + \omega + \Omega$  или средней долготы  $\lambda = M + \omega + \Omega$  ( $f$  и  $M$  – истинная и средняя аномалии соответственно), таким свойством система не обладает. Аналогичный результат был получен в [46], где уравнения движения были записаны в терминах кеплеровых элементов орбиты. Там «особенной» угловой переменной оказалась эксцентрическая аномалия  $E$ , связанная с  $F$  соотношением  $F = E + \omega + \Omega$ . Таким образом, эксцентрические угловые переменные можно назвать в некотором смысле регуляризующими, так как при записи уравнений движения с их помощью из знаменателей пропадают выражения вида  $1 - e \cos f$ , которые при больших значениях эксцентриситета приводят к сильной нерегулярности правых частей.

Итак, в векторной форме усреднённая система имеет следующий вид:

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{M}(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{c}. \quad (15)$$

Вектор  $\mathbf{c} = (\alpha_0^r, \alpha_1^r, \beta_1^r, \alpha_2^r, \beta_2^r, \alpha_0^c, \alpha_1^c, \beta_1^c, \alpha_2^c, \beta_2^c, \alpha_0^n, \alpha_1^n, \beta_1^n, \alpha_2^n, \beta_2^n)^T$  содержит только те коэффициенты тригонометрического ряда (11), которые соответствуют частотам  $k = 0, 1, 2$  (здесь нижние индексы отвечают значению частоты, а верхние – компоненте реактивного ускорения). Уравнения для каждого из орбитальных элементов выглядят следующим образом:

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{1}{\varphi^2} \sqrt{\frac{\bar{p}^3}{\mu}} \left\{ (2 + \bar{e}_x^2 + \bar{e}_y^2) \alpha_0^c - 2\bar{e}_x \alpha_1^c - 2\bar{e}_y \beta_1^c + \frac{\bar{e}_x^2 - \bar{e}_y^2}{2} \alpha_2^c + \bar{e}_x \bar{e}_y \beta_2^c \right\}, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{i}_x}{dt} = \frac{1 + \bar{i}_x^2 + \bar{i}_y^2}{4} \sqrt{\frac{\bar{p}}{\mu}} & \left\{ -\frac{3\bar{e}_x}{2\varphi^2} \alpha_0^n + \frac{\bar{e}_x^2(2 - \varphi^2) + \varphi \bar{e}_y^2}{\bar{e}^2 \varphi^2} \alpha_1^n + \bar{e}_x \bar{e}_y \frac{2 - \varphi^2 - \varphi}{\bar{e}^2 \varphi^2} \beta_1^n + \right. \\ & \left. + \bar{e}_x \frac{\bar{e}_y^2 - \bar{e}_x^2 - 2\varphi \bar{e}_y^2}{2\bar{e}^2 \varphi^2} \alpha_2^n - \bar{e}_y \frac{2\bar{e}_x^2 - (\bar{e}_x^2 - \bar{e}_y^2)\varphi}{2\bar{e}^2 \varphi^2} \beta_2^n \right\}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\frac{d\bar{i}_y}{dt} = \frac{1 + \bar{i}_x^2 + \bar{i}_y^2}{4} \sqrt{\frac{\bar{p}}{\mu}} \left\{ -\frac{3\bar{e}_y}{2\varphi^2} \alpha_0^n + \bar{e}_x \bar{e}_y \frac{2 - \varphi - \varphi^2}{\bar{e}^2 \varphi^2} \alpha_1^n + \frac{\bar{e}_y^2 (2 - \varphi^2) + \bar{e}_x^2 \varphi}{\bar{e}^2 \varphi^2} \beta_1^n - \right. \\ \left. - \bar{e}_y \frac{\bar{e}_x^2 - \bar{e}_y^2 - 2\bar{e}_x^2 \varphi}{2\bar{e}^2 \varphi^2} \alpha_2^n - \bar{e}_x \frac{2\bar{e}_y^2 + (\bar{e}_x^2 - \bar{e}_y^2) \varphi}{2\bar{e}^2 \varphi^2} \beta_2^n \right\}, \quad (18)$$

$$\frac{d\bar{e}_x}{dt} = \sqrt{\frac{\bar{p}}{\mu}} \left\{ -\bar{e}_y \alpha_0^r - \frac{3\bar{e}_x}{2} \alpha_0^c + 3\bar{e}_y \frac{\bar{e}_y \bar{i}_x - \bar{e}_x \bar{i}_y}{2\varphi^2} \alpha_0^n + \bar{e}_x \bar{e}_y \frac{1 - \varphi}{2\bar{e}^2} \alpha_1^r + \frac{\varphi \bar{e}_x^2 + \bar{e}_y^2}{2\bar{e}^2} \beta_1^r + \right. \\ + \frac{\bar{e}_y^2 (1 + \varphi^2) + 2\varphi \bar{e}_x^2}{2\bar{e}^2 \varphi} \alpha_1^c + \bar{e}_y \frac{(\bar{e}_x \bar{i}_y - \bar{e}_y \bar{i}_x) (2 + \varphi) \bar{e}_x + \varphi (1 + \varphi) \bar{i}_y}{2(1 + \varphi) \varphi^2} \alpha_1^n - \\ - \bar{e}_x \bar{e}_y \frac{(1 - \varphi)^2}{2\bar{e}^2 \varphi} \beta_1^c - \bar{e}_y \frac{(\bar{e}_y \bar{i}_x - \bar{e}_x \bar{i}_y) (2 + \varphi) \bar{e}_y + \varphi (1 + \varphi) \bar{i}_x}{2(1 + \varphi) \varphi^2} \beta_1^n - \\ - \bar{e}_x \frac{(\bar{e}_x^2 - \bar{e}_y^2) \varphi + 2\bar{e}_y^2}{4\bar{e}^2 \varphi} \alpha_2^c - \bar{e}_y \frac{(\bar{e}_x \bar{i}_y + \bar{e}_y \bar{i}_x) (1 + \varphi) - 2\bar{e}_x \bar{e}_y (\bar{e}_x \bar{i}_x + \bar{e}_y \bar{i}_y)}{4(1 + \varphi) \varphi^2} \alpha_2^n - \\ \left. - \bar{e}_y \frac{2\bar{e}_x^2 \varphi - \bar{e}_x^2 + \bar{e}_y^2}{4\bar{e}^2 \varphi} \beta_2^c + \bar{e}_y \frac{\varphi (1 + \varphi) (\bar{e}_x \bar{i}_x - \bar{e}_y \bar{i}_y) + 2\bar{e}_x \bar{e}_y (\bar{e}_y \bar{i}_x - \bar{e}_x \bar{i}_y)}{4(1 + \varphi) \varphi^2} \beta_2^n \right\}, \quad (19)$$

$$\frac{d\bar{e}_y}{dt} = \sqrt{\frac{\bar{p}}{\mu}} \left\{ \bar{e}_x \alpha_0^r - \frac{3\bar{e}_y}{2} \alpha_0^c + 3\bar{e}_x \frac{\bar{e}_x \bar{i}_y - \bar{e}_y \bar{i}_x}{2\varphi^2} \alpha_0^n - \frac{\varphi \bar{e}_y^2 + \bar{e}_x^2}{2\bar{e}^2} \alpha_1^r + \bar{e}_x \bar{e}_y \frac{\varphi - 1}{2\bar{e}^2} \beta_1^r - \right. \\ - \bar{e}_x \bar{e}_y \frac{(1 - \varphi)^2}{2\bar{e}^2 \varphi} \alpha_1^c - \bar{e}_x \frac{(\bar{e}_x \bar{i}_y - \bar{e}_y \bar{i}_x) (2 + \varphi) \bar{e}_x + \varphi (1 + \varphi) \bar{i}_y}{2(1 + \varphi) \varphi^2} \alpha_1^n + \\ + \frac{2\varphi \bar{e}_y^2 + (1 + \varphi^2) \bar{e}_x^2}{2\bar{e}^2 \varphi} \beta_1^c + \bar{e}_x \frac{(\bar{e}_y \bar{i}_x - \bar{e}_x \bar{i}_y) (2 + \varphi) \bar{e}_y + \varphi (1 + \varphi) \bar{i}_x}{2(1 + \varphi) \varphi^2} \beta_1^n + \\ + \bar{e}_y \frac{(\bar{e}_y^2 - \bar{e}_x^2) \varphi + 2\bar{e}_x^2}{4\bar{e}^2 \varphi} \alpha_2^c + \bar{e}_x \frac{(\bar{e}_x \bar{i}_y + \bar{e}_y \bar{i}_x) (1 + \varphi) - 2\bar{e}_x \bar{e}_y (\bar{e}_x \bar{i}_x + \bar{e}_y \bar{i}_y)}{4(1 + \varphi) \varphi^2} \alpha_2^n - \\ \left. - \bar{e}_x \frac{2\bar{e}_y^2 \varphi + \bar{e}_x^2 - \bar{e}_y^2}{4\bar{e}^2 \varphi} \beta_2^c - \bar{e}_x \frac{(\bar{e}_x \bar{i}_x - \bar{e}_y \bar{i}_y) \varphi (1 + \varphi) + 2\bar{e}_x \bar{e}_y (\bar{e}_y \bar{i}_x - \bar{e}_x \bar{i}_y)}{4(1 + \varphi) \varphi^2} \beta_2^n \right\}. \quad (20)$$

Здесь  $\bar{e} = \sqrt{\bar{e}_x^2 + \bar{e}_y^2}$ ,  $\varphi = \sqrt{1 - \bar{e}^2}$ .

### 3. Учёт внешних возмущений и факторов

Помимо силы реактивной тяги, на орбитальное движение КА в окрестности небесного тела влияют и другие силы и факторы. На рисунке 2 представлены результаты сравнения характерных величин ускорения КА за счёт сил, действующих на околоземных орбитах различной высоты. Как можно видеть,

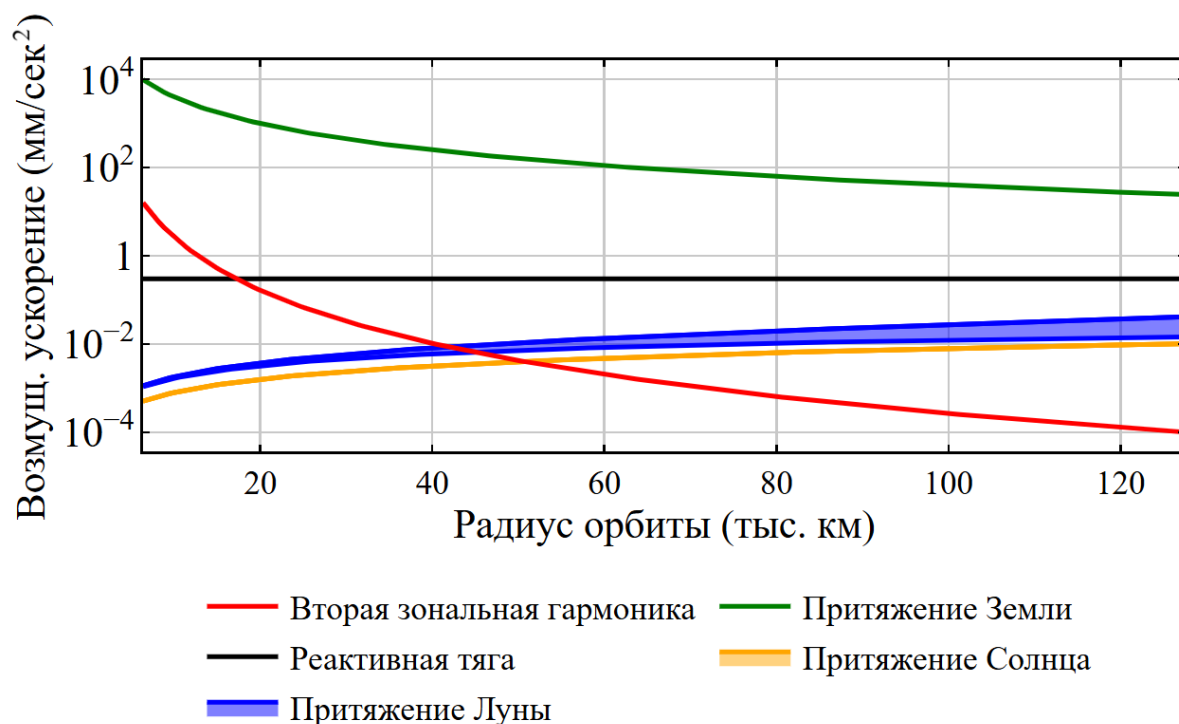


Рис. 2. Характерные величины возмущающих ускорений на круговых околоземных орбитах. Ускорения за счёт притяжения Луны и Солнца указаны в диапазонах, так как отличаются по величине в зависимости от того, находится КА между Землёй и третьим телом (тогда ускорение больше) или же за Землёй (тогда ускорение меньше).

при движении по низким орбитам к главным внешним силам можно отнести несферичность Земли. В то же время на высоких орбитах большее влияние оказывают силы притяжения Луны и Солнца. Все эти силы на соответствующих высотах близки по порядку или даже превышают характерные значения силы реактивной тяги, поэтому их необходимо учитывать в усреднённой модели движения.

Помимо естественных возмущающих ускорений, есть и другие факторы, влияющие на движение КА в околоземном пространстве. При использовании

электрореактивных двигательных установок (ЭРДУ) требуется высокая мощность, которая генерируется солнечными панелями. Поэтому, когда аппарат находится в тени Земли, использование ЭРДУ невозможно. Это накладывает на реактивную тягу ограничения, зависящие от параметров орбиты и положения Солнца в данный момент времени. При этом, независимо от высоты орбиты, разница в итоговом реактивном ускорении между моделированием с учётом выключения ЭРДУ в тени и моделированием без учёта этого фактора будет сравнима с величиной самого реактивного ускорения от двигателей.

Описанные в начале главы свойства усреднённой динамики распространяются не только на реактивное ускорение, но и на все возмущающие ускорения, которые можно с высокой точностью аппроксимировать тригонометрическими рядами. Таким образом, чтобы учесть возмущающее ускорение, действующее на КА, нужно вычислить соответствующие коэффициенты разложения его в ряд Фурье и подставить их в уравнение (15). В диссертации предложен метод учёта в модели усреднённого движения возмущающего ускорения за счёт полярного сжатия (второй зональной гармоники геопотенциала) Земли, а также факта выключения ДУ в тени.

### 3.1. Полярное сжатие Земли

Ускорение, действующее на КА за счёт полярного сжатия Земли, может быть записано в орбитальной системе координат [47] и имеет вид

$$\mathbf{a}_{J_2}(\mathbf{x}, F) = -\frac{3\mu J_2 R_E^2}{(1 + i_x^2 + i_y^2)^2 r^4} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (1 + i_x^2 + i_y^2)^2 - 6 (i_x \cos L - i_y \sin L)^2 \\ 2 (i_x^2 - i_y^2) \sin 2L - 4i_x i_y \cos 2L \\ 2 (1 - i_x^2 - i_y^2) (i_x \sin L - i_y \cos L) \end{pmatrix}, \quad (21)$$

где  $R_E = 6378$  км – средний экваториальный радиус Земли,  $J_2 = 1.08263 \cdot 10^{-3}$ ,  $r = p/\sigma$  – длина мгновенного радиус-вектора положения КА, проведённого из центра масс Земли,  $\sigma = (1 - e_x^2 - e_y^2)/(1 - e_x \cos F - e_y \sin F)$ . Запишем уравнения

движения с учётом этого возмущающего ускорения:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{A}(\mathbf{x}, F)(\mathbf{a}(F) + \mathbf{a}_{J_2}(\mathbf{x}, F)), \\ \frac{dF}{dt} &= \frac{\sqrt{(1 - e_x^2 - e_y^2)^3 \mu}}{\sqrt{p^3(1 - e_x \cos F - e_y \sin F)}} + \mathbf{b}^T(\mathbf{x}, F)(\mathbf{a}(F) + \mathbf{a}_{J_2}(\mathbf{x}, F)).\end{aligned}$$

Так как это внешнее возмущающее ускорение является периодическим по эксцентрической долготе  $F$ , переход к усреднённой системе не отличается от случая только реактивного ускорения, и после вычисления предела система будет иметь вид

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{A}(\bar{\mathbf{x}}, \tilde{F}) (1 - \bar{e}_x \cos \tilde{F} - \bar{e}_y \sin \tilde{F}) (\mathbf{a}(\tilde{F}) + \mathbf{a}_{J_2}(\bar{\mathbf{x}}, \tilde{F})) d\tilde{F}. \quad (22)$$

Исходя из свойств матрицы  $\mathbf{A}(\bar{\mathbf{x}}, \tilde{F}) (1 - \bar{e}_x \cos \tilde{F} - \bar{e}_y \sin \tilde{F})$ , описанных ранее, после взятия интеграла в правой части (22) возмущение за счёт второй зональной гармоники будет представлено конечным набором коэффициентов разложения вектора  $\mathbf{a}_{J_2}(\mathbf{x}, F)$  в ряд Фурье по  $F$ . Поэтому для его учёта в усреднённой модели достаточно вычислить эти коэффициенты как функции  $\mathbf{x}$ , после чего составить из них вектор  $\mathbf{c}_{J_2}(\bar{\mathbf{x}})$  и прибавить его к вектору  $\mathbf{c}$  в правой части усреднённой системы уравнений (15). Итоговая усреднённая система будет иметь вид

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{M}(\bar{\mathbf{x}}) (\mathbf{c} + \mathbf{c}_{J_2}(\bar{\mathbf{x}})). \quad (23)$$

Коэффициенты ряда Фурье вычисляются аналитически и представлены в Приложении 1.

### 3.2. Выключение двигателя в тени Земли

Перейдём к рассмотрению случая, когда КА оборудован ЭРДУ, которая не может работать в тени Земли. В модели цилиндрической тени [48] учёт этого факта в уравнениях движения заключается в умножении вектора реактивного

ускорения на величину

$$\sigma(\mathbf{x}, F, t) = \begin{cases} 1, \rho(\mathbf{x}, F, \nu_C) > 0 \\ 0, \rho(\mathbf{x}, F, \nu_C) \leq 0 \end{cases},$$

где функция

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}, F, \nu_S) = & ((1 + i_x^2 - i_y^2) \cos L + 2i_x i_y \sin L) \cos \nu_C + \\ & + ((1 - i_x^2 + i_y^2) \sin L + 2i_x i_y \cos L) \sin \nu_C \cos i_C + \\ & + 2(i_x \sin L - i_y \cos L) \sin \nu_C \sin i_C + \\ & + (1 + i_x^2 + i_y^2) \sqrt{1 - \frac{R_E^2}{p^2} (1 + e_x \cos L + e_y \sin L)^2}, \end{aligned} \quad (24)$$

$i_C$  – наклонение орбиты Земли вокруг Солнца,  $\nu_C = \nu_0 + \omega_C t$  – истинная аномалия Земли на орбите вокруг Солнца (орбита Земли вокруг Солнца считается круговой,  $\omega_C = 2\pi/T_{\text{год}}$  – угловая скорость движения Земли вокруг Солнца). Для начала представим выключение ЭРДУ в тени в виде вектора возмущающего ускорения

$$\mathbf{a}_T(\mathbf{x}, F, \nu_C) = (\sigma(\mathbf{x}, F, \nu_C) - 1)\mathbf{a},$$

который в тени равен  $-\mathbf{a}$ , а на остальной части витка равен нулю. Как и в случаях внешних возмущающих ускорений, для его учёта сформируем вектор  $\mathbf{c}_T$ , состоящий из 15 коэффициентов разложения  $\mathbf{a}_T$  в ряд Фурье, и включим его в правую часть уравнений усреднённой системы (15). Для разложения этого вектора в ряд Фурье необходимо определить точки орбиты, в которых КА входит и выходит из тени, которых может быть от нуля до двух. При известных параметрах мгновенной орбиты и положении Солнца значения эксцентрической долготы можно получить, численно решив уравнение

$$\rho(\mathbf{x}, F, \nu_C) = 0 \quad (25)$$

относительно  $F$ .

Существует большое количество методов решения нелинейных уравнений [49, 50]. Так как поиск решений уравнения (25) происходит на каждом шаге численного интегрирования уравнений движения, в работе предлагается метод, позволяющий найти решения с малыми вычислительными затратами. Для начала преобразуем уравнение, перенеся в (25) последнее слагаемое из определения (24) в правую часть и возведя обе части в квадрат:

$$\begin{aligned}
& \left( \left( (1 + i_x^2 - i_y^2) \cos L + 2i_x i_y \sin L \right) \cos \nu_C + \right. \\
& \quad + \left( (1 - i_x^2 + i_y^2) \sin L + 2i_x i_y \cos L \right) \sin \nu_C \cos i_C + \\
& \quad \left. + 2(i_x \sin L - i_x \cos L) \sin \nu_C \sin i_C \right)^2 = \\
& = (1 + i_x^2 + i_y^2)^2 \left( 1 - \frac{R_E^2}{p^2} (1 + e_x \cos L + e_y \sin L)^2 \right). \tag{26}
\end{aligned}$$

При этом появляются два дополнительных значения  $F$ , являющиеся решениями уравнения (26), но не решениями уравнения (25). Однако на этом этапе предлагается не учитывать этот момент, а отбор решений провести позже. Далее проведём тригонометрическую замену  $\xi = \tan \frac{L}{2}$ ,  $\sin L = 2\xi / (1 + \xi^2)$ ,  $\cos L = (1 - \xi^2) / (1 + \xi^2)$  и умножим обе части на  $(1 + \xi^2)^2$ , что преобразует уравнение (26) в уравнение с полиномом четвёртой степени

$$c_0 + c_1 \xi + c_2 \xi^2 + c_3 \xi^3 + c_4 \xi^4 = 0 \tag{27}$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned}
c_0 = & \left( (i_x^2 - i_y^2 + 1) \cos \nu_C - 2i_y \sin i_C \sin \nu_C + 2i_x i_y \cos i_C \sin \nu_C \right)^2 + \\
& + \left( \frac{R_E^2}{p^2} (e_x + 1)^2 - 1 \right) (1 + i_x^2 + i_y^2)^2,
\end{aligned}$$

$$c_1 = 4 \left( \cos \nu_C (i_x^2 - i_y^2 + 1) - 2i_y \sin i_C \sin \nu_C + 2i_x i_y \cos i_C \sin \nu_C \right) \cdot \\ \cdot \left( 2i_x i_y \cos \nu_C + 2i_x \sin i_C \sin \nu_C + \cos i_C \sin \nu_C (-i_x^2 + i_y^2 + 1) \right) + \\ + 4 \frac{R_E^2}{p^2} e_y (e_x + 1) (1 + i_x^2 + i_y^2)^2,$$

$$c_2 = 4 \left( 2i_x i_y \cos \nu_C + 2i_x \sin i_C \sin \nu_C + \cos i_C \sin \nu_C (1 - i_x^2 + i_y^2) \right)^2 + \\ + \left( \frac{R_E^2}{p^2} (4e_y^2 - 2(e_x - 1)(e_x + 1)) - 2 \right) (1 + i_x^2 + i_y^2)^2 - \\ - 2 \left( \cos \nu_C (i_x^2 - i_y^2 + 1) - 2i_y \sin i_C \sin \nu_C + 2i_x i_y \cos i_C \sin \nu_C \right)^2,$$

$$c_3 = -2 \left( \cos \nu_C (i_x^2 - i_y^2 + 1) - 2i_y \sin i_C \sin \nu_C + 2i_x i_y \cos i_C \sin \nu_C \right) \cdot \\ \cdot 2 \left( 2i_x i_y \cos \nu_C + 2i_x \sin i_C \sin \nu_C + \cos i_C \sin \nu_C (-i_x^2 + i_y^2 + 1) \right) - \\ - 4 \frac{R_E^2}{p^2} e_y (e_x - 1) (1 + i_x^2 + i_y^2)^2,$$

$$c_4 = \left( \cos \nu_C (i_x^2 - i_y^2 + 1) - 2i_y \sin i_C \sin \nu_C + 2i_x i_y \cos i_C \sin \nu_C \right)^2 + \\ + \left( \frac{R_E^2}{p^2} (e_x - 1)^2 - 1 \right) (1 + i_x^2 + i_y^2)^2.$$

Корни полиномиального уравнения степени  $n$  можно найти как корни сопровождающей матрицы с вычислительной сложностью  $O(n^2)$  [51]. По полученным корням вычисляются соответствующие значения истинной долготы  $L$ , а искомые значения эксцентрической долготы  $F$  находятся с помощью формулы

$$F = \arctg \left( \frac{e_y}{e_x} \right) + 2 \arctg \left( \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \right) \operatorname{tg} \left( \frac{L - \arctg(e_y/e_x)}{2} \right).$$

После этого остаётся отобрать из них только значения, удовлетворяющие условию (25).

Независимо от метода решения уравнения (25) возможны два случая: если решений нет (орбита КА не пересекает область тени) либо существует един-

ственное решение (орбита КА касается области тени), то  $\mathbf{a}_T(\mathbf{x}, F, \nu_C) = 0$  на всём витке, а значит, все коэффициенты разложения  $\mathbf{a}_T(\mathbf{x}, F, \nu_C)$  в ряд Фурье равны нулю, в том числе и компоненты искомого вектора  $\mathbf{c}$ .

Если же уравнение  $\rho(\mathbf{x}, F, \nu_S) = 0$  имеет два отличных действительных решения  $F_{in}$  и  $F_{out}$ , то на части витка  $\mathbf{a}_T$  не равен нулю. В таком случае значения интересующих нас коэффициентов вычисляются как

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{a}_{sh}(\mathbf{x}, F, \nu_S) dF = -\frac{1}{2\pi} \int_{F_{in}}^{F_{out}} \mathbf{a}(F) dF, \quad (28)$$

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{a}_{sh}(\mathbf{x}, F, \nu_S) \cos kF dF = -\frac{1}{\pi} \int_{F_{in}}^{F_{out}} \mathbf{a}(F) \cos kF dF, k = 1, 2, \quad (29)$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{a}_{sh}(\mathbf{x}, F, \nu_S) \sin kF dF = -\frac{1}{\pi} \int_{F_{in}}^{F_{out}} \mathbf{a}(F) \sin kF dF, k = 1, 2. \quad (30)$$

Здесь  $F_{in}$  и  $F_{out}$  отвечают входу в тень и выходу из тени соответственно. Отметим, что при вычислении  $F_{in}$  и  $F_{out}$  величина  $\nu_C$  считается постоянной и не зависящей от  $F$ . Это упрощение справедливо в случаях, когда период мгновенной орбиты КА гораздо меньше величины  $T_{год}$ , что выполняется для большинства околоземных движений, рассматриваемых на практике.

Интегралы в (28)–(30) можно брать численно для любых интегрируемых функций реактивного ускорения. Однако в случае, если эта зависимость представляется в виде конечной суммы тригонометрического ряда (11), содержащей только компоненты с частотами  $k = 0, 1, 2$ , можно вычислить компоненты вектора  $\mathbf{c}_{sh}$  аналитически через компоненты вектора  $\mathbf{c}$ . В любом случае уравнения усреднённой модели с учётом выключения ЭРДУ в тени принимают следующий вид:

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{M}(\bar{\mathbf{x}})(\mathbf{c} + \mathbf{c}_T(\bar{\mathbf{x}}, \nu_C(t), \mathbf{c})).$$

#### 4. Валидация модели усреднённой динамики

Для валидации модели усреднённой орбитальной динамики сравниваются траектории КА, полученные в рамках усреднённой и неусреднённой моделей

движения. Уравнения неусреднённой системы имеют вид

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, F) (\mathbf{a}\sigma(\mathbf{x}, F, t) + \mathbf{a}_{J_2}(\mathbf{x}, F)),$$

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} = & \sqrt{\left(\frac{1 - e_x^2 - e_y^2}{p}\right)^3} \frac{\sqrt{\mu}}{1 - e_x \cos F - e_y \sin F} + \\ & + \mathbf{b}^T(\mathbf{x}, F) (\mathbf{a}\sigma(\mathbf{x}, F, t) + \mathbf{a}_{J_2}(\mathbf{x}, F)), \end{aligned}$$

в то время как модель усреднённого движения определяется системой

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{M}(\bar{\mathbf{x}}) [\mathbf{c} + \mathbf{c}_{J_2}(\bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{c}_T(\bar{\mathbf{x}}, \nu_S(t), \mathbf{c})].$$

Сравнение проводится для двух различных начальных орбит, орбитальные элементы которых приведены в Таблице 1. Решения обеих систем урав-

Таблица 1. Кеплеровы элементы рассматриваемых орбит.

| Орбита                             | Солнечно-синхронная орбита<br>(случай 1) | Орбита «Молния»<br>(случай 2) |
|------------------------------------|------------------------------------------|-------------------------------|
| Большая полуось $a_0$ , км         | 7 190                                    | 26 878                        |
| Эксцентриситет $e_0$               | 0.003                                    | 0.725                         |
| Наклонение $i_0$ , град.           | 98.7                                     | 63.4                          |
| ДВУ $\Omega_0$ , град.             | 180.0                                    | 0.0                           |
| Арг. перицентра $\omega_0$ , град. | 0.0                                      | 270.0                         |
| Экс. долгота $F_0$ , град.         | 0.0                                      | 0.0                           |

нений строятся с помощью численного решения соответствующих задач Коши методом LSODA, реализованным в библиотеке SCIPY [52] со значениями абсолютной и относительной точности, равными  $10^{-10}$ . Интегрирование проводится на промежутке времени, равном одному году. Для полноты исследования решения строятся трижды:

- с учётом только полярного сжатия Земли (Рисунки 3 и 4),
- с учётом управления и выключения ДУ в тени (Рисунки 5 и 6),
- с учётом управления и всех возмущающих ускорений (Рисунки 7 и 8).

На Рисунках 3–8 синяя сплошная линия обозначает решение неусреднённой системы, красная пунктирная линия – решение усреднённой системы, чёрная сплошная линия – разность решений. При моделировании реактивное ускорение задаётся вектором

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0.1 \cos F \\ 0.01 \\ 0.1 \sin F \end{pmatrix} \text{мм/с}^2.$$

Норма вектора реактивного ускорения имеет порядок  $0.1 \text{ мм/с}^2$ , что лежит в границах характерных величин реактивного ускорения для электрореактивных двигателей. Все компоненты вектора выбраны ненулевыми для лучшей демонстративности полученных результатов.

Как можно видеть, разница между решениями усреднённой системы и истинно средним движением даже через год эволюции составляет менее 1% от характерных значений орбитальных элементов. Можно заметить, что эта разница растёт со временем (наиболее это заметно для переменных  $i_x$  и  $i_y$  ССО орбиты).

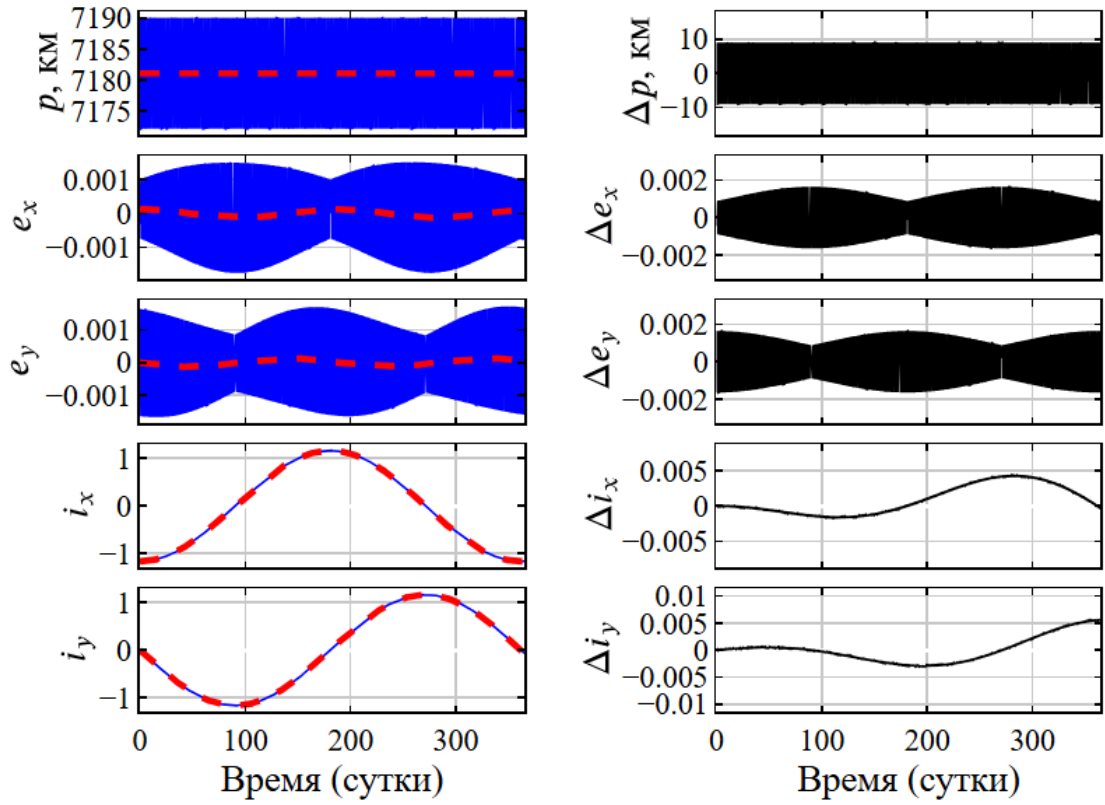


Рис. 3. Результаты моделирования с учётом полярного сжатия (случай 1).

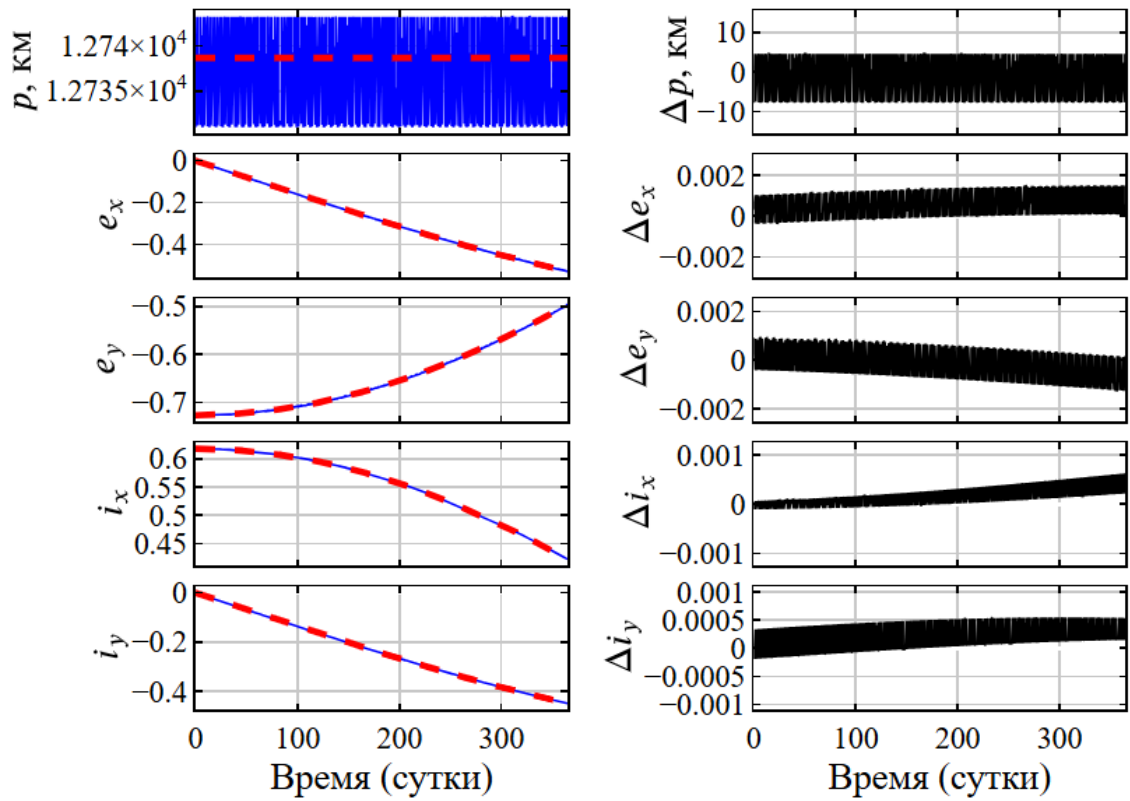


Рис. 4. Результаты моделирования с учётом полярного сжатия (случай 2).

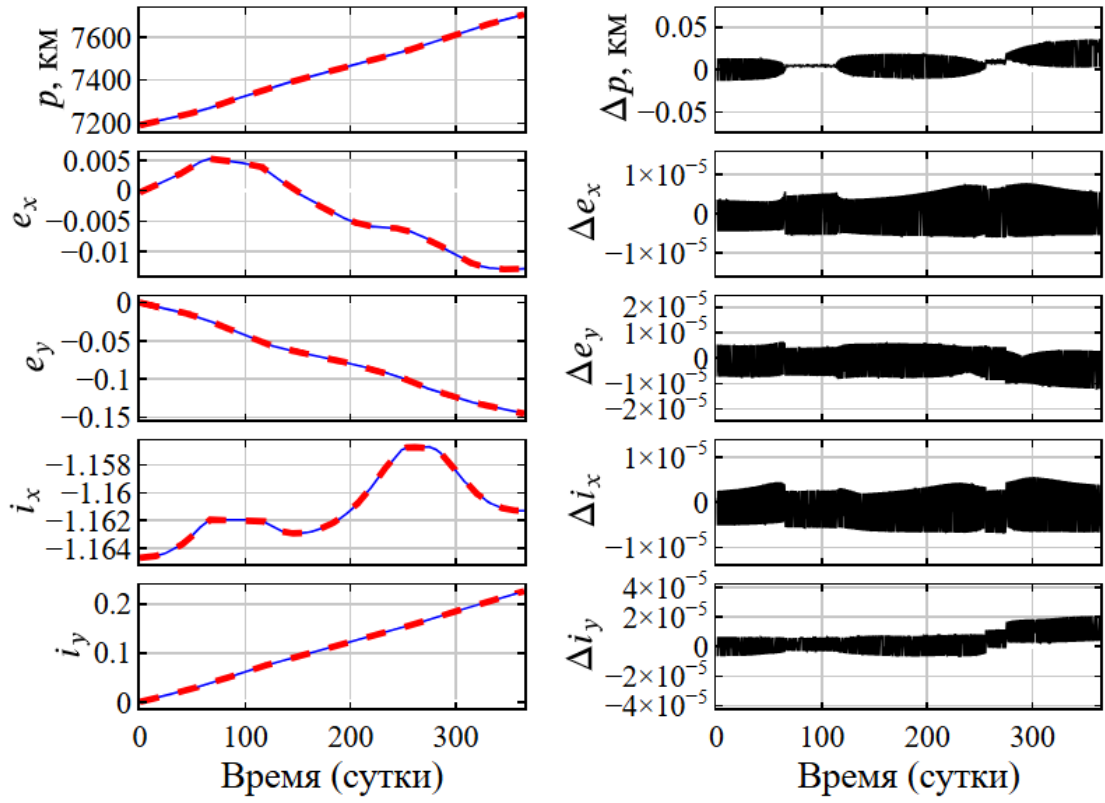


Рис. 5. Результаты моделирования с учётом выключения ДУ в тени (случай 1).

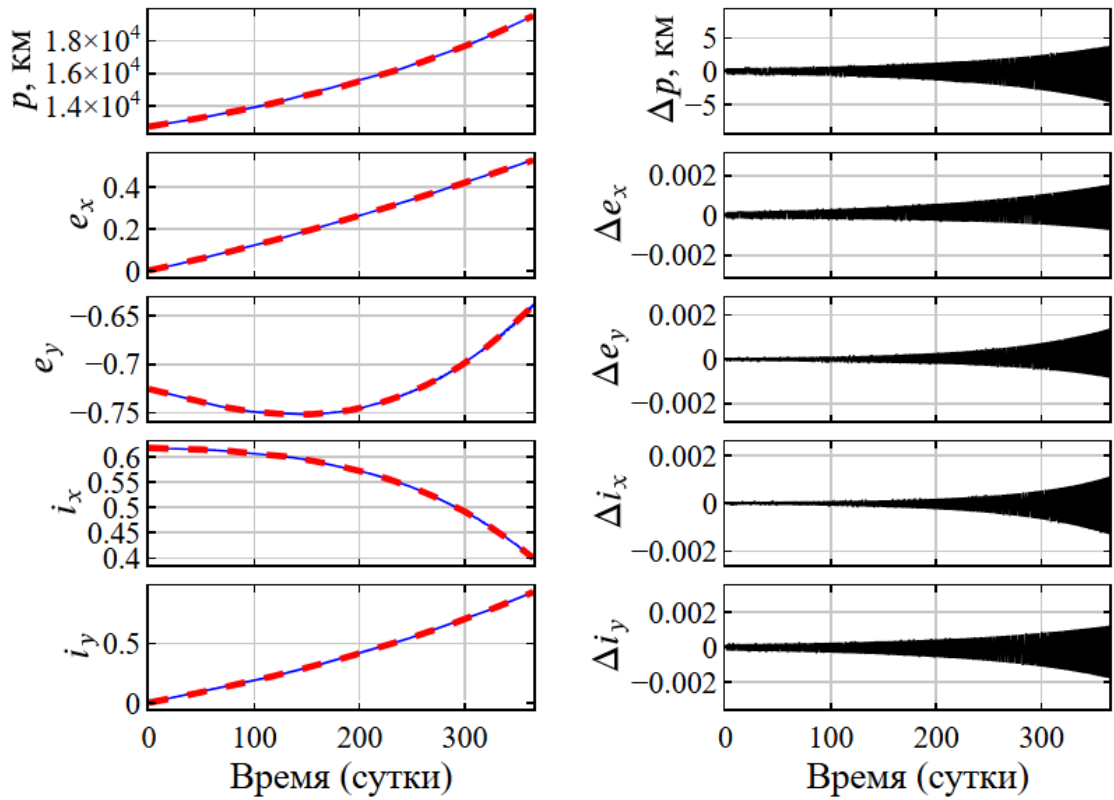


Рис. 6. Результаты моделирования с учётом выключения ДУ в тени (случай 2).

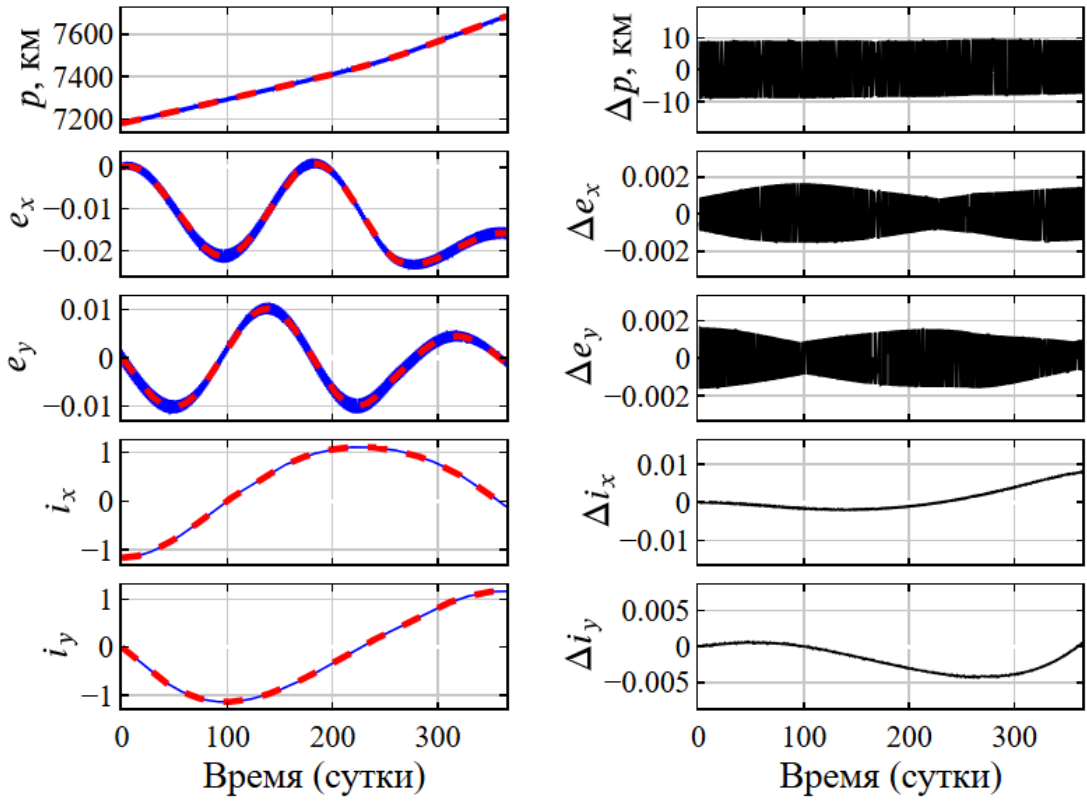


Рис. 7. Результаты моделирования с учётом обоих факторов (случай 1).

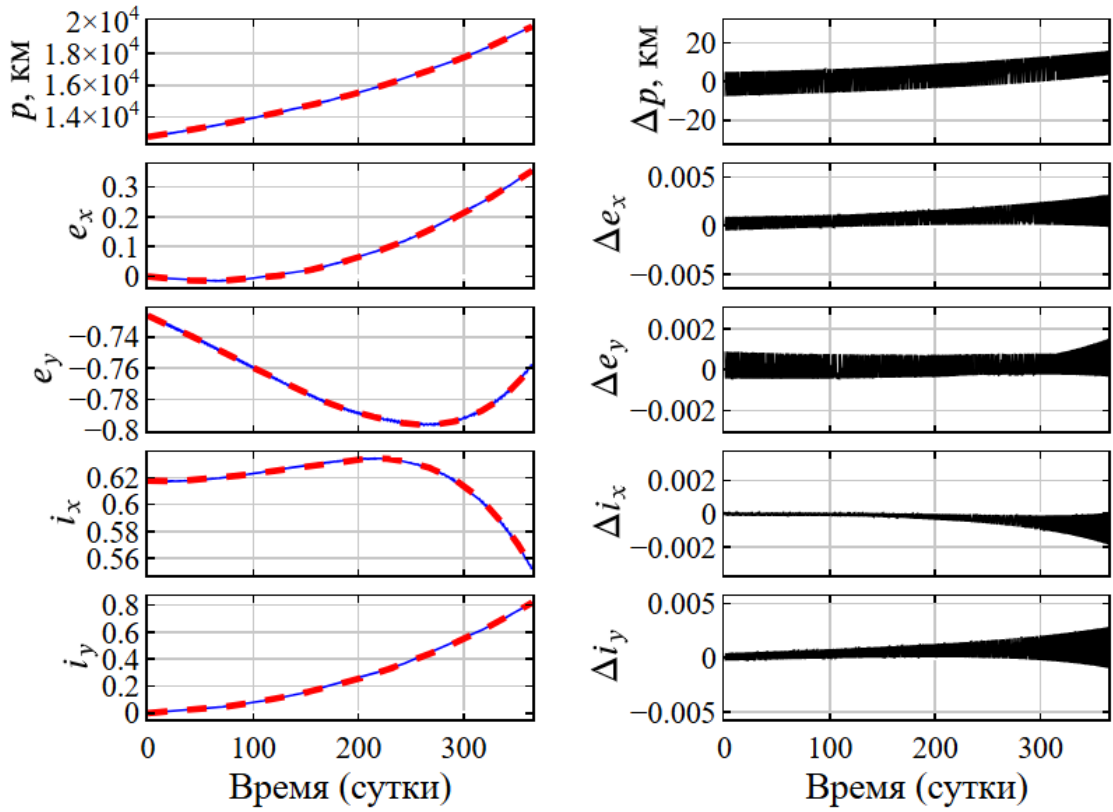


Рис. 8. Результаты моделирования с учётом обоих факторов (случай 2).

## 5. Поиск решений в явном виде в случае малых эксцентриситетов

Полученная усреднённая система была исследована на наличие решений в явном виде для движения по околокруговым орбитам как практический важный случай в динамике орбитального движения спутников. Для этого правые части были разложены в ряд Тейлора по величине  $\bar{e}$  с точностью до  $O(\bar{e}^2)$  (учтём, что  $\bar{e}_x = \bar{e} \cos(\bar{\omega} + \bar{\Omega})$  и  $\bar{e}_y = \bar{e} \sin(\bar{\omega} + \bar{\Omega})$ ):

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \bar{p} \sqrt{\frac{\bar{p}}{\mu}} (2\alpha_0^c - 2\alpha_1^c \bar{e}_x - 2\beta_1^c \bar{e}_y) + O(\bar{e}^2), \quad (31)$$

$$\frac{d\bar{e}_x}{dt} = \sqrt{\frac{\bar{p}}{\mu}} \left( \alpha_1^c + \frac{\beta_1^r}{2} - \left( \frac{3\alpha_0^c}{2} + \frac{\alpha_2^c}{4} \right) \bar{e}_x - \left( \alpha_0^r + \frac{\beta_2^c}{4} + \frac{\bar{i}_x \beta_1^n - \bar{i}_y \alpha_1^n}{2} \right) \bar{e}_y \right) + O(\bar{e}^2), \quad (32)$$

$$\frac{d\bar{e}_y}{dt} = \sqrt{\frac{\bar{p}}{\mu}} \left( \beta_1^c - \frac{\alpha_1^r}{2} + \left( \alpha_0^r - \frac{\beta_2^c}{4} + \frac{\bar{i}_x \beta_1^n - \bar{i}_y \alpha_1^n}{2} \right) \bar{e}_x - \left( \frac{3\alpha_0^c}{2} - \frac{\alpha_2^c}{4} \right) \bar{e}_y \right) + O(\bar{e}^2), \quad (33)$$

$$\frac{d\bar{i}_x}{dt} = \sqrt{\frac{\bar{p}}{\mu}} \frac{1 + \bar{i}_x^2 + \bar{i}_y^2}{8} (2\alpha_1^n - (3\alpha_0^n + \alpha_2^n) \bar{e}_x - \beta_2^n \bar{e}_y) + O(\bar{e}^2), \quad (34)$$

$$\frac{d\bar{i}_y}{dt} = \sqrt{\frac{\bar{p}}{\mu}} \frac{1 + \bar{i}_x^2 + \bar{i}_y^2}{8} (2\beta_1^n - \beta_2^n \bar{e}_x - (3\alpha_0^n - \alpha_2^n) \bar{e}_y) + O(\bar{e}^2). \quad (35)$$

Для дальнейших рассуждений перейдём к безразмерным единицам. За единицу расстояния возьмём средний радиус небесного тела  $R$ , а за единицу времени — период круговой орбиты радиуса  $R$ , делённый на  $2\pi$ . В таком случае единицей скорости будет скорость КА на такой круговой орбите, единицей ускорения будет ускорение свободного падения на расстоянии  $R$  от центра тела, а гравитационный параметр небесного тела  $\mu$  будет равен единице.

Зависимость ошибки  $|\Delta \bar{\mathbf{x}}|$  решения уравнений (16)–(18) от ошибки  $|\Delta \frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt}|$  вычисления их правых частей может быть приближена следующим соотношением:

$$|\Delta \bar{\mathbf{x}}| \approx \left| \Delta \frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} \right| (t - t_0),$$

где  $t_0$  — начальный момент времени. Таким образом, если необходимо определить значения модифицированных равноденственных элементов с точностью

$|\Delta \bar{\mathbf{x}}| \approx 10^{-3}$ , что обычно является достаточной точностью при анализе перелётов КА, на промежутках времени до нескольких сотен витков ( $t - t_0 = 2\pi \cdot 160 \approx 10^3$ ), достаточно вычислять правые части усреднённых уравнений движения с точностью порядка  $10^{-6}$ . Этот факт позволяет упростить уравнения усреднённой системы в случаях малости эксцентриситета и реактивного ускорения (а значит, и коэффициентов тригонометрического ряда (11)). Далее рассмотрены два случая характерных величин  $e$  и  $|\mathbf{c}|$ , в одном из которых система (16)–(18) имеет решение в квадратурах, а в другом – в конечном виде.

Для начала рассмотрим случай, когда  $\bar{e} \leq 10^{-2}$ ,  $|\mathbf{a}| \leq 10^{-3}$ . Исходя из принципа, описанного выше, можно отбросить слагаемые порядка  $O(\bar{e}^2)$  из правых частей уравнений (31)–(35) ввиду того, что их величина по порядку меньше, чем  $10^{-6}$ . В результате получим уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{p}}{dt} &= \bar{p} \sqrt{\frac{\bar{p}}{\mu}} (2\alpha_0^c - 2\alpha_1^c \bar{e}_x - 2\beta_1^c \bar{e}_y), \\ \frac{d\bar{e}_x}{dt} &= \sqrt{\frac{\bar{p}}{\mu}} \left( \alpha_1^c + \frac{\beta_1^r}{2} - \left( \frac{3\alpha_0^c}{2} + \frac{\alpha_2^c}{4} \right) \bar{e}_x - \left( \alpha_0^r + \frac{\beta_2^c}{4} + \frac{\bar{i}_x \beta_1^n - \bar{i}_y \alpha_1^n}{2} \right) \bar{e}_y \right), \\ \frac{d\bar{e}_y}{dt} &= \sqrt{\frac{\bar{p}}{\mu}} \left( \beta_1^c - \frac{\alpha_1^r}{2} + \left( \alpha_0^r - \frac{\beta_2^c}{4} + \frac{\bar{i}_x \beta_1^n - \bar{i}_y \alpha_1^n}{2} \right) \bar{e}_x - \left( \frac{3\alpha_0^c}{2} - \frac{\alpha_2^c}{4} \right) \bar{e}_y \right), \\ \frac{d\bar{i}_x}{dt} &= \sqrt{\frac{\bar{p}}{\mu}} \frac{1 + \bar{i}_x^2 + \bar{i}_y^2}{8} (2\alpha_1^n - (3\alpha_0^n + \alpha_2^n) \bar{e}_x - \beta_2^n \bar{e}_y), \\ \frac{d\bar{i}_y}{dt} &= \sqrt{\frac{\bar{p}}{\mu}} \frac{1 + \bar{i}_x^2 + \bar{i}_y^2}{8} (2\beta_1^n - \beta_2^n \bar{e}_x - (3\alpha_0^n - \alpha_2^n) \bar{e}_y). \end{aligned}$$

Для упрощения уравнений независимую переменную  $t$  заменим на новую независимую переменную  $\tau$ , определяемую уравнением

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{\frac{\bar{p}}{\mu}} \quad (36)$$

с начальным условием  $\tau|_{t=t_0} = \tau_0 = 0$ . Производная по  $\tau$  обозначается как

$d\mathcal{K}/d\tau \equiv \mathcal{K}'$ . Таким образом, система преобразуется к виду

$$\bar{p}' = 2\bar{p}(\alpha_0^c - \bar{e}_x\alpha_1^c - \bar{e}_y\beta_1^c), \quad (37)$$

$$\bar{e}'_x = \left(-\frac{3\alpha_0^c}{2} - \frac{\alpha_2^c}{4}\right)\bar{e}_x + \left(-\alpha_0^r - \frac{\beta_2^c}{4} - \frac{\bar{i}_x\beta_1^n - \bar{i}_y\alpha_1^n}{2}\right)\bar{e}_y + \frac{\beta_1^r}{2} + \alpha_1^c, \quad (38)$$

$$\bar{e}'_y = \left(\alpha_0^r - \frac{\beta_2^c}{4} - \frac{\bar{i}_y\alpha_1^n - \bar{i}_x\beta_1^n}{2}\right)\bar{e}_x + \left(-\frac{3}{2}\alpha_0^c + \frac{\alpha_2^c}{4}\right)\bar{e}_y + \beta_1^c - \frac{\alpha_1^r}{2}, \quad (39)$$

$$\bar{i}'_x = \frac{1 + \bar{i}_x^2 + \bar{i}_y^2}{8} (2\alpha_1^n - (3\alpha_0^n + \alpha_2^n)\bar{e}_x - \bar{e}_y\beta_2^n), \quad (40)$$

$$\bar{i}'_y = \frac{1 + \bar{i}_x^2 + \bar{i}_y^2}{8} (2\beta_1^n - (3\alpha_0^n - \alpha_2^n)\bar{e}_y - \bar{e}_x\beta_2^n). \quad (41)$$

Во-первых, заметим, что

$$\begin{aligned} & (\bar{i}_x\beta_1^n - \bar{i}_y\alpha_1^n)' = \\ & = \frac{1 + \bar{i}_x^2 + \bar{i}_y^2}{8} ((\alpha_1^n\beta_2^n - (\alpha_2^n - 3\alpha_0^n)\beta_1^n)\bar{e}_x + ((3\alpha_0^n - \alpha_2^n)\alpha_1^n - \beta_1^n\beta_2^n)\bar{e}_y) = O(\bar{e}^2), \end{aligned}$$

из чего следует

$$\bar{i}_x(\tau)\beta_1^n - \bar{i}_y(\tau)\alpha_1^n = \bar{i}_x(0)\beta_1^n - \bar{i}_y(0)\alpha_1^n + O(\bar{e}) = K + O(\bar{e}).$$

Подставляя это выражение в (38)–(39) и отбрасывая слагаемые порядка  $O(\bar{e}^2)$ , а затем записав эти два уравнения в векторной форме, получим уравнение

$$\mathbf{e}' = \mathbf{N}\mathbf{e} + \mathbf{n},$$

где

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} \bar{e}_x \\ \bar{e}_y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} -\frac{3\alpha_0^c}{2} - \frac{\alpha_2^c}{4} & -\alpha_0^r - \frac{\beta_2^c}{4} - \frac{K}{2} \\ \alpha_0^r - \frac{\beta_2^c}{4} + \frac{K}{2} & -\frac{3\alpha_0^c}{2} + \frac{\alpha_2^c}{4} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} \frac{\beta_1^r}{2} + \alpha_1^c \\ \beta_1^c - \frac{\alpha_1^r}{2} \end{pmatrix}.$$

Если  $\det N \neq 0$ , то решение этой системы имеет вид

$$\mathbf{e}(\tau) = \exp(N(\tau - \tau_0))\mathbf{e}(\tau_0) + N^{-1}(\exp(N(\tau - \tau_0)) - \mathbf{I})\mathbf{n},$$

где  $\mathbf{I}$  — единичная матрица. В случае  $\det N = 0$  решение также легко получить.

Зная выражения для  $\bar{e}_x(\tau)$  и  $\bar{e}_y(\tau)$ , решение уравнения (37) может быть получено в квадратурах:

$$\begin{aligned} \bar{p}(\tau) &= \bar{p}(\tau_0) \exp \left( 2 \int_{\tau_0}^{\tau} (\alpha_0^c - \alpha_1^c \bar{e}_x(s) - \beta_1^c \bar{e}_y(s)) ds \right) = \\ &= \bar{p}(\tau_0) \exp \left( 2\alpha_0^c(\tau - \tau_0) - 2 \begin{pmatrix} \alpha_1^c \\ \beta_1^c \end{pmatrix}^T \int_{\tau_0}^{\tau} \mathbf{e}(s) ds \right). \end{aligned}$$

Дифференциальное уравнение для  $\tau$  принимает вид

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{\frac{\bar{p}(\tau_0)}{\mu}} \exp \left( \alpha_0^c(\tau - \tau_0) - \begin{pmatrix} \alpha_1^c \\ \beta_1^c \end{pmatrix}^T \int_{\tau_0}^{\tau} \mathbf{e}(s) ds \right),$$

из которого можно найти зависимость  $t$  от  $\tau$ , выраженную в квадратурах

$$t(\tau) = t(\tau_0) + \sqrt{\frac{\mu}{\bar{p}(\tau_0)}} \int_{\tau_0}^{\tau} \exp \left( -\alpha_0^c s + \begin{pmatrix} \alpha_1^c \\ \beta_1^c \end{pmatrix}^T \int_{\tau_0}^s \mathbf{e}(q) dq \right) ds.$$

Решения для (40)–(41) получим с использованием метода малого параметра. Сначала  $\bar{e}_x$ ,  $\bar{e}_y$ ,  $\bar{i}_x$  и  $\bar{i}_y$  представим в виде полиномиальных функций формального малого параметра  $\varepsilon = 10^{-2}$ :

$$\begin{aligned} \bar{e}_x(\tau) &= \varepsilon \tilde{e}_x(\tau) + o(\varepsilon), \\ \bar{e}_y(\tau) &= \varepsilon \tilde{e}_y(\tau) + o(\varepsilon), \\ \bar{i}_x(\tau) &= a_0(\tau) + \varepsilon a_1(\tau) + o(\varepsilon), \\ \bar{i}_y(\tau) &= b_0(\tau) + \varepsilon b_1(\tau) + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

После подстановки этих выражений в уравнения (40)–(41) и разделения членов разного порядка по  $\varepsilon$  имеем

$$a'_0 = \alpha_1^n \frac{1 + a_0^2 + b_0^2}{4}, \quad (42)$$

$$b'_0 = \beta_1^n \frac{1 + a_0^2 + b_0^2}{4}, \quad (43)$$

$$a'_1 = \alpha_1^n \frac{a_0 a_1 + b_0 b_1}{2} + \Phi_a \frac{1 + a_0^2 + b_0^2}{8}, \quad (44)$$

$$b'_1 = \beta_1^n \frac{a_0 a_1 + b_0 b_1}{2} + \Phi_b \frac{1 + a_0^2 + b_0^2}{8}, \quad (45)$$

где  $\Phi_a = -3\tilde{e}_x \alpha_0^n - \tilde{e}_x \alpha_2^n - \tilde{e}_y \beta_2^n$ ,  $\Phi_b = -3\tilde{e}_y \alpha_0^n + \tilde{e}_y \alpha_2^n - \tilde{e}_x \beta_2^n$ . Уравнения (42)–(43) отделяются, и их решение выглядит как

$$a_0(\tau) = \frac{1}{\rho_0^2 - K_0^2} \left( \alpha_1^n \rho \tan \left( \gamma_0 + \frac{\rho_0}{4} \Delta \tau \right) + \beta_1^n K_0 \right),$$

$$b_0(\tau) = \frac{1}{\rho_0^2 - K_0^2} \left( \beta_1^n \rho \tan \left( \gamma_0 + \frac{\rho_0}{4} \Delta \tau \right) - \alpha_1^n K_0 \right),$$

где

$$K_0 = \beta_1^n a_0(\tau_0) - \alpha_1^n b_0(\tau_0),$$

$$\rho_0 = \sqrt{(\alpha_1^n)^2 + (\beta_1^n)^2 + K_0^2},$$

$$\gamma_0 = \arctg \left( \frac{\alpha_1^n a_0(\tau_0) + \beta_1^n b_0(\tau_0)}{\rho_0} \right).$$

Затем введем новую функцию  $K_1(\tau) = \beta_1^n a_1(\tau) - \alpha_1^n b_1(\tau)$ . Ее производная равна

$$K'_1 = \frac{1 + a_0^2 + b_0^2}{8} (\beta_1^n \Phi_a - \alpha_1^n \Phi_b) = \frac{1}{\cos^2 \left( \gamma_0 + \frac{\rho_0}{4} \Delta \tau \right)} \frac{\rho_0^2 (\beta_1^n \Phi_a - \alpha_1^n \Phi_b)}{8 (\rho_0^2 - K_0^2)}.$$

Решение этого уравнения есть

$$K_1(\tau) = K_1(\tau_0) + \frac{\rho_0^2}{8 (\rho_0^2 - K_0^2)} \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{\beta_1^n \Phi_a(\tau) - \alpha_1^n \Phi_b(\tau)}{\cos^2 \left( \gamma_0 + \frac{\rho_0}{4} (\tau - \tau_0) \right)} d\tau.$$

Теперь мы можем разделить уравнения (44)–(45) и решать их независимо. Урав-

нение для  $a_1(\tau)$  имеет вид

$$a'_1 = \frac{\rho_0}{2} \tan \left( \gamma_0 + \frac{\rho_0}{4} \Delta \tau \right) a_1 + \frac{\Phi_a \rho_0^2 + 4 \cos^2 \left( \gamma_0 + \frac{\rho_0}{4} \Delta \tau \right) \left( \alpha_1^n K_0 - \beta_1^n \rho_0 \tan \left( \gamma_0 + \frac{\rho_0}{4} \Delta \tau \right) \right) K_1}{8 (\rho_0^2 - K_0^2) \cos^2 \left( \gamma_0 + \frac{\rho_0}{4} \Delta \tau \right)}.$$

Поскольку это неоднородное линейное обыкновенное дифференциальное уравнение, его решение может быть получено методом вариации постоянной. Сначала решим однородное уравнение

$$\tilde{a}'_1 = \frac{\rho_0}{2} \tan \left( \gamma_0 + \frac{\rho_0}{4} \Delta \tau \right) \tilde{a}_1.$$

Его общее решение имеет вид

$$\tilde{a}_1(\tau) = \frac{C_a \cos^2 \gamma_0}{\cos^2 \left( \gamma_0 + \frac{\rho_0}{4} \Delta \tau \right)}.$$

Теперь предположим, что  $C_a$  является функцией  $\tau$ . Следовательно, имеем

$$C'_a = \frac{\Phi_a \rho_0^2 + 4 \cos^2 \left( \gamma_0 + \frac{\rho_0}{4} \Delta \tau \right) \left( \alpha_1^n K_0 - \beta_1^n \rho_0 \tan \left( \gamma_0 + \frac{\rho_0}{4} \Delta \tau \right) \right) K_1(\tau)}{8 (\rho_0^2 - K_0^2) \cos^2 \gamma_0}.$$

Полагая  $C_a(\tau_0) = a_1(\tau_0)$ , получим решение в виде

$$C_a(\tau) = a_1(\tau_0) + \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{\Phi_a(\tau) \rho_0^2 + 4 \cos^2 \left( \gamma_0 + \frac{\rho_0}{4} \Delta \tau \right) \left( \alpha_1^n K_0 - \beta_1^n \rho_0 \tan \left( \gamma_0 + \frac{\rho_0}{4} \Delta \tau \right) \right) K_1(\tau)}{8 (\rho_0^2 - K_0^2) \cos^2 \gamma_0} d\tau.$$

Таким образом, частное решение для  $a_1(\tau)$  есть

$$a_1(\tau) = \frac{C_a(\tau) \cos^2 \gamma_0}{\cos^2 \left( \gamma_0 + \frac{\rho_0}{4} \Delta \tau \right)}.$$

Решение для  $b_1(\tau)$  имеет вид

$$b_1(\tau) = \frac{\beta_1^n a_1(\tau) - K_1(\tau)}{\alpha_1^n}.$$

Итак, в случае, когда из уравнений (31)–(35) отбрасываются слагаемые порядка  $O(\bar{e}^2)$ , полученная система решается в квадратурах. Если же из усреднённой системы отбросить и слагаемые порядка  $O(\bar{e})$  (что соответствует случаям  $\bar{e} \leq 10^{-3}$ ,  $|\mathbf{a}| \leq 10^{-4}$ ), а также перейти к независимой переменной  $\tau$ , уравнения упрощаются до

$$\bar{p}' = 2\bar{p} \alpha_0^c, \quad (46)$$

$$\bar{e}_x' = \frac{\beta_1^r}{2} + \alpha_1^c, \quad (47)$$

$$\bar{e}_y' = \beta_1^c - \frac{\alpha_1^r}{2}, \quad (48)$$

$$\bar{i}_x' = \frac{1 + \bar{i}_x^2 + \bar{i}_y^2}{4} \alpha_1^n, \quad (49)$$

$$\bar{i}_y' = \frac{1 + \bar{i}_x^2 + \bar{i}_y^2}{4} \beta_1^n, \quad (50)$$

Заметим, что уравнения (46)–(48) отделяются от системы и могут быть решены в явном виде:

$$\begin{aligned} \bar{p}(\tau) &= \bar{p}(\tau_0) \exp(2\alpha_0^c(\tau - \tau_0)), \\ \bar{e}_x(\tau) &= \bar{e}_x(\tau_0) + \left( \frac{\beta_1^r}{2} + \alpha_1^c \right) (\tau - \tau_0), \\ \bar{e}_y(\tau) &= \bar{e}_y(\tau_0) + \left( \beta_1^c - \frac{\alpha_1^r}{2} \right) (\tau - \tau_0). \end{aligned} \quad (51)$$

В свою очередь, уравнения (49)–(50) аналогичны (42)–(43), и их решения имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{i}_x(\tau) &= \frac{1}{(\alpha_1^n)^2 + (\beta_1^n)^2} \left( \alpha_1^n \rho \operatorname{tg} \left( \gamma + \frac{\rho}{4}(\tau - \tau_0) \right) + \beta_1^n K \right), \\ \bar{i}_y(\tau) &= \frac{1}{(\alpha_1^n)^2 + (\beta_1^n)^2} \left( \beta_1^n \rho \operatorname{tg} \left( \gamma + \frac{\rho}{4}(\tau - \tau_0) \right) - \alpha_1^n K \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} K &= \beta_1^n \bar{i}_x(\tau_0) - \alpha_1^n \bar{i}_y(\tau_0), \\ \rho &= \sqrt{(\alpha_1^n)^2 + (\beta_1^n)^2 + K^2}, \\ \gamma &= \arctg \left( \frac{\alpha_1^n \bar{i}_x(\tau_0) + \beta_1^n \bar{i}_y(\tau_0)}{\rho} \right). \end{aligned}$$

Если  $\alpha_1^n = \beta_1^n = 0$ , значения  $\bar{i}_x$  и  $\bar{i}_y$  будут постоянными. И, наконец, решение уравнения на  $\tau$  получаем из (36) и (51):

$$\tau(t) = \begin{cases} \tau(t_0) - \frac{1}{\alpha_0^c} \ln \left( 1 - \alpha_0^c \sqrt{\frac{\bar{p}(t_0)}{\mu}} (t - t_0) \right), & \alpha_0^c \neq 0; \\ \tau(t_0) + \sqrt{\frac{\bar{p}(t_0)}{\mu}} (t - t_0), & \alpha_0^c = 0. \end{cases}$$

Как видим, это приближение усреднённых уравнений движения имеет решение в явном виде, что позволяет найти значения модифицированных равноденственных элементов орбиты без использования численного интегрирования.

## Выводы по Главе 1

В первой главе разработана модель усреднённого орбитального движения КА с малой тягой на основе уравнений Гаусса в модифицированных равноденственных элементах. Показано, что при малости реактивного ускорения по сравнению с ускорением за счёт притяжения центрального тела система допускает разделение на медленные и быструю переменные. Ключевой результат состоит в обнаружении того факта, что при строго периодическом по эксцентрисической долготе реактивном ускорении в усреднённой динамике сохраняются только постоянная его составляющая и первые две гармоники ( $k = 0, 1, 2$ ), что сводит задачу управления к поиску 15 коэффициентов Фурье разложения реактивного ускорения по эксцентрисической долготе.

Модель расширена на возмущения от полярного сжатия Земли и выключения ЭРДУ в тени. Для тени предложен эффективный метод нахождения моментов входа/выхода через решение полинома четвёртой степени, позволяющий

вычислять коэффициенты Фурье без затратного интегрирования на каждом витке. Построение различных перелётов на интервале до года показало, что относительная погрешность модели усреднённого движения не превышает 1% по всем элементам.

Для случая малых эксцентриситетов ( $e \leq 0.01$  и  $e \leq 0.001$ ) получены приближённые решения системы усреднённых уравнений в квадратурах и элементарных функциях соответственно. Это делает модель вычислительно эффективной для задач проектирования многовитковых перелётов с малой тягой по важным на практике околокруговым орбитам.

## Глава 2. Методика поиска квазиоптимального управления при межорбитальных перелётах с малой тягой

### 1. Задача оптимального управления

Вторая глава посвящена разработке методики построения квазиоптимальных многовитковых траекторий КА с малой тягой. Рассматривая орбитальное движение КА как управляемую динамическую систему, где управлением выступает реактивное ускорение/тяга, воспользуемся терминологией теории задач оптимального управления. В рамках диссертации задача поиска оптимального управления ставится следующим образом: требуется найти функцию управления  $\mathbf{u}_{opt}(t)$ , которая

- лежит в множестве доступных управлений:  $\mathbf{u}_{opt}(t) \in U$ ,
- доставляет минимум функционалу  $J(\mathbf{u}(t))$ :  $J(\mathbf{u}_{opt}(t)) = \min_{\mathbf{u}(t) \in U} J(\mathbf{u}(t))$ ,
- удовлетворяет ограничениям на реализуемую траекторию:  $\mathbf{g}(\mathbf{u}_{opt}(t)) = 0$ .

Рассмотрим множества доступных управлений, оптимизируемые функционалы и ограничения на траекторию, встречающиеся на практике. Множество доступных управлений определяется принципами работы ДУ, реализующей управляющее воздействие на движение КА. При баллистическом анализе работа ДУ аппроксимируется математическими моделями, определяющими упрощённое поведение механизмов двигателя. В рамках диссертации рассматриваются две распространённые математические модели работы ДУ. Первая

модель – двигатель с идеально-регулируемой тягой (ИРТ). В данной модели тяга  $P(t)$  и скорость истечения рабочего тела  $v_{ex}(t)$  ДУ не ограничены сверху; однако на них накладывается ограничение в виде максимального значения механической мощности:

$$N(t) = \frac{v_{ex}(t)P(t)}{2} \leq N_{max} \forall t.$$

Вторая модель – двигатель с ограниченной тягой ( $P(t) \leq P_{max} \forall t$ ) и фиксированной скоростью истечения ( $v_{ex} = \text{const}$ ). Эта модель более приближена к реальной работе ДУ.

В свою очередь, выбор оптимизируемого функционала определяется целями баллистического анализа. Траектория КА может исследоваться с точки зрения затраченного времени ( $J_T = T$ , где  $T$  – время перелёта), массы затраченного рабочего тела ( $J_m = m(0) - m(T)$ , т.е. функционал равен разнице между массой КА в начале и в конце траектории), накопленной космической радиации и др. В диссертации рассматриваются функционалы  $J_m$  и  $J_T$ .

Что касается ограничений на траекторию, обычно они накладываются в виде ограничений типа «равенство» на конец траектории КА, а их конкретный вид зависит от целей перелёта. К классическим задачам перелёта можно отнести

- задачу встречи:  $\mathbf{g} = (\mathbf{x}(T), F(T)) - (\mathbf{x}_t, F_t)$ ,
- задачу пролёта:  $\mathbf{g} = \mathbf{r}(T) - \mathbf{r}_t$ ,
- задачу выхода на орбиту:  $\mathbf{g} = \mathbf{x}(T) - \mathbf{x}_t$ ,

где  $\mathbf{x}(T), F(T), \mathbf{r}(T)$  – значения орбитальных элементов, эксцентрической долготы и радиус-вектора соответственно в конце траектории, реализованной искомым управлением, а  $\mathbf{x}_t, F_t, \mathbf{r}_t$  – соответствующие целевые значения.

## 2. Переход к модели усреднённой динамики

Как было показано в главе 1, при движении КА с двигателем малой тяги в случае, когда реактивное ускорение является периодическим на витке мгновенной орбиты, влияние реактивного ускорения на усреднённую динамику определяется лишь несколькими первыми гармониками разложения реактивного ускорения в тригонометрический ряд по эксцентрической долготе  $F$ . Данное свойство можно использовать при поиске оптимальных многовитковых траекторий перелётов между кеплеровыми орбитами. Для этого будем считать, что изменение мгновенной орбиты КА описывается моделью усреднённой динамики, определяемой уравнением (15), а искомое оптимальное управление представлено функцией реактивного ускорения

$$\mathbf{a}_{opt}(F) = \boldsymbol{\alpha}_0^{opt} + \sum_{k=1}^2 (\boldsymbol{\alpha}_k^{opt} \cos kF + \boldsymbol{\beta}_k^{opt} \sin kF) = \mathbf{a}(\mathbf{c}_{opt}, F), \quad (52)$$

где  $\mathbf{c}$  – вектор, стоящий в правой части (15). Гармоники высших порядков отбрасываются, так как они не влияют на усреднённую динамику и при этом осложняют управление угловым движением КА.

Что же это даёт? Теперь, когда управление параметризовано конечным набором скалярных параметров, а именно компонентами вектора  $\mathbf{c}$ , решать задачу поиска оптимального управления можно, воспользовавшись методами параметрической (прямой) оптимизации, а именно сведя исходную задачу к задаче нелинейного программирования: теперь требуется найти конечномерный вектор  $\mathbf{c}_{opt} \in \mathbb{R}^{15}$  такой, чтобы

- реализуемое управляющее реактивное ускорение  $\mathbf{a}(\mathbf{c}_{opt}, F)$  лежало в множестве доступных реактивных ускорений  $A$ , определённом заданной математической моделью ДУ;
- заданный усреднённый функционал  $\bar{J}(\mathbf{c})$  на векторе  $\mathbf{c}_{opt}$  достигал минимума:  $\bar{J}(\mathbf{c}_{opt}) = \min_{\mathbf{a}(\mathbf{c}, F) \in A} \bar{J}(\mathbf{c})$ ;
- выполнялись заданные ограничения на реализуемую траекторию КА в

усреднённой модели:  $\mathbf{g}(\mathbf{c}_{opt}) = 0$ .

В качестве ограничений на траекторию КА в диссертации берутся ограничения

$$\mathbf{g}(\mathbf{c}) = \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{c}, T) - \mathbf{x}_t, \quad (53)$$

задачи выхода на орбиту в модели усреднённой динамики, где  $\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{c}, T)$  – решение дифференциального уравнения (15) с вектором  $\mathbf{c}$  в правой части и начальным условием  $\bar{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}_0$ . Выбор таких ограничений обусловлен тем, что модель усреднённой динамики не даёт информации о положении КА на мгновенной орбите.

Приведение исходной задачи к вышеописанной формулировке зависит от конкретных математической модели ДУ и функционала. В рамках диссертации рассматриваются две практически важные задачи: задача оптимизации затрат рабочего тела в модели двигателя с ИРТ и задача быстродействия в модели двигателя ограниченной тяги.

## 2.1. Задача оптимизации затрат рабочего тела в модели двигателя с идеально регулируемой тягой

Эта задача в неусреднённой постановке характеризуется функционалом  $J_m = m(0) - m(T)$ . При решении задачи время перелёта  $T$ , орбитальные элементы начальной орбиты  $\mathbf{x}_0$  и целевой орбиты  $\mathbf{x}_t$  считаются известными и заданными. Характерным свойством этой задачи является возможность переписать минимизируемый функционал в терминах реактивного ускорения. Из дифференциального уравнения на массу КА

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{P}{v_{ex}}$$

получим, что

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{m} \right) = -\frac{dm}{dt} \frac{1}{m^2} = \frac{P}{m^2 v_{ex}} = \frac{a^2}{2} \frac{2}{v_{ex} P} = \frac{a^2}{2N},$$

так как  $P = m \cdot a$ . После интегрирования правой и левой части равенства получаем

$$\frac{1}{m(T)} - \frac{1}{m(0)} = \frac{1}{2} \int_0^T \frac{a^2(t)}{N(t)} dt. \quad (54)$$

Так как рассматриваемая задача описывается функционалом  $J_m = m(0) - m(T)$ , в котором начальная масса КА  $m(0)$  фиксирована, его минимизация эквивалентна минимизации величины  $1/m(T)$  в выражении (54), а значит, и минимизации интеграла в его правой части. Для его минимальности значение механической мощности, находящейся в знаменателе подынтегрального выражения, очевидно, должно быть максимальным и равным  $N_{max}$ . Таким образом, минимизация затрат рабочего тела в модели двигателя с ИРТ эквивалентна минимизации функционала

$$J_E = \frac{1}{2} \int_0^T a^2(t) dt. \quad (55)$$

Для перехода к модели усреднённой динамики определим усреднённый функционал  $\bar{J}_E$ . Сделаем это, введя функцию времени

$$J_t(t) = \frac{1}{2} \int_0^t a^2(s) ds. \quad (56)$$

Определим функцию  $\bar{J}_t$  так же, как были определены усреднённые орбитальные элементы, т.е. как решение дифференциального уравнения

$$\frac{d\bar{J}_t}{dt} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dJ_t}{dt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dJ_t}{dt} (1 - \bar{e}_x \cos \tilde{F} - \bar{e}_y \sin \tilde{F}) d\tilde{F} \quad (57)$$

с начальным условием  $\bar{J}_t(0) = 0$ . Переход от предела к интегралу в (57) справедлив в силу тех же рассуждений, которыми обоснован вывод системы усреднённых уравнений (15) в главе 1. Таким образом, функционал  $\bar{J}_E = \bar{J}_t(T)$ , равный значению функции  $\bar{J}_t$  в момент времени  $T$ , будет аппроксимировать значение функционала (55) с той же точностью, с которой  $\bar{\mathbf{x}}(T)$  приближают  $\mathbf{x}(T)$ . Из (56) производная функционала  $J_t$  по времени равна  $a^2(t)$ . Наконец, в

силу нашего предположения об искомом управляющем реактивном ускорении (52) получаем

$$\frac{d\bar{J}_t}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|\mathbf{a}|^2(\mathbf{c}, \tilde{F})(1 - \bar{e}_x \cos \tilde{F} - \bar{e}_y \sin \tilde{F})}{2} d\tilde{F} = k_0(\mathbf{c}) + \bar{e}_x k_x(\mathbf{c}) + \bar{e}_y k_y(\mathbf{c}),$$

где

$$\begin{aligned} k_0(\mathbf{c}) &= \frac{1}{4}(|\mathbf{c}|^2 + |\boldsymbol{\alpha}_0|^2), \\ k_x(\mathbf{c}) &= -\frac{1}{4}(2\boldsymbol{\alpha}_0 \cdot \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\beta}_1 \cdot \boldsymbol{\beta}_2), \\ k_y(\mathbf{c}) &= -\frac{1}{4}(2\boldsymbol{\alpha}_0 \cdot \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{\beta}_2 - \boldsymbol{\beta}_1 \cdot \boldsymbol{\alpha}_2). \end{aligned}$$

Таким образом, в задаче нелинейного программирования, к которой сводится задача оптимизации затрат топлива в модели двигателя с ИРТ, минимизируется функционал

$$\bar{J}_E(\mathbf{c}) = \int_0^T (k_0(\mathbf{c}) + \bar{e}_x k_x(\mathbf{c}) + \bar{e}_y k_y(\mathbf{c})) dt. \quad (58)$$

Теперь, когда усреднённый функционал  $\bar{J}_E(\mathbf{c})$  и функция ограничений  $\mathbf{g}(\mathbf{c})$  определены выражениями (58) и (53) соответственно, задача нелинейного программирования может быть решена классическими методами. Дополнительные ограничения на управляющее ускорение в данном случае не нужны, так как любые значения компонент вектора  $\mathbf{c}$  определяют функцию реактивного ускорения, удовлетворяющую ИРТ-модели.

Практическая значимость этой задачи обусловлена тем фактом, что её решение даёт оценку снизу на затраты рабочего тела для более реалистичных моделей ДУ [53], что полезно при предварительном баллистическом анализе миссии.

## 2.2. Задача быстрогодействия в модели двигателя с ограниченной тягой и фиксированной скоростью истечения

Перейдём к рассмотрению второй задачи. Она характеризуется функционалом  $J_T = T$ , причём время перелёта  $T$  уже не является известным и заданным, как в предыдущей задаче, а становится искомой величиной наряду с параметрами управления. Фиксированными остаются величины  $\mathbf{x}_0$  и  $\mathbf{x}_t$ .

Перед сведением к задаче нелинейного программирования обратим внимание на тот факт, что при рассмотрении более общего класса кусочно-непрерывных функций управления для этой задачи известно необходимое условие оптимальности [41]: оптимальная функция реактивной тяги должна быть равна по модулю своему максимальному допустимому значению, т.е.

$$|\mathbf{P}_{opt}(t)| = P_{\max}. \quad (59)$$

Учтём это необходимое условие при решении задачи в усреднённой модели. Для этого изменим наше предположение об искомом оптимальном управлении: пусть теперь оно будет представлено функцией не реактивного ускорения, а реактивной тяги

$$\mathbf{P}_{opt}(F) = \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_0^{opt} + \sum_{k=1}^2 \left( \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_k^{opt} \cos kF + \tilde{\boldsymbol{\beta}}_k^{opt} \sin kF \right) = \mathbf{P}(\tilde{\mathbf{c}}_{opt}, F), \quad (60)$$

где вектор  $\tilde{\mathbf{c}}$  составлен из компонент векторов  $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_0$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_k$  и  $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_k$ , как вектор  $\mathbf{c}$  из компонент векторов  $\boldsymbol{\alpha}_0$ ,  $\boldsymbol{\alpha}_k$  и  $\boldsymbol{\beta}_k$ . Таким образом, выполнение условия (59) перестаёт явно зависеть от времени и зависит только от выбора  $\tilde{\mathbf{c}}_{opt}$  и угловой переменной  $F$ . Для его выполнения необходимо и достаточно, чтобы

$$|\mathbf{P}(\tilde{\mathbf{c}}_{opt}, F)| = P_{\max} \quad (61)$$

выполнялось для любого  $F \in [0, 2\pi)$ . Определим связи между компонентами вектора  $\tilde{\mathbf{c}}$ , гарантирующие выполнение необходимого условия оптимальности.

Для этого возведём в квадрат обе части (61) и, подставив в левую часть определение (60), получим

$$G_0(\tilde{\mathbf{c}}) + \sum_{k=1}^4 (G_k(\tilde{\mathbf{c}}) \cos kF + H_k(\tilde{\mathbf{c}}) \sin kF) = P_{\max}^2,$$

где

$$G_0(\tilde{\mathbf{c}}) = \tilde{\alpha}_0^2 + \frac{\tilde{\alpha}_1^2 + \tilde{\alpha}_2^2 + \tilde{\beta}_1^2 + \tilde{\beta}_2^2}{2}, \quad (62)$$

$$G_1(\tilde{\mathbf{c}}) = 2\tilde{\alpha}_0 \cdot \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_1 \cdot \tilde{\alpha}_2 + \tilde{\beta}_1 \cdot \tilde{\beta}_2, \quad (63)$$

$$H_1(\tilde{\mathbf{c}}) = 2\tilde{\alpha}_0 \cdot \tilde{\beta}_1 + \tilde{\alpha}_1 \cdot \tilde{\beta}_2 - \tilde{\beta}_1 \cdot \tilde{\alpha}_2, \quad (64)$$

$$G_2(\tilde{\mathbf{c}}) = 2\tilde{\alpha}_0 \cdot \tilde{\alpha}_2 + \frac{\tilde{\alpha}_1^2 - \tilde{\beta}_1^2}{2}, \quad (65)$$

$$H_2(\tilde{\mathbf{c}}) = 2\tilde{\alpha}_0 \cdot \tilde{\beta}_2 + \tilde{\alpha}_1 \cdot \tilde{\beta}_1, \quad (66)$$

$$G_3(\tilde{\mathbf{c}}) = \tilde{\alpha}_1 \cdot \tilde{\alpha}_2 - \tilde{\beta}_1 \cdot \tilde{\beta}_2, \quad (67)$$

$$H_3(\tilde{\mathbf{c}}) = \tilde{\alpha}_1 \cdot \tilde{\beta}_2 + \tilde{\beta}_1 \cdot \tilde{\alpha}_2, \quad (68)$$

$$G_4(\tilde{\mathbf{c}}) = \frac{\tilde{\alpha}_2^2 - \tilde{\beta}_2^2}{2}, \quad (69)$$

$$H_4(\tilde{\mathbf{c}}) = \tilde{\alpha}_2 \cdot \tilde{\beta}_2. \quad (70)$$

Легко увидеть, что в силу линейной независимости тригонометрических функций условие (61) будет выполняться для любого  $F \in [0, 2\pi)$  тогда и только тогда, когда

$$G_0(\tilde{\mathbf{c}}) = P_{\max}^2, \quad (71)$$

$$G_k(\tilde{\mathbf{c}}) = 0, k = 1, 2, 3, 4, \quad (72)$$

$$H_k(\tilde{\mathbf{c}}) = 0, k = 1, 2, 3, 4. \quad (73)$$

Таким образом, необходимое условие оптимальности переписано в терминах параметров управления  $\tilde{\mathbf{c}}$ .

Покажем, как необходимые условия оптимальности (71)–(73) могут быть удовлетворены путём замены переменных. Из (70) и (73) следует, что  $\tilde{\alpha}_2$  и

$\tilde{\beta}_2$  должны быть ортогональны. Пусть эти два вектора определяют локальный базис. Таким образом, первые три параметра  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  будут углами Эйлера с последовательностью 3–1–3, определяющими его ориентацию относительно орбитальной системы координат. Далее из (69) и (72) получаем  $|\tilde{\alpha}_2| = |\tilde{\beta}_2| = \delta$ , где  $\delta > 0$  — четвертый параметр. Таким образом, первый базисный вектор —  $\mathbf{e}_1 = \tilde{\alpha}_2/\delta$ , второй —  $\mathbf{e}_2 = \tilde{\beta}_2/\delta$ , а третий — их векторное произведение  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ .

Пусть  $\tilde{\alpha}_1 = p\mathbf{e}_1 + q\mathbf{e}_2 + r_a\mathbf{e}_3$ . Тогда из (67), (68), (72) и (73) следует, что  $\tilde{\beta}_1 = -q\mathbf{e}_1 + p\mathbf{e}_2 + r_b\mathbf{e}_3$ . Здесь  $p$ ,  $q$ ,  $r_a$  и  $r_b$  — параметры, подлежащие определению. После учета (65), (66), (72) и (73) вектор  $\tilde{\alpha}_0$  становится

$$\tilde{\alpha}_0 = \frac{r_a^2 - r_b^2}{4\delta} \mathbf{e}_1 - \frac{r_a r_b}{2\delta} \mathbf{e}_2 + r_0 \mathbf{e}_3,$$

где  $r_0$  — еще один параметр, подлежащий определению. Подстановка выражений, определяющих  $\tilde{\alpha}_1$  и  $\tilde{\beta}_1$ , в (63) и (64) с учётом (72) и (73) даёт, соответственно,

$$\begin{aligned} -\frac{r_a r_b}{\delta} p - \left( \frac{r_b^2 - r_a^2}{2\delta} - 2\delta \right) q + 2r_0 r_b &= 0, \\ \left( \frac{r_b^2 - r_a^2}{2\delta} + 2\delta \right) p - \frac{r_a r_b}{\delta} q + 2r_0 r_a &= 0. \end{aligned}$$

Эти два уравнения образуют линейную систему относительно  $p$  и  $q$ . Ее решение выглядит следующим образом:

$$p = \frac{4r_0 r_a \delta}{r_a^2 + r_b^2 - 4\delta^2}, \quad q = \frac{4r_0 r_b \delta}{r_a^2 + r_b^2 - 4\delta^2}.$$

Подстановка всех полученных выражений в (62) с учётом (71) даёт

$$\begin{aligned} P_{\max}^2 &= \left( \frac{r_b^2 - r_a^2}{4\delta} \right)^2 + \frac{r_a^2 r_b^2}{4\delta^2} + r_0^2 + \left( \frac{4r_0 r_a \delta}{r_a^2 + r_b^2 - 4\delta^2} \right)^2 + \left( \frac{4r_0 r_b \delta}{r_a^2 + r_b^2 - 4\delta^2} \right)^2 + \\ &+ \frac{r_a^2 + r_b^2}{2} + \delta^2. \end{aligned} \tag{74}$$

Для упрощения (74) введём новую пару значений  $\xi = \sqrt{r_a^2 + r_b^2} \geq 0$  и  $\varphi = \arctg(r_b/r_a) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Тогда (74) можно переписать как

$$\frac{\xi^4}{16\delta^2} + r_0^2 + \frac{16r_0^2\delta^2\xi^2}{(\xi^2 - 4\delta^2)^2} + \frac{\xi^2}{2} + \delta^2 = P_{\max}^2,$$

откуда получаем

$$r_0 = \sigma \frac{\xi^2 - 4\delta^2}{\xi^2 + 4\delta^2} \sqrt{P_{\max}^2 - \frac{(\xi^2 + 4\delta^2)^2}{16\delta^2}},$$

где  $\sigma = \pm 1$  и подкоренное выражение должно быть неотрицательным. Условие неотрицательности подкоренного выражения следующее:

$$(\xi^2 + 4\delta^2)^2 \leq 16\delta^2 P_{\max}^2.$$

Таким образом, когда выбраны вектор  $\mathbf{z} = (\delta, \xi, \varphi, \alpha, \beta, \gamma)^T$  и параметр  $\sigma$ , значения  $\tilde{\alpha}_0$ ,  $\tilde{\alpha}_1$ ,  $\tilde{\beta}_1$ ,  $\tilde{\alpha}_2$  и  $\tilde{\beta}_2$ , определяемые соотношениями

$$\tilde{\alpha}_0 = \xi^2 \frac{\cos 2\varphi}{4\delta} \mathbf{e}_1 - \xi^2 \frac{\sin 2\varphi}{4\delta} \mathbf{e}_2 + r_0 \mathbf{e}_3,$$

$$\tilde{\alpha}_1 = p \mathbf{e}_1 + q \mathbf{e}_2 + \xi \cos \varphi \mathbf{e}_3,$$

$$\tilde{\beta}_1 = -q \mathbf{e}_1 + p \mathbf{e}_2 + \xi \sin \varphi \mathbf{e}_3,$$

$$\tilde{\alpha}_2 = \delta \mathbf{e}_1,$$

$$\tilde{\beta}_2 = \delta \mathbf{e}_2,$$

где

$$r_0 = \sigma \frac{\xi^2 - 4\delta^2}{\xi^2 + 4\delta^2} \sqrt{P_{\max}^2 - \frac{(\xi^2 + 4\delta^2)^2}{16\delta^2}}, \quad (75)$$

$$p = \sigma \frac{\xi \cos \varphi}{\xi^2 + 4\delta^2} \sqrt{16\delta^2 P_{\max}^2 - (\xi^2 + 4\delta^2)^2}, \quad (76)$$

$$q = \sigma \frac{\xi \sin \varphi}{\xi^2 + 4\delta^2} \sqrt{16\delta^2 P_{\max}^2 - (\xi^2 + 4\delta^2)^2}, \quad (77)$$

удовлетворяют условиям (71)–(73), если  $\delta$  и  $\xi$  удовлетворяют условию неотрицательности подкоренного выражения. Отметим, что параметр  $\sigma$  отделён от

остальных параметров, определяющих управление, так как он может принимать лишь одно из двух значений  $+1$  или  $-1$ , в то время как вектор  $\mathbf{z}$  определён в области  $U \times T^4$ , где  $T^4$  – четырёхмерный тор, на котором определены компоненты  $\varphi, \alpha, \beta$  и  $\gamma$ , а

$$U = \{(\delta, \xi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \delta \leq P_{\max}, 0 \leq \xi \leq P_{\max}, 16\delta^2 P_{\max}^2 - (\xi^2 + 4\delta^2)^2 \geq 0\}. \quad (78)$$

Поэтому  $\sigma$  не может быть переменной оптимизации наряду с остальными. При поиске оптимального управления он должен быть вынесен во внешние параметры, что создаёт комбинаторную задачу. Теперь, если считать параметрами оптимизации компоненты вектора  $\mathbf{z}$  и зафиксировать  $\sigma = \pm 1$ , нет необходимости проверять выполнение условия оптимальности (61).

Изменение предположения об искомом управлении требует его учёта в уравнениях модели усреднённого движения. Перепишем неусреднённую систему уравнений движения (7)–(8) в терминах реактивной тяги, дополнив её уравнением для массы КА:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, F) \frac{\mathbf{P}(\tilde{\mathbf{c}}(\mathbf{z}, \sigma), F)}{m}, \quad (79)$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{|\mathbf{P}(\tilde{\mathbf{c}}(\mathbf{z}, \sigma), F)|}{v_{ex}}, \quad (80)$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\sqrt{(1 - e_x^2 - e_y^2)^3} \mu}{\sqrt{p^3}(1 - e_x \cos F - e_y \sin F)} + \mathbf{b}^T(\mathbf{x}, F) \frac{\mathbf{P}(\tilde{\mathbf{c}}(\mathbf{z}, \sigma), F)}{m}. \quad (81)$$

Видно, что масса КА  $m$  является медленной переменной наряду с  $\mathbf{x}$ , поэтому при применении метода усреднения к системе (79)–(81) система уравнений на усреднённые переменные  $\bar{\mathbf{x}}, \bar{m}$  будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} &= \mathbf{M}(\bar{\mathbf{x}}) \tilde{\mathbf{c}}(\mathbf{z}, \sigma) / \bar{m}, \\ \frac{d\bar{m}}{dt} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dm}{dt} dt = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|\mathbf{P}(\tilde{\mathbf{c}}(\mathbf{z}, \sigma), F)|}{v_{ex}} (1 - \bar{e}_x \cos \tilde{F} - \bar{e}_y \sin \tilde{F}) d\tilde{F} = -\frac{P_{\max}}{v_{ex}}. \end{aligned} \quad (82)$$

Последний переход в (82) справедлив, так как каким бы ни был вектор  $\mathbf{z}$  (с оглядкой на неотрицательность подкоренного выражения в (75)–(77)), необходимое условие оптимальности (61) будет выполнено.

Таким образом, в задаче нелинейного программирования, к которой сводится задача быстродействия в модели двигателя с ограниченной тягой и фиксированной скоростью истечения, переменными оптимизации выступают компоненты вектора  $\mathbf{z}$  и время перелёта  $T$ . Минимизируемый функционал  $J_T(\mathbf{z}, T) = T$  не требует усреднения. Функция ограничений  $\mathbf{g}(\mathbf{c}(\mathbf{z}), T)$  определяется соотношением (53). Также в задаче появляется ограничение типа «неравенство»

$$\mathbf{h}(\mathbf{z}, T) = \begin{pmatrix} \delta \\ \xi \\ 16\delta^2 P_{\max}^2 - (\xi^2 + 4\delta^2)^2 \\ T \end{pmatrix} \geq 0, \quad (83)$$

которое отвечает за невырождение формул (75)–(77) и неотрицательность времени перелёта. Как и в случае с задачей оптимизации затрат рабочего тела, далее задача нелинейного программирования решается классическими методами.

Решение этой задачи, как следует из названия, даёт нижнюю оценку для времени перелёта. Также оно служит верхней оценкой затрат рабочего тела для решений задачи оптимизации затрат топлива в модели двигателя с ограниченной тягой при больших временах перелёта.

### 3. Обобщение усреднённой модели на почти периодическое управление

До этого момента рассматривались только строго периодические на витке мгновенной орбиты функции реактивного ускорения или тяги. Однако в более общем случае интересуют именно почти периодические функции управления. Чтобы учесть слабую неперiodичность управления, предлагается следующий подход. Функции реактивного ускорения и тяги при решении вышеописанных

задач продолжают определяться выражениями (52) и (60) соответственно. Однако сами параметры управления (в случае реактивного ускорения это компоненты вектора  $\mathbf{c}$ , а в случае реактивной тяги – компоненты вектора  $\mathbf{z}$ ) перестанут быть константами и станут функциями времени  $\mathbf{c}(t)$  и  $\mathbf{z}(t)$ . Определяемые таким образом функции реактивного ускорения/тяги уже не будут удовлетворять условиям теории метода усреднения в строгом смысле. Однако численное моделирование показывает, что если параметры управления не меняются слишком быстро от витка к витку, полученные решения остаются близкими к траекториям, полученным в результате применения того же управления в неусреднённой модели движения.

Для того чтобы задачу оптимизации можно было свести к задаче нелинейного программирования, зависимость параметров управления от времени должна быть параметризована конечным набором скалярных параметров. Это можно сделать различными способами. В диссертации рассматриваются три подхода к параметризации: кусочно-постоянная, кусочно-линейная и полиномиальная. Формально они определяются выражениями вида

$$\alpha(t) = \alpha_j, T_j \leq t < T_{j+1}, j = 0, \dots, k-1, \quad (84)$$

$$\alpha(t) = \frac{(T_{j+1} - t) \alpha_j + (t - T_j) \alpha_{j+1}}{T_{j+1} - T_j}, T_j \leq t < T_{j+1}, j = 0, \dots, k-2, \quad (85)$$

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{t}{T} + \dots + \alpha_{k-1} \left( \frac{t}{T} \right)^{k-1} \quad (86)$$

соответственно, где  $\alpha(t)$  обозначает компоненту вектора  $\mathbf{c}$  в случае решения задачи оптимизации затрат топлива или вектора  $\mathbf{z}$  в случае решения задачи быстрогодействия,  $T_j = jT/k$  для кусочно-постоянной параметризации (84),  $T_j = jT/(k-1)$  для кусочно-линейной параметризации (85). Параметр  $k \geq 2$  будем в дальнейшем называть порядком параметризации. Переход к почти периодическому управлению увеличивает размерность задачи: в случае, когда управление определяется вектором  $\mathbf{c}$ , число переменных равно  $15k$ , а в случае пары  $\mathbf{z}, T - 6k + 1$ .

В задаче быстрогодействия, при переходе к почти периодическому управлению меняется не только количество переменных оптимизации, но и набор ограничений, а именно (83). Так как теперь компоненты вектора  $\mathbf{z}$  меняются во времени, необходимо наложить такие ограничения, которые будут эквивалентны выполнению ограничений (83) для любого  $0 \leq t \leq T$ . Для случая кусочно-постоянной параметризации достаточно наложить ограничение (83) на каждый вектор  $\mathbf{z}_j$ , составленный из величин  $\alpha_j$  в определении (84). В случае кусочно-линейной параметризации такой подход также оправдан. Дело в том, что множество определения вектора  $\mathbf{z}$  является прямым произведением четырёхмерного тора на множество (78), которое является связным и выпуклым. Поэтому для любых двух векторов  $\mathbf{z}_j, \mathbf{z}_{j+1}$ , удовлетворяющих условию (83), вектор  $\mathbf{z} = l\mathbf{z}_j + (1-l)\mathbf{z}_{j+1}, l \in [0, 1]$ , также будет удовлетворять условию (83). В то же время для случая полиномиальной параметризации простого и элегантного способа записать ограничения на векторы  $\mathbf{z}_j$  найти не удалось, поэтому при решении задачи быстрогодействия данный вид параметризации не рассматривается.

Что касается параметра  $\sigma$ , его оптимизация в случае почти периодического управления в рамках диссертации также не рассматривается. Из-за его дискретной природы параметризация зависимости  $\sigma(t)$  набором независимых величин  $\sigma_j = \pm 1$  приводит к комбинаторной задаче с  $2^k$  вариантами, что усложняет решение. В рамках диссертации в качестве значения  $\sigma_{opt}$  для почти периодического управления выбирается значение, полученное для аналогичной задачи со строго периодическим управлением.

#### 4. Решение модельных задач

Для того, чтобы валидировать предложенные методики, предлагается решить с их помощью ряд модельных задач и сравнить полученные траектории с оптимальными решениями, полученными классическими методами. Одной из самых распространённых задач построения траекторий с малой тягой является задача вывода КА на геостационарную орбиту (ГСО). В литературе существует

большое количество примеров решения этой задачи в различных постановках [54, 55, 56, 57, 58].

#### 4.1. Задача №1: перелёт с ГПО на ГСО в плоской модели с ИРТ-двигателем

В качестве первого примера продемонстрируем, как методика справляется с решением задач поиска оптимальных по топливу перелётов в модели двигателя с ИРТ. Неусреднённую модель движения, параметры стартовой и целевой орбит, а также время перелёта возьмём из статьи [56]. В рассмотренной в этой работе модели на КА влияют только центральное поле тяготения Земли как материальной точки и управляющее ускорение. Параметры стартовой и целевой орбит соответствуют экваториальной геопереходной орбите (ГПО) и геостационарной орбите (ГСО) соответственно и представлены в Таблице 2. Время перелёта принято равным 60 дням.

Для получения траектории перелёта между заданными орбитами с почти периодическим управлением решается цепочка задач с возрастающим порядком параметризации  $k$ . На первом шаге решается задача со строго периодическим управлением ( $k_1 = 1$ ). Затем её решение берётся в качестве начального приближения для следующей задачи, порядок параметризации которой  $k_j > k_{j-1}$ , и так далее по цепочке. В качестве начального приближения для задачи с  $k_1$  берётся  $\mathbf{c}_0 = \mathbf{0}$ . В случае кусочно-постоянной (кусочно-линейной) параметризации повышение  $k$  заключается в делении всех интервалов постоянства (линейности) параметров управления на две равные части с сохранением значений параметров управления в промежуточных точках:  $k = \{1, 2, 4, 8\}$  для кусочно-постоянной и  $k = \{1, 2, 3, 5\}$  для кусочно-линейной параметризации. В случае полиномиальной параметризации повышение  $k$  заключается в повышении порядка полиномов (86):  $k = \{1, 2, 3, 4\}$ .

Начнём с анализа решения на основе строго периодического управления. Компоненты вектора  $\mathbf{c}$ , полученные как решение задачи нелинейного программирования, представлены в Таблице 3. Несмотря на то, что перелёт является

плоским, для демонстрации применения методики при решении задачи оптимизировались все компоненты вектора  $\mathbf{c}$ . Компоненты, определяющие нормальную составляющую реактивного ускорения, обнулились в процессе оптимизации (их итоговые значения имеют порядок  $10^{-9}$  мм/с<sup>2</sup>). Значение функционала  $J_E$ , соответствующее полученному строго периодическому управлению, составляет 0.3194 м/с<sup>2</sup> при эталонном значении 0.299 м/с<sup>2</sup> [56]. Таким образом, ошибка вычисления оптимизируемого функционала составляет 6.5%.

Ошибка уменьшается при использовании почти периодического управления. Полученные значения оптимизируемого функционала падают с ростом параметра  $k$  и, как показывают Рисунок 9 и Таблица 4, приближаются к функционалу эталонного решения. Итоговая ошибка определения функционала  $J_E$  составляет от 0.1% до 0.2%. При этом для кусочно-линейной и полиномиальной параметризаций такая точность достигается уже при  $k = 2$ . То есть в рамках рассматриваемой модельной задачи даже простые зависимости компонент вектора  $\mathbf{c}$  от времени обеспечивают перелёты, близкие к эталонному. Это подтверждает и сравнение профилей реактивного ускорения, полученных в результате применения методики, с результатами в [56] (см Рисунки 10–14).

На Рисунках 15–17 представлены графики зависимостей полученных параметров управления от времени. Как можно увидеть, графики коэффициентов, имеющих наибольшие по модулю значения ( $\beta_1^r$ ,  $\beta_2^r$ ,  $\alpha_0^c$ ,  $\alpha_1^c$  и  $\alpha_2^c$ ) при увеличении параметра  $k$  сходятся к схожим кривым. Результат оптимизации остальных коэффициентов более случайный, что говорит о их слабом влиянии на результат.

Таблица 2. Параметры стартовой и целевой орбит в задаче №1.

| Орбитальный элемент              | Стартовая орбита | Целевая орбита |
|----------------------------------|------------------|----------------|
| Большая полуось $a$ , км         | 25 521           | 42 164         |
| Эксцентриситет $e$               | 0.644            | 0.0            |
| Наклонение $i$ , град.           | 0.0              | 0.0            |
| ДВУ $\Omega$ , град.             | —                | —              |
| Арг. перицентра $\omega$ , град. | 0.0              | —              |

Таблица 3. Коэффициенты Фурье строго периодического реактивного ускорения, полученного в результате решения задачи №1

| Коэфф.       | мм/с <sup>2</sup> | Коэфф.       | мм/с <sup>2</sup> | Коэфф.       | мм/с <sup>2</sup> |
|--------------|-------------------|--------------|-------------------|--------------|-------------------|
| $\alpha_0^r$ | 0.0000            | $\alpha_0^c$ | 0.2043            | $\alpha_0^n$ | 0.0000            |
| $\alpha_1^r$ | 0.0005            | $\alpha_1^c$ | −0.3278           | $\alpha_1^n$ | 0.0000            |
| $\beta_1^r$  | −0.1172           | $\beta_1^c$  | −0.0001           | $\beta_1^n$  | 0.0000            |
| $\alpha_2^r$ | 0.0001            | $\alpha_2^c$ | −0.0230           | $\alpha_2^n$ | 0.0000            |
| $\beta_2^r$  | −0.0193           | $\beta_2^c$  | −0.0002           | $\beta_2^n$  | 0.0000            |

Таблица 4. Значения функционала  $J_E$  для решений задачи №1.

|                                              | $k$ | $J_E, \frac{\text{м}^2}{\text{с}^3}$ |
|----------------------------------------------|-----|--------------------------------------|
| Эталонное решение                            | —   | 0.299                                |
| Период. управление                           | 1   | 0.3194                               |
|                                              | 2   | 0.3050                               |
| Управление с кус.-постоянной параметризацией | 4   | 0.3015                               |
|                                              | 8   | 0.3006                               |
|                                              | 2   | 0.3006                               |
| Управление с кус.-линейной параметризацией   | 3   | 0.3004                               |
|                                              | 5   | 0.3003                               |
|                                              | 2   | 0.3006                               |
| Управление с полиномиальной параметризацией  | 3   | 0.3003                               |
|                                              | 4   | 0.3003                               |

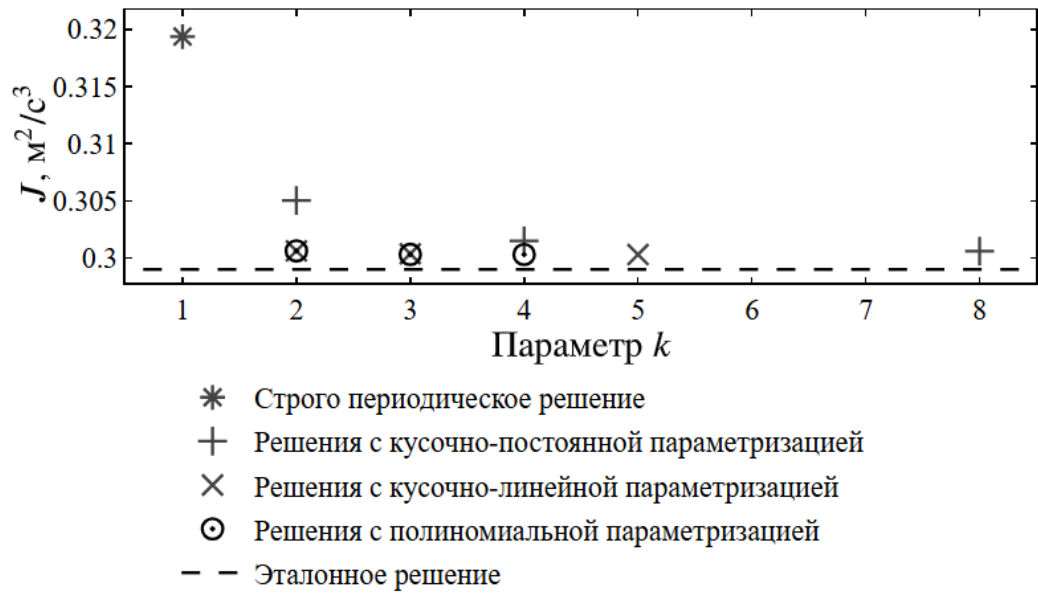


Рис. 9. Значения функционала  $J_E$  для решений задачи №1.

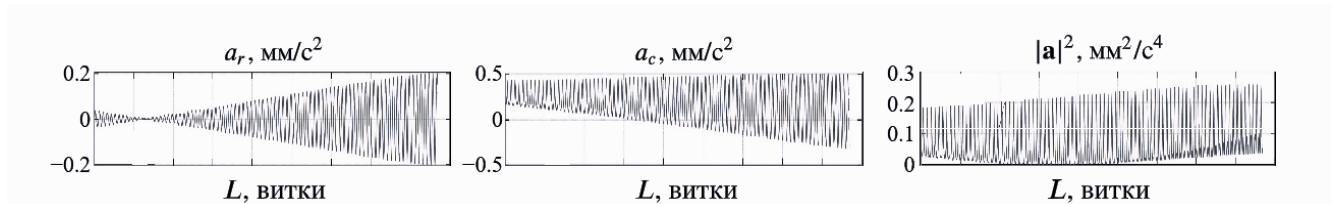


Рис. 10. Профиль реактивного ускорения на эталонном решении задачи №1 [56].

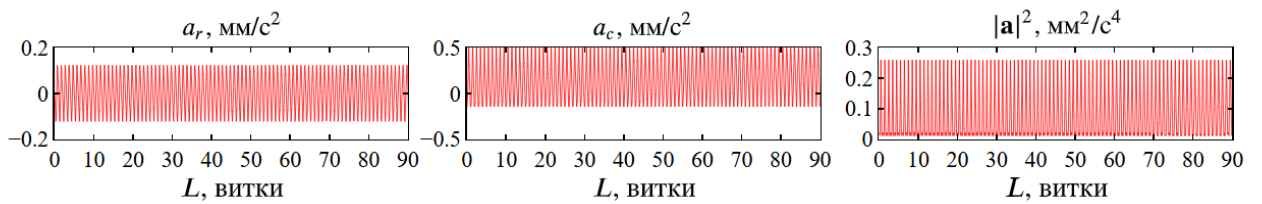


Рис. 11. Профиль реактивного ускорения на строго периодическом решении задачи №1.

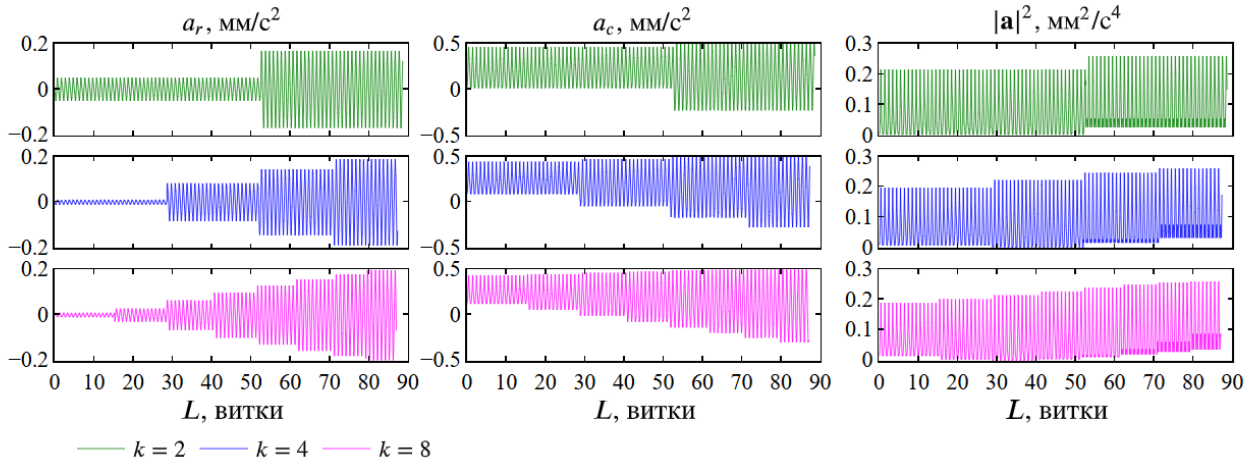


Рис. 12. Профили реактивного ускорения на решениях задачи №1 с кусочно-постоянной параметризацией.

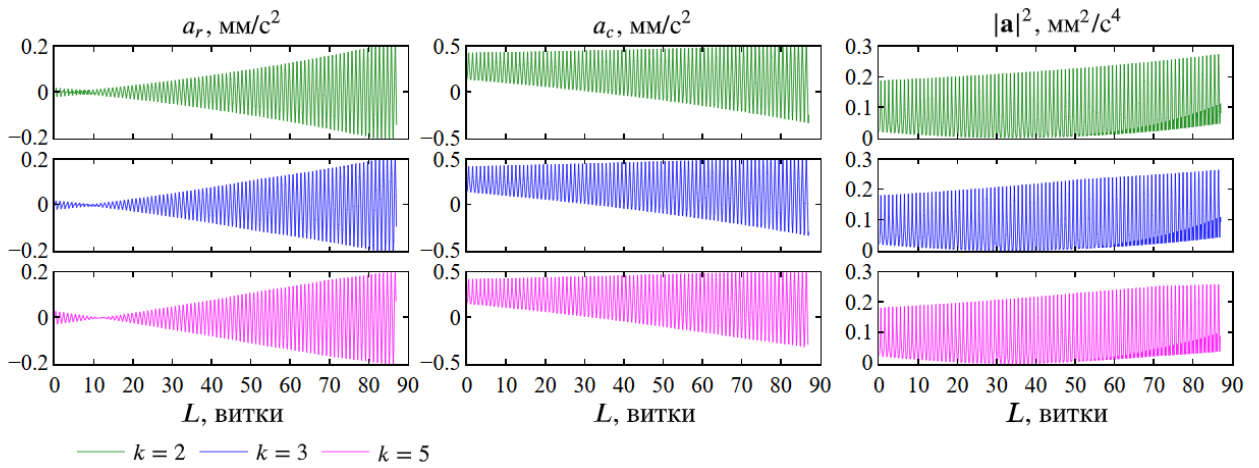


Рис. 13. Профили реактивного ускорения на решениях задачи №1 с кусочно-линейной параметризацией.

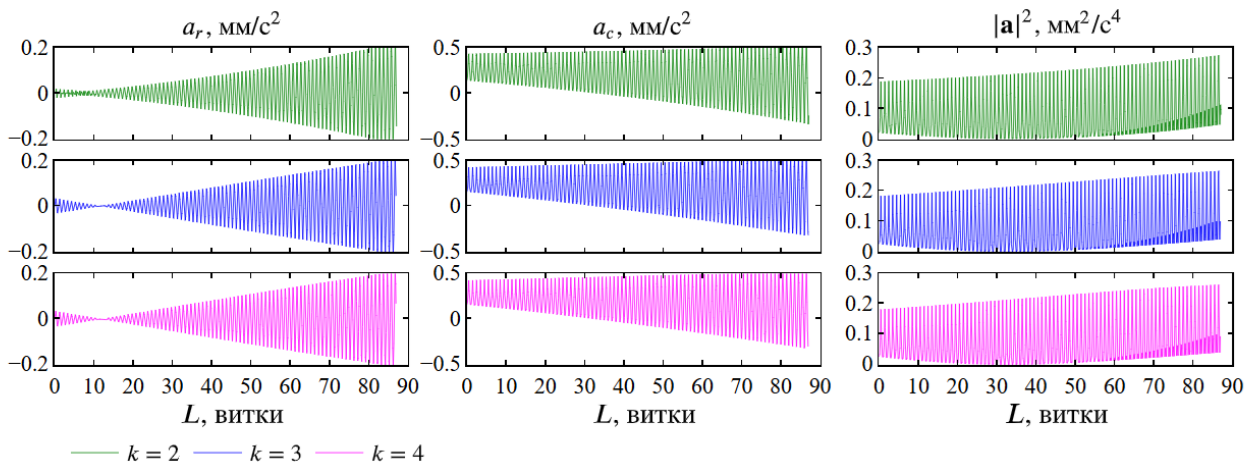


Рис. 14. Профили реактивного ускорения на решениях задачи №1 с полиномиальной параметризацией.

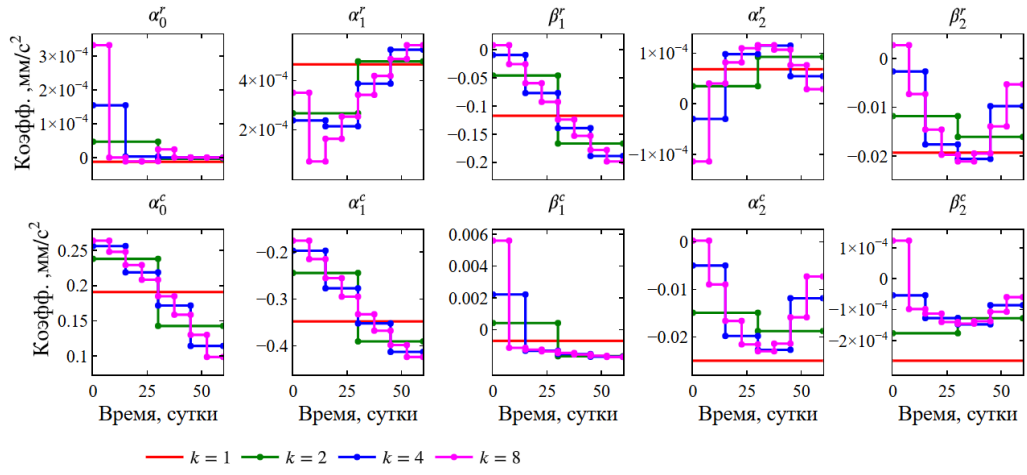


Рис. 15. График зависимости компонент вектора  $\mathbf{c}$  от времени при кусочно-постоянной параметризации.

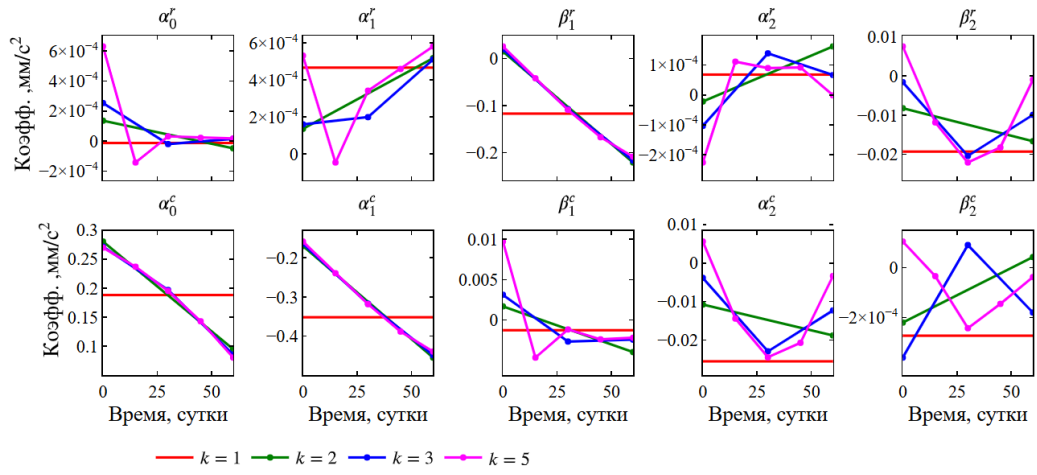


Рис. 16. График зависимости компонент вектора  $\mathbf{c}$  от времени при кусочно-линейной параметризации.

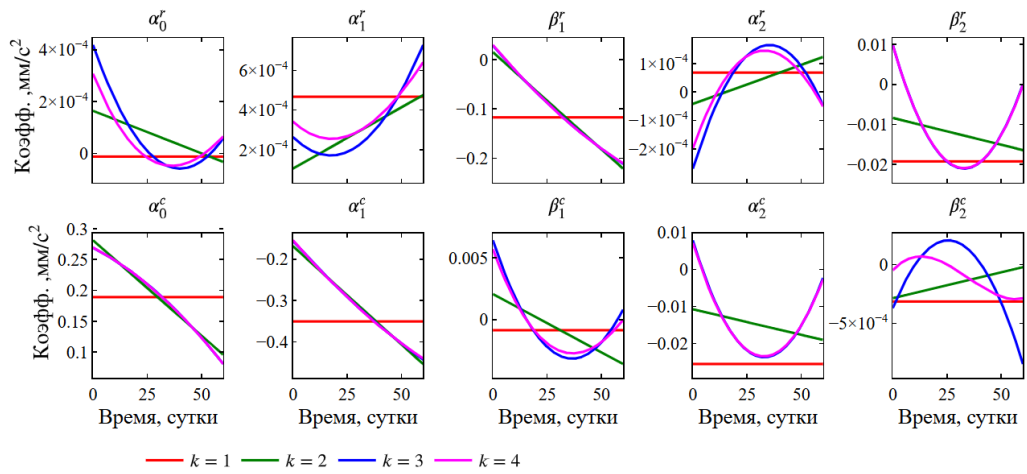


Рис. 17. График зависимости компонент вектора  $\mathbf{c}$  от времени при полиномиальной параметризации.

## 4.2. Задача №2: перелёт с ССПО на ГСО с двигателем ограниченной тяги с учётом полярного сжатия Земли и выключения ДУ в тени

В качестве второго примера рассматривается оптимальный по времени перелёт между сверхсинхронной переходной орбитой (ССПО) и ГСО, причём при построении учитываются полярное сжатие Земли и выключение ДУ в области тени. Постановка задачи и её эталонное решение взяты из статьи [55]. Момент начала перелёта равен 03:50:00 UT 20 Марта 2020 года и является днём весеннего равноденствия, поэтому соответствующая фаза Солнца  $\nu_0 = 0$ . Параметры стартовой и целевой орбит представлены в Таблице 5. Также в этой постановке определены начальная масса КА  $m_0 = 1200$  кг и характеристики ДУ: удельный импульс  $I_{sp} = 3300$  секунд, электрическая мощность  $N_\varepsilon = 10.0$  кВт и КПД  $\eta = 65\%$ . Таким образом, соответствующая тяга ДУ  $P_{max} = 2\eta N_\varepsilon / (I_{sp} g_0)$  равна 0.402 Н, а характерное реактивное ускорение  $a_{хар} = P_{max} / m_0 = 0.33$  мм/с<sup>2</sup> вполне соответствует околоземному перелёту с малой тягой.

Как и в задаче №1, решается цепочка задач с растущим порядком параметризации  $k$ . На первом шаге задача оптимизации решается в терминах вектора  $\tilde{\mathbf{c}}$ . Затем по полученному вектору  $\tilde{\mathbf{c}}_{opt}$  определяются вектор  $\mathbf{z}_{opt}$  и  $\sigma_{opt}$ . Следующие задачи решаются в терминах  $\mathbf{z}$  и  $\sigma$ . Увеличение параметра  $k$  и формирование начальных приближений аналогичны задаче №1, за исключением того, что здесь полиномиальная параметризация не рассматривается.

Время перелёта, полученное при решении задачи быстрогодействия со строго периодическим управлением, составило 79.88 суток при эталонном значении 75.42 суток, т.е. относительная ошибка составляет 5.9%. Компоненты полученного вектора  $\tilde{\mathbf{c}}_{opt}$  представлены в Таблице 6. Им соответствуют параметры  $\mathbf{z}_{opt} = [0.0882 \text{ Н}, 0.1979 \text{ Н}, -178.6^\circ, -176.3^\circ, 132.6^\circ, -88.9^\circ]$  и  $\sigma_{opt} = -1$ .

Результаты решения модельной задачи с почти периодическим управлением представлены в Таблице и 7 на Рисунках 18–24. Итоговая ошибка определения оптимального времени перелёта составляет 2.0% для кусочно-постоянной параметризации и 2.5% для кусочно-линейной параметризации, что значительно больше величин ошибок, полученных в первой задаче, но весьма неплохо,

учитывая, в насколько узком классе управлений ищется решение. Как можно видеть на Рисунках 19–22 профилей реактивной тяги, полученные законы управления значительно отличаются от эталонного, особенно в начале перелёта. В то же время разница в оптимизируемых функционалах невелика, что говорит о многоэкстремальности множества решений рассматриваемой задачи многовиткового перелёта. Так как полученные законы управления не совпадают с эталонным, итоговые траектории перелётов также будут отличаться (см. Рисунки 23 и 24).

Наиболее заметно различие в графиках эволюции большой полуоси: при эталонном управлении секулярная составляющая эволюции имеет явный вогнутый вид, в то время как для всех полученных управлений те же составляющие выпуклые. По мнению автора, такой результат можно объяснить выходом на локальный оптимум, который отличается от того, на которое вышел алгоритм в [55].

Таблица 5. Параметры стартовой и целевой орбит (пример 2).

| Орбитальный элемент              | Стартовая орбита | Целевая орбита |
|----------------------------------|------------------|----------------|
| Большая полуось $a$ , км         | 51 524.673       | 42 163.950     |
| Эксцентриситет $e$               | 0.8705           | 0.0            |
| Наклонение $i$ , град.           | 22.5             | 0.0            |
| ДВУ $\Omega$ , град.             | 0.0              | —              |
| Арг. перицентра $\omega$ , град. | 0.0              | —              |

Таблица 6. Коэффициенты Фурье строго периодической реактивной тяги, полученной в результате решения задачи №2

| Коэфф.               | Н       | Коэфф.               | Н       | Коэфф.               | Н       |
|----------------------|---------|----------------------|---------|----------------------|---------|
| $\tilde{\alpha}_0^r$ | 0.0044  | $\tilde{\alpha}_0^c$ | 0.0460  | $\tilde{\alpha}_0^n$ | 0.1085  |
| $\tilde{\alpha}_1^r$ | 0.0099  | $\tilde{\alpha}_1^c$ | −0.3802 | $\tilde{\alpha}_1^n$ | −0.1207 |
| $\tilde{\beta}_1^r$  | −0.3459 | $\tilde{\beta}_1^c$  | −0.0161 | $\tilde{\beta}_1^n$  | 0.0141  |
| $\tilde{\alpha}_2^r$ | 0.0023  | $\tilde{\alpha}_2^c$ | −0.0597 | $\tilde{\alpha}_2^n$ | −0.0649 |
| $\tilde{\beta}_2^r$  | −0.0881 | $\tilde{\beta}_2^c$  | −0.0046 | $\tilde{\beta}_2^n$  | 0.0012  |

Таблица 7. Значения времени перелёта для решений задачи №2.

|                                              | $k$ | $T$ , сутки |
|----------------------------------------------|-----|-------------|
| Эталонное решение                            | —   | 75.42       |
| Период. управление                           | 1   | 79.88       |
|                                              | 2   | 77.76       |
| Управление с кус.-постоянной параметризацией | 4   | 76.96       |
|                                              | 8   | 76.96       |
|                                              | 2   | 77.58       |
| Управление с кус.-линейной параметризацией   | 3   | 77.51       |
|                                              | 5   | 77.29       |

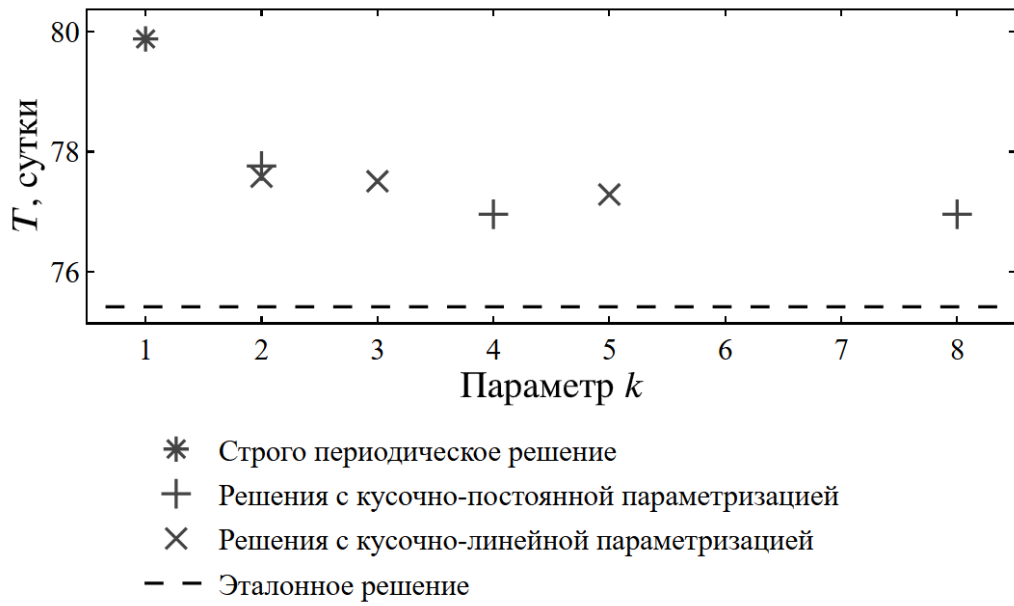


Рис. 18. Значения функционала  $J_E$  для решений задачи №1.

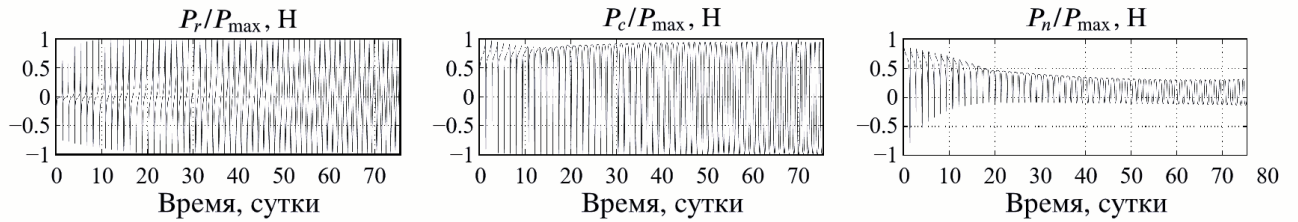


Рис. 19. Профиль реактивной тяги на эталонном решении задачи №2 [55].

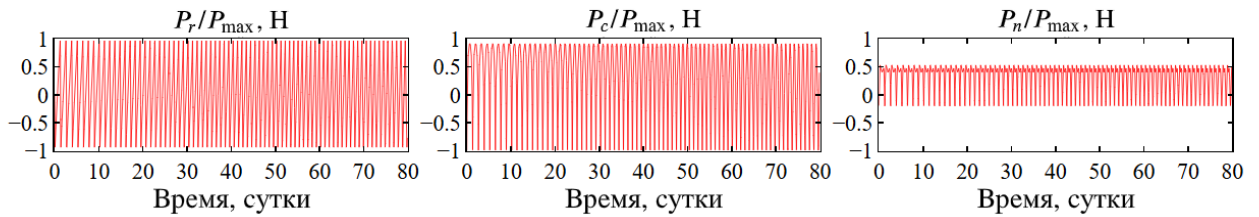


Рис. 20. Профиль реактивной тяги на строго периодическом решении задачи №2.

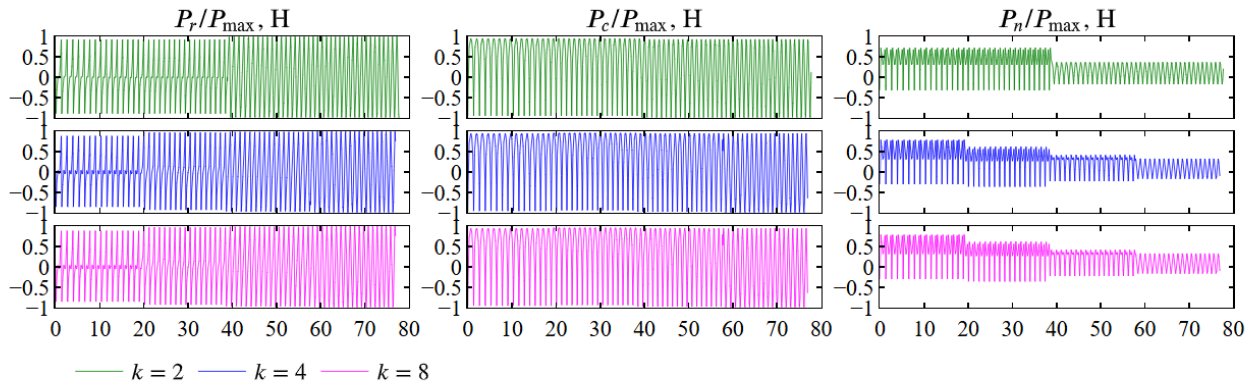


Рис. 21. Профили реактивной тяги на решениях задачи №2 с кусочно-постоянной параметризацией.

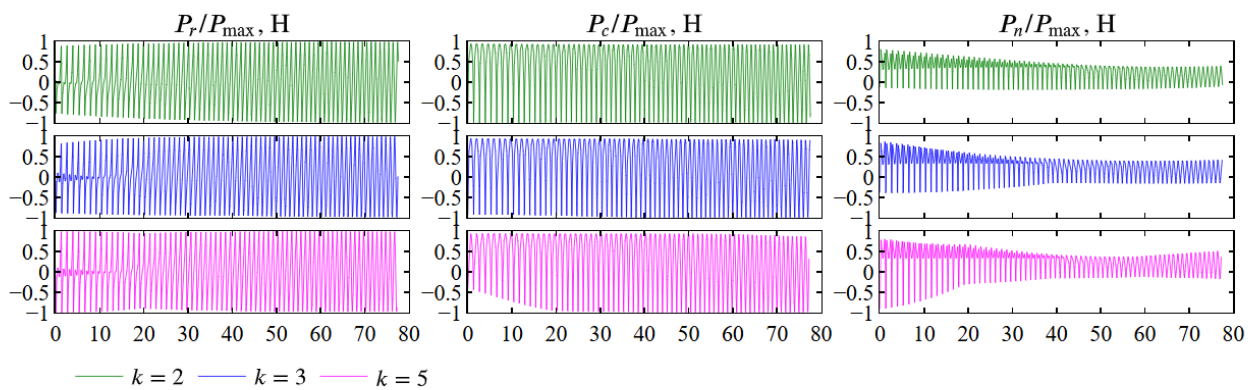


Рис. 22. Профили реактивной тяги на решениях задачи №2 с кусочно-линейной параметризацией.

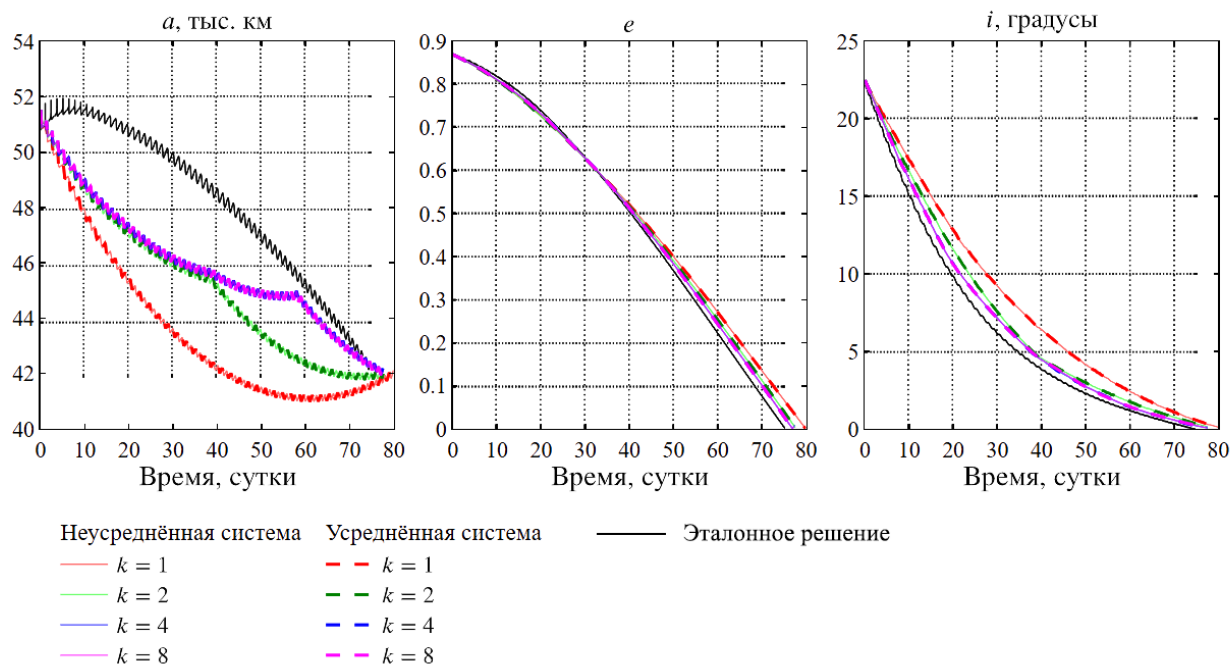


Рис. 23. Графики эволюции большой полуоси, эксцентриситета и наклона для решений задачи №2 с кусочно-постоянным управлением. График эталонного решения взят из [55].

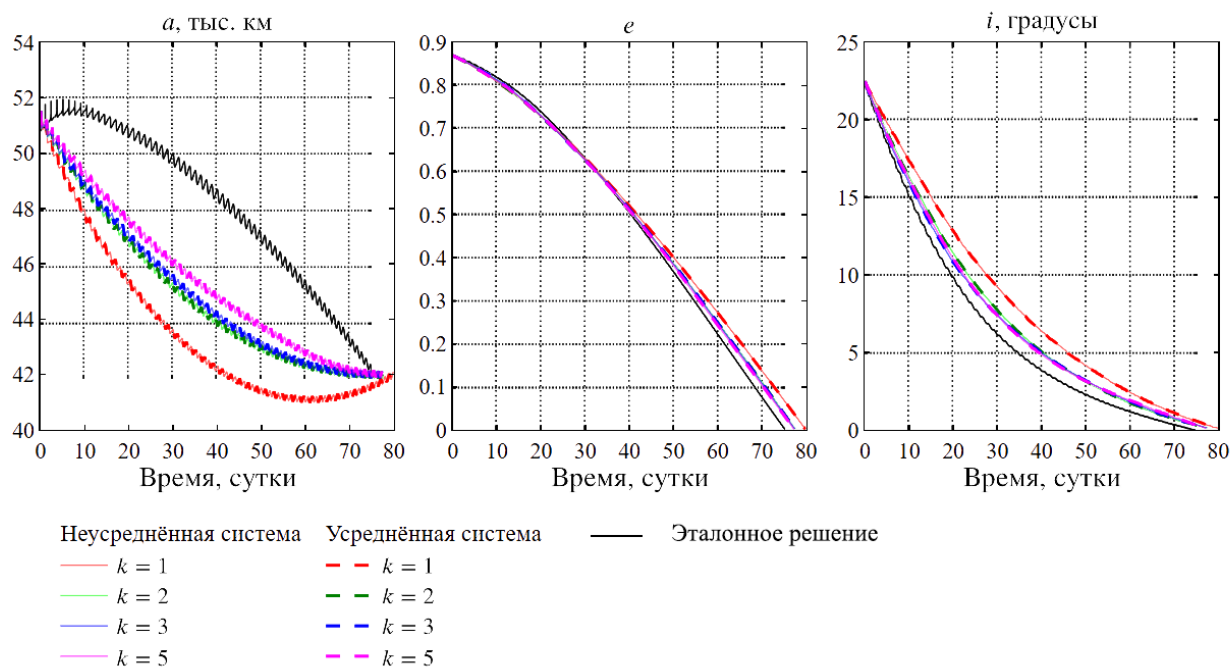


Рис. 24. Графики эволюции большой полуоси, эксцентриситета и наклона для решений задачи №2 с кусочно-линейным управлением. График эталонного решения взят из [55].

## Выводы по Главе 2

Во второй главе разработана методика поиска квазиоптимального управления при межорбитальных перелётах с малой тягой, основанная на модели усреднённого орбитального движения, предложенной в Главе 1. Рассмотрены две практически важные постановки: задача оптимизации затрат рабочего тела в модели двигателя с идеально регулируемой тягой и задача быстродействия в модели двигателя с ограниченной тягой. Для каждой из них выполнено сведение к задаче нелинейного программирования путём параметризации управления в виде усечённого тригонометрического ряда по эксцентрической долготе  $F$  с частотами  $k = 0, 1, 2$ .

Для задачи быстродействия в модели с ограниченной тягой ключевым результатом является вывод необходимых условий оптимальности в терминах параметров управления. Необходимое условие оптимальности (постоянство модуля реактивной тяги) переписано в виде системы алгебраических уравнений на коэффициенты Фурье. Предложена аналитическая замена переменных, сводящая 15 исходных коэффициентов к 7 независимым параметрам  $(\delta, \xi, \varphi, \alpha, \beta, \gamma, \sigma)$ , что позволяет исключить ограничения-равенства из задачи оптимизации и значительно сократить размерность пространства поиска.

Для учёта слабой неперiodичности управления предложен подход, основанный на кусочно-постоянной, кусочно-линейной или полиномиальной параметризации коэффициентов Фурье во времени. Показано, что множество допустимых значений параметров  $z$  является выпуклым, что гарантирует выполнение ограничений при кусочно-линейно параметризации.

Валидация предложенной методики выполнена на классических задачах вывода КА на геостационарную орбиту. Сравнение полученных решений с известными из литературы оптимальными траекториями подтвердило высокую точность и эффективность разработанного подхода. Продemonстрировано, что уже при  $k = 1$  (строго периодическое управление) достигается приемлемое приближение, а повышение порядка параметризации позволяет уточнить решение, приближаясь к эталонным оптимумам.

## **Глава 3. Баллистический анализ миссии по исследованию магнитосферы Земли**

Предложенные методики проектирования траекторий КА можно использовать при баллистическом анализе миссий в околоземном пространстве. Как было отмечено во второй главе, решения задачи быстродействия в модели двигателя с ограниченной тягой дают верхнюю оценку на оптимальные затраты рабочего тела и моторное время двигателя, а также нижнюю оценку на время перелёта. Так как затраты рабочего тела и время являются критическими характеристиками траектории перелёта КА, их оценка позволяет определить принципиальную реализуемость миссии. В данной главе предложенные методики используются для оценки затрат рабочего тела и времени перелёта для выведения КА на рабочую орбиту в рамках перспективной миссии по исследованию магнитосферы Земли.

### **1. Концепция миссии по исследованию магнитосферы Земли с помощью формации МКА**

Основная цель миссии – получение новых сведений о солнечно-земных связях, а именно продолжительное наблюдение и исследование различных областей магнитосферы Земли. Информация о процессах, протекающих в магнитосфере, позволит узнать больше о том, как солнечная активность (излучение, солнечный ветер, вспышки) влияет на космическую погоду, климат, работу электросетей и здоровье людей. В качестве инструмента наблюдения предлагается использовать космическую формацию. Тетраэдрическая конфигурация из четырех космических аппаратов, оснащённых магнитометрами, может изучать

магнитосферу Земли и её электрические токи в различных областях околоземного пространства. Расположение КА в вершинах тетраэдра является принципиальным, так как такая конфигурация позволит измерять магнитные электрические токи в разных направлениях, что даёт возможность рассчитать полный вектор магнитного поля.

К наиболее интересующим учёных регионам магнитосферы относятся области вблизи линии Земля-Солнце, в особенности хвост магнитосферы (около 120 000 км в направлении от Солнца) [59, 60], а также приполярные каспы – области на высоте около 25 000 км над магнитными полюсами Земли [61, 62, 63, 64]. Космические аппараты запускаются на близкие орбиты с одинаковым периодом, проходящие через заданные области околоземного пространства, а затем несколько раз за виток встают в тетраэдрическую конфигурацию для проведения совместных измерений.

Подобные миссии по изучению магнитосферы Земли с использованием формаций уже проводились на основе больших космических аппаратов [65]. Реализация аналогичной миссии на основе МКА типа CubeSat обсуждалась в [66]. В связи с развитием идей миниатюризации и универсальности в области космической техники обсуждение и проектирование научных миссий на основе группировок МКА являются глобальной тенденцией. Для вышеописанной миссии была разработана концепция платформы МКА [67] (Рисунок 25). Её компоновка с массовыми характеристиками представлена в Таблице 8. МКА пред-

Таблица 8. Варианты компоновки КА для исследования хвоста магнитосферы Земли

| Элемент микроспутника  | масса, кг              |
|------------------------|------------------------|
| Каркас                 | 14.30                  |
| Гиродин                | 1.30                   |
| Электроника            | 3.10                   |
| Магнитометр со штангой | 0.70                   |
| ДУ на базе СПД-50М     | 6.60                   |
| Баллон МКБ на 4 литра  | $2.00 \times 2 = 4.00$ |
| Ксенон                 | 16.00                  |
| Итого                  | <b>46.00</b>           |

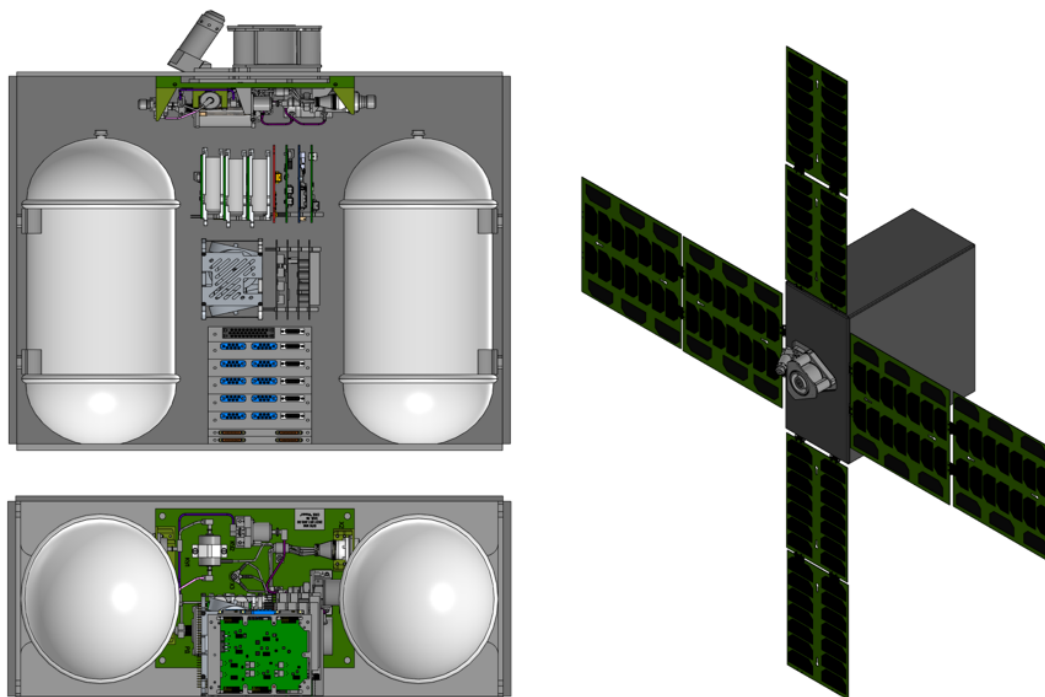


Рис. 25. Структурный облик платформы для исследования магнитосферы Земли [67].

лагается оснастить электрореактивным двигателем СПД-50М производства АО «ОКБ «Факел» [2] с максимальной тягой  $P_{\max} = 18$  мН, скоростью истечения рабочего тела  $v_{ex} = 11\,772$  м/с и временем безотказной работы 200 суток. Двигательную установку планируется использовать как для поддержания рабочих орбит МКА, так и для его довыведения с промежуточной орбиты, на которую МКА будут доставлены ракетой-носителем либо разгонным блоком. Самостоятельное довыведение МКА на рабочую орбиту является эффективной альтернативой использованию для этих целей мощностей разгонного блока, так как открывает возможности попутного запуска группировки вместе с более крупными аппаратами.

В диссертации предлагается провести баллистический анализ этой миссии, а именно этапа довыведения МКА на рабочую орбиту с орбиты, на которую они будут доставлены ракетой-носителем или разгонным блоком. Так как траектории каждого из четырёх аппаратов на этапе довыведения не зависят друг от друга, рассматривается динамика одиночного аппарата. Задача построения и поддержания тетраэдрической структуры из четырёх аппаратов в диссертации не рассматривается.

## 2. Выбор стартовой и целевой орбит вывода МКА

Определим, между какими околоземными орбитами будут анализироваться перелёты. В качестве стартовой орбиты в работе рассматривается геопереходная орбита со следующими параметрами:  $a_0 = 25\,000$  км,  $e_0 = 0.75$ ,  $i_0 = 51.7^\circ$ ,  $\omega_0 = 0^\circ$ . Она является распространённой промежуточной орбитой вывода для миссий в отдалённые области околоземного пространства и дальний космос. Многие разгонные блоки способны вывести четыре спутника общей массой до 400 кг в качестве целевой или попутной нагрузки [68]. Долгота восходящего узла  $\Omega_0$  определяется временем запуска и обычно может быть выбрана так, чтобы снизить затраты рабочего тела и/или время перелёта на целевую орбиту.

Выбор целевой орбиты тесно связан с научной миссией, основной целью которой является проведение групповых измерений в областях хвоста магнитосферы и полярных каспов. Область хвоста магнитосферы расположена в окрестности линии Солнце–Земля на расстоянии 120 000 км от центра Земли, поэтому апоцентр орбиты должен располагаться там. Другое ограничение возникает из-за необходимости пересечения полярных каспов, расположенных над полюсами Земли на высоте 25 000 км. Для выполнения этих условий целевая орбита принимается полярной с радиусом перицентра  $r_\pi = 20\,000$  км, чтобы группировка пролетала через полярные каспы, и радиусом апоцентра  $r_\alpha = 120\,000$  км, чтобы в дальней точке орбиты МКА проходили через хвост магнитосферы. Таким образом, для целевой орбиты большая полуось, эксцентриситет и наклонение определены как  $a_1 = 70\,000$  км,  $e_1 = 0.71$  и  $i_1 = 90^\circ$ . Поскольку элементы околоземной орбиты определяются в геоцентрической инерциальной системе координат GCRS, а большая полуось целевой орбиты должна лежать на линии Солнце–Земля, долгота восходящего узла  $\Omega_1$  и аргумент перицентра  $\omega_1$  зависят от положения Солнца.

Считая траекторию движения Солнца относительно Земли круговой орбитой, определим её элементы как  $a_C = 1$  а.е. = 149.6 миллионов км,  $e_C = 0$ ,  $i_C = 23.44^\circ$ ,  $\Omega_C = 0^\circ$ ,  $f_C = (d - d_0)/365.256 \times 360^\circ$ , где  $d$  – юлианская дата прибытия аппарата на целевую орбиту,  $d_0$  – юлианская дата весеннего рав-

ноденствия, ближайшего к  $d$ . Множество околоземных орбит, чьи апоцентры лежат на линии Земля–Солнце за Землёй, может быть параметризовано углом  $\varphi \in [0, 2\pi)$  между плоскостью эклиптики и плоскостью целевой орбиты (Рисунок 26). Исходя из построения,  $\omega_1$ ,  $\varphi$  и  $\Omega_1$  могут быть вычислены из значений

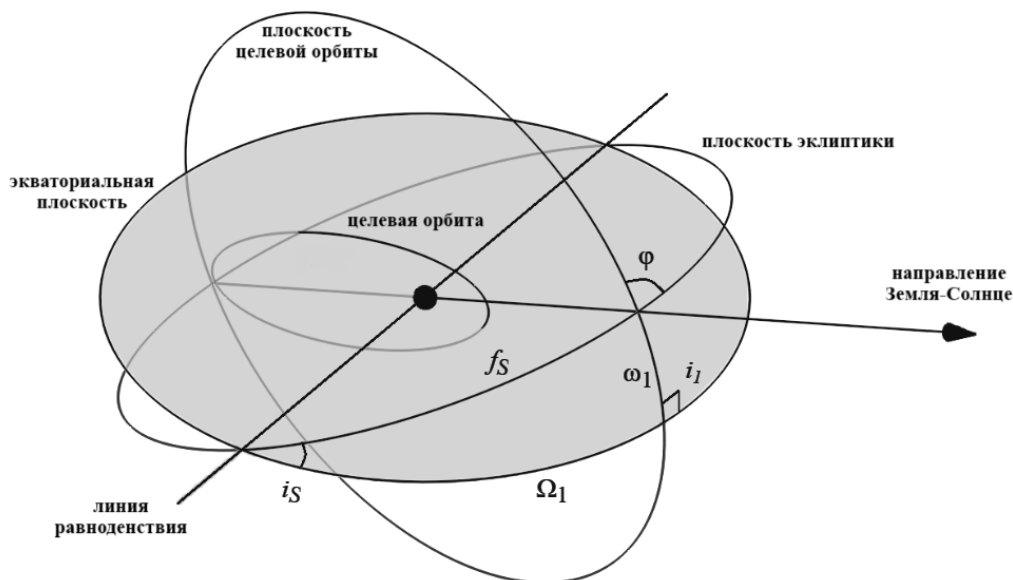


Рис. 26. Положение целевой орбиты в пространстве.

$i_C$ ,  $\Omega_C$ ,  $\omega_C$ ,  $f_C$  и  $i_1$  по теоремам синусов и косинусов для сферического треугольника:

$$\omega_1(f_C) = \arcsin(\sin i_C \sin f_C),$$

$$\varphi(f_C) = 2 \operatorname{arctg} \left( \cos \frac{f_C + \omega_1}{2} \sec \frac{f_C - \omega_1}{2} \operatorname{tg} \frac{i_C + i_1}{2} \right),$$

$$\Omega_1(f_C) = \operatorname{arctg} \left( \cos \frac{i_C - \varphi}{2} \sec \frac{i_C + \varphi}{2} \operatorname{tg} \frac{f_C}{2} \right) - \operatorname{arctg} \left( \sin \frac{i_C - \varphi}{2} \operatorname{cosec} \frac{i_C + \varphi}{2} \operatorname{tg} \frac{f_C}{2} \right).$$

Таким образом, значения орбитальных элементов целевой орбиты однозначно определяются значением  $f_C$  или, что аналогично, датой прибытия аппарата на целевую орбиту.

### 3. Постановка задачи баллистического анализа

Перейдём к постановке задачи, которая будет решена в рамках баллистического анализа рассматриваемой миссии. Для оценки реализуемости миссии

предлагается строить траектории перелёта единичного МКА между стартовой и целевой орбитами, полученные как решения задачи быстродействия в модели двигателя с ограниченной тягой. Такой выбор связан с тем, что траектории перелёта пересекают радиационные пояса магнитосферы. Малая масса КА не позволяет обеспечить высокую радиационную защиту электронных компонентов. Чтобы снизить вероятность потери миссии из-за выхода из строя, необходимо минимизировать время, которое МКА проводит в радиационных поясах, и, следовательно, минимизировать время перелёта. Траектории будут строиться в модели усреднённой динамики, учитывающей полярное сжатие Земли и выключение ДУ МКА в тени Земли.

Важной особенностью задачи является то, что параметры  $\Omega_0, \Omega_1$  и  $\omega_1$ , определяющие стартовую и целевую орбиты, не фиксированы. Долгота восходящего узла  $\Omega_1$  и аргумент перицентра  $\omega_1$  целевой орбиты определяются положением Солнца в момент окончания перелёта  $f_C$ . Для полноты исследования этот параметр варьируется в диапазоне  $[0, 2\pi)$  с шагом в 10 градусов.

Что касается  $\Omega_0$ , предлагается следующий подход к её определению. Обратим внимание на то, что при свободе выбора  $\Omega_0$  наиболее быстрым будет тот перелёт, при котором ресурс двигателя в наименьшей степени тратится на изменение ДВУ, и она меняется за счёт полярного сжатия Земли. Поэтому для каждого  $f_C$  выберем  $\Omega_0$  таким, чтобы  $\Omega_1(f_C)$  было близко к  $\Omega_0 + \Delta\Omega$ , где  $\Delta\Omega$  есть изменение ДВУ за счёт влияния полярного сжатия Земли.

Величину  $\Delta\Omega$  оценим следующим образом. Для начала решим вспомогательную задачу быстродействия с  $\Omega_0 = \Omega_1(f_C)$  в модели без полярного сжатия и тени. На основе полученных управления  $\tilde{u}_{\text{opt}}$  и времени перелёта  $\tilde{T}_{\text{opt}}$ , но уже в модели с полярным сжатием, построим новую траекторию, начинающуюся на орбите с  $a = a_0, e = e_0, i = i_0, \omega = \omega_0, \Omega = \Omega_1(f_C)$ , и вычислим  $\Delta\Omega$ . После этого зафиксируем  $\Omega_0 = \Omega_1(f_C) - \Delta\Omega$ .

Теперь, когда все параметры стартовой и целевой орбит определены, можно поставить задачу быстродействия в модели с полярным сжатием и тенью и решить её; при этом управление  $\tilde{u}_{\text{opt}}$  и продолжительность перелёта  $\tilde{T}_{\text{opt}}$ , по-

лученные в упрощённой модели, могут быть использованы в качестве начального приближения. При поиске решений вспомогательной задачи рассматривается только строго периодическое управление. В исходных задачах быстрого действия рассматриваются также почти периодические функции управления с кусочно-линейной параметризацией, причём, аналогично модельным задачам в главе 2, решается цепочка задач с растущим порядком параметризации  $k = 1, 2, 3, 5, 9, \dots$ , что соответствует разбиению каждого из участков линейности на два равных участка. Повышение порядка параметризации продолжается до тех пор, пока улучшение времени перелёта по сравнению с предыдущим решением больше 0.1%. Схема, иллюстрирующая алгоритм решения задачи для заданного  $f_C$ , представлена на Рисунке 27.

#### 4. Результаты

Результаты баллистического анализа представлены на Рисунках 28–34. Следуя логике алгоритма, для начала исследуем результаты решения вспомогательных задач. Зависимость ДВУ и аргумента перицентра целевой орбиты от величины  $f_C$  проиллюстрирована Рисунком 28. Соответствующие этим значениям времени перелёта, полученные из решений вспомогательных задач быстрого действия, представлены на Рисунке 29. Как можно видеть, максимальные времена перелёта соответствуют максимумам модуля  $\omega_1$ . Такой результат естественен, так как в этих случаях МКА необходимо максимально изменить направление на перицентр при прочих равных условиях. Значения ДВУ целевой орбиты в данном случае не влияют на время перелёта, так как вспомогательная задача решается в постановке  $\Omega_0 = \Omega_1$ , что задаёт своеобразную симметрию.

Полученные по построению в модели с полярным сжатием величины  $\Delta\Omega$  представлены на Рисунке 30 сверху. Снизу на рисунке представлен график величины  $\Delta\omega$ , равной разнице между финальным и целевым значениями аргумента перицентра. Как можно видеть, изменение ДВУ и аргумента перицентра за счёт влияния полярного сжатия Земли при рассматриваемом перелёте невелики, однако не равны нулю.

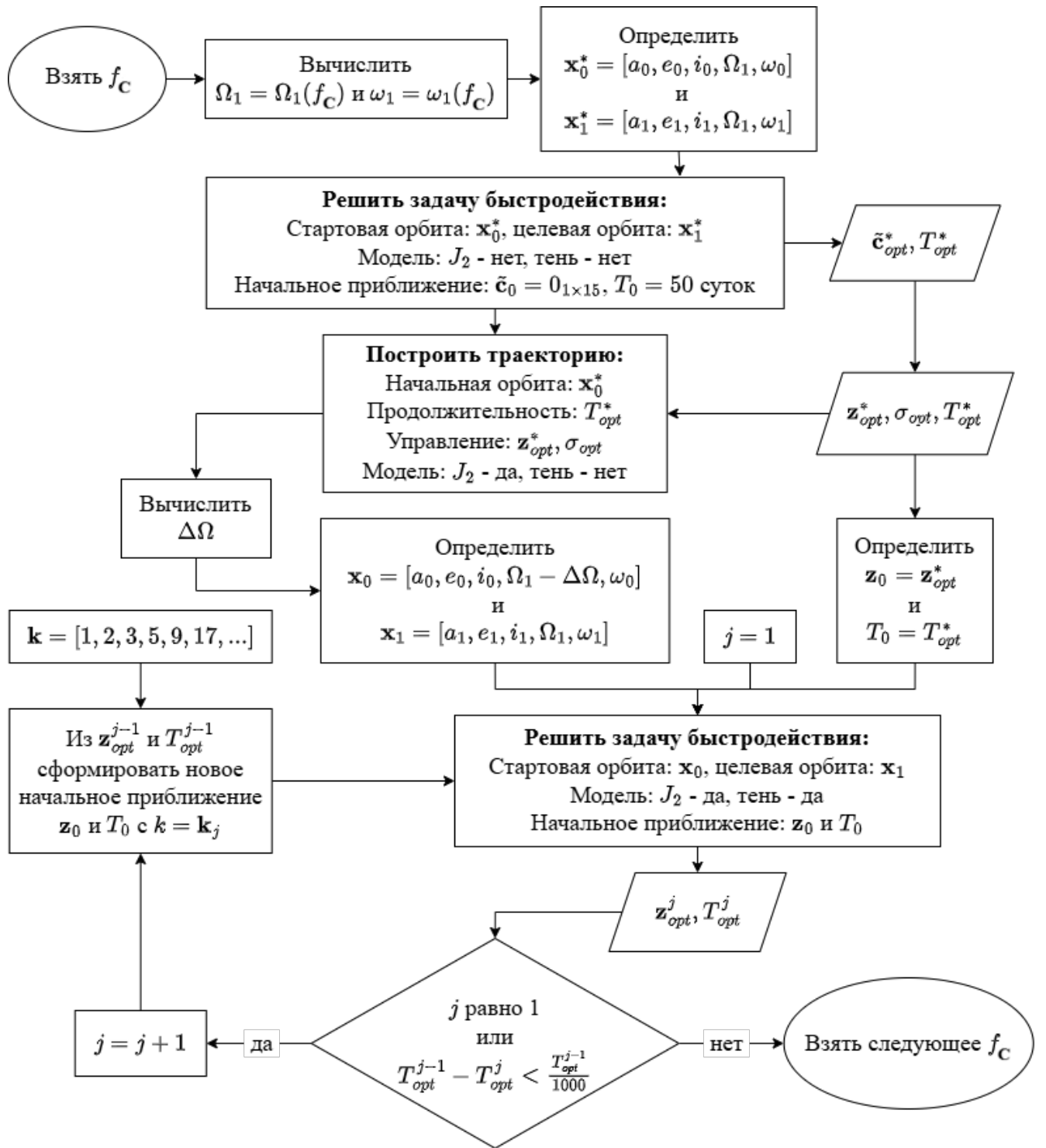


Рис. 27. Алгоритм баллистического анализа для заданного  $f_C$ .

Полученные законы управления и времена перелёта используются в качестве начальных приближений при решении основных задач быстрогодействия, решения которых представлены на Рисунках 31–34. Рисунок 31 отражает зависимость оптимальных времён перелёта от  $f_C$  для различных значений порядка параметризации  $k$ . Затраты рабочего тела представлены на Рисунке 32. Полу-

ченные времена перелётов (от 54 до 76 суток) и затраты рабочего тела (от 7.13 до 10.04 кг) удовлетворяют ограничениям платформы, а именно ресурсу работы ДУ и запасу рабочего тела. Таким образом, реализуемость миссии с точки зрения баллистического анализа выведения единичного МКА на рабочую орбиту подтверждена.

При планировании миссии одним из важных параметров является дата старта. Поэтому ниже приведены графики зависимостей полученных времён перелёта и затрат рабочего тела от направления на Солнце в начальный момент времени (Рисунки 33 и 34).

## 5. Анализ законов управления

Продолжим анализ полученных решений задач быстрогодействия. Обратим внимание, что правый пик времени перелёта расположен выше, чем левый. Это связано с тем, что при  $0 < f_C < \pi$  изменение аргумента перицентра за счёт полярного сжатия Земли имеет тот же знак, что и целевой аргумент перицентра. Иными словами, полярное сжатие Земли «помогает» управлению выстроить нужное направление на перицентр. Напротив, при  $\pi < f_C < 2\pi$  управлению необходимо парировать изменение аргумента перицентра под влиянием полярного сжатия Земли, что приводит к большему времени перелёта.

Как показывает Рисунок 31, повышение порядка параметризации приводит к выравниванию правого и левого пиков времени перелёта. Чтобы разобраться, почему так происходит, исследуем два набора решений, соответствующих значениям  $f_C = 80^\circ$  и  $f_C = 270^\circ$ . На Рисунке 35 представлены графики эволюции кеплеровых элементов во время перелёта в обоих случаях. Как можно заметить, когда параметры управления  $\mathbf{z}$  могут меняться во времени, алгоритм управления «выбирает» не менять аргумент перицентра в начале перелёта. Вместо этого ресурс ДУ направляется на изменение большой полуоси и эксцентриситета, что увеличивает минимальное расстояние до Земли. На высоких орбитах эффективность воздействия реактивного ускорения на орбитальные параметры возрастает, так как увеличивается отношение величины реактивного ускорения

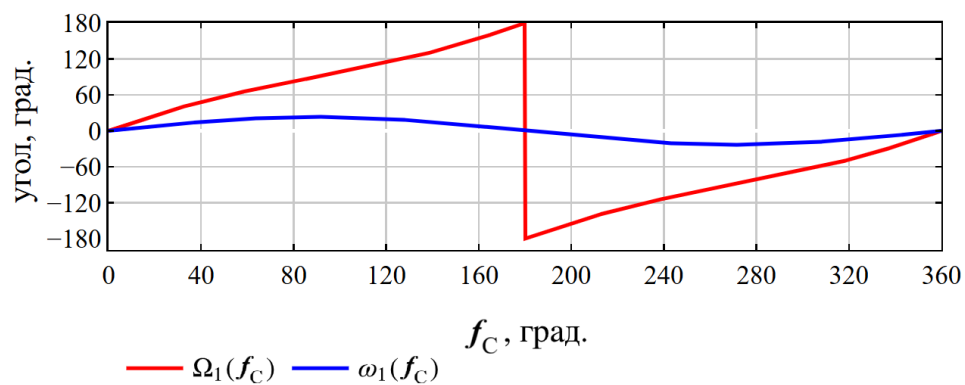


Рис. 28. Зависимость ДВУ  $\Omega_1$  и аргумента перицентра  $\omega_1$  от  $f_C$ .

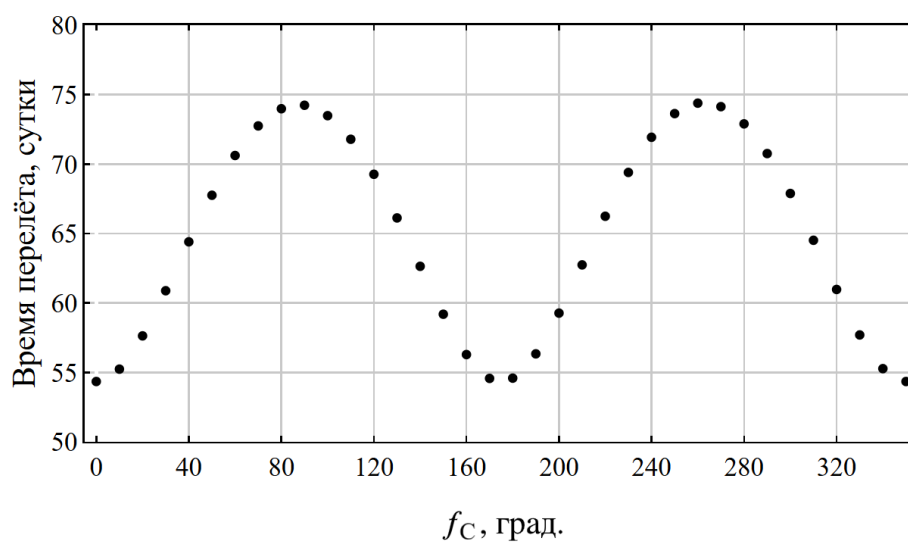


Рис. 29. Решения вспомогательных задач быстрогодействия в зависимости от  $f_C$ .

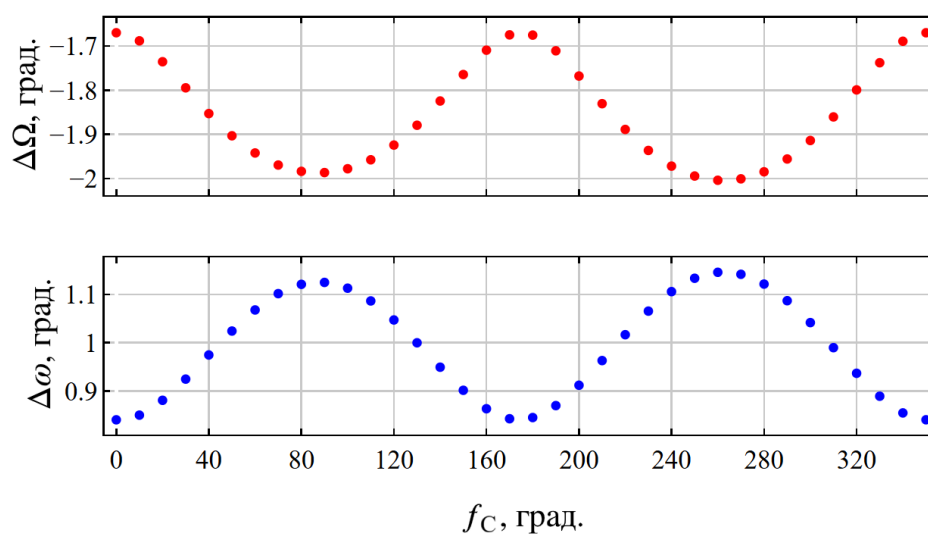


Рис. 30. Величины  $\Delta\Omega$  и  $\Delta\omega$  в зависимости от  $f_C$ .

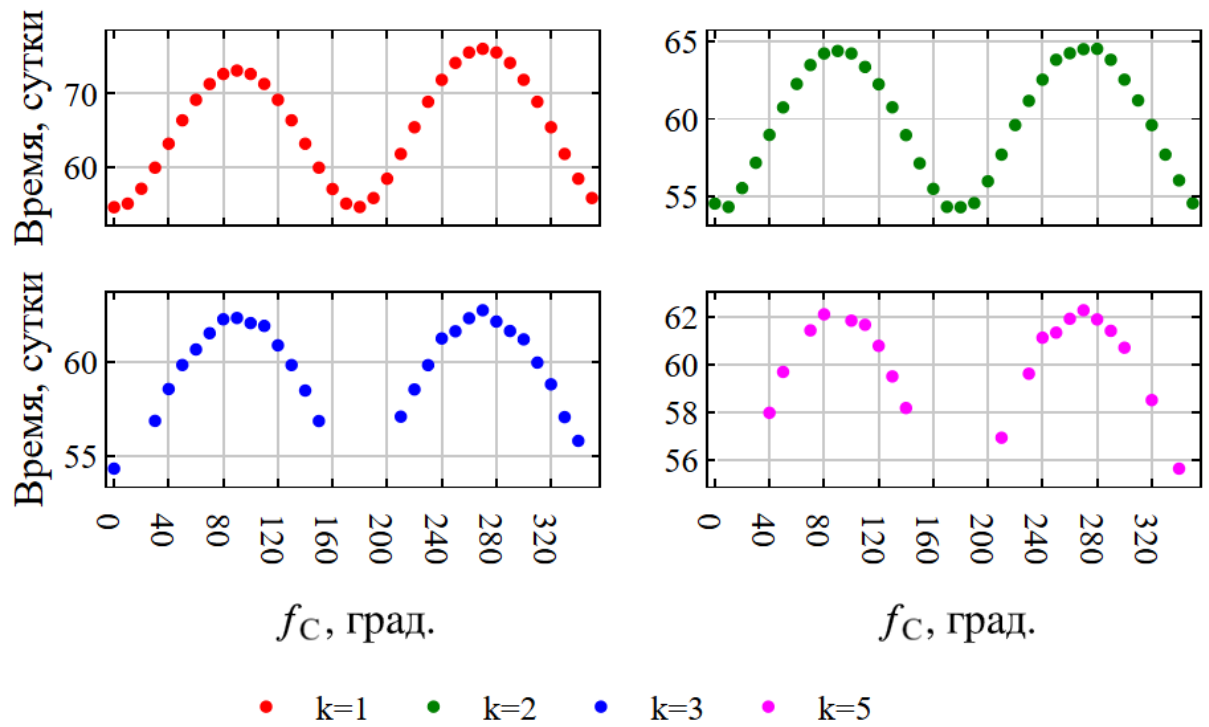


Рис. 31. Оптимальное время перелёта в зависимости от  $f_C$ .

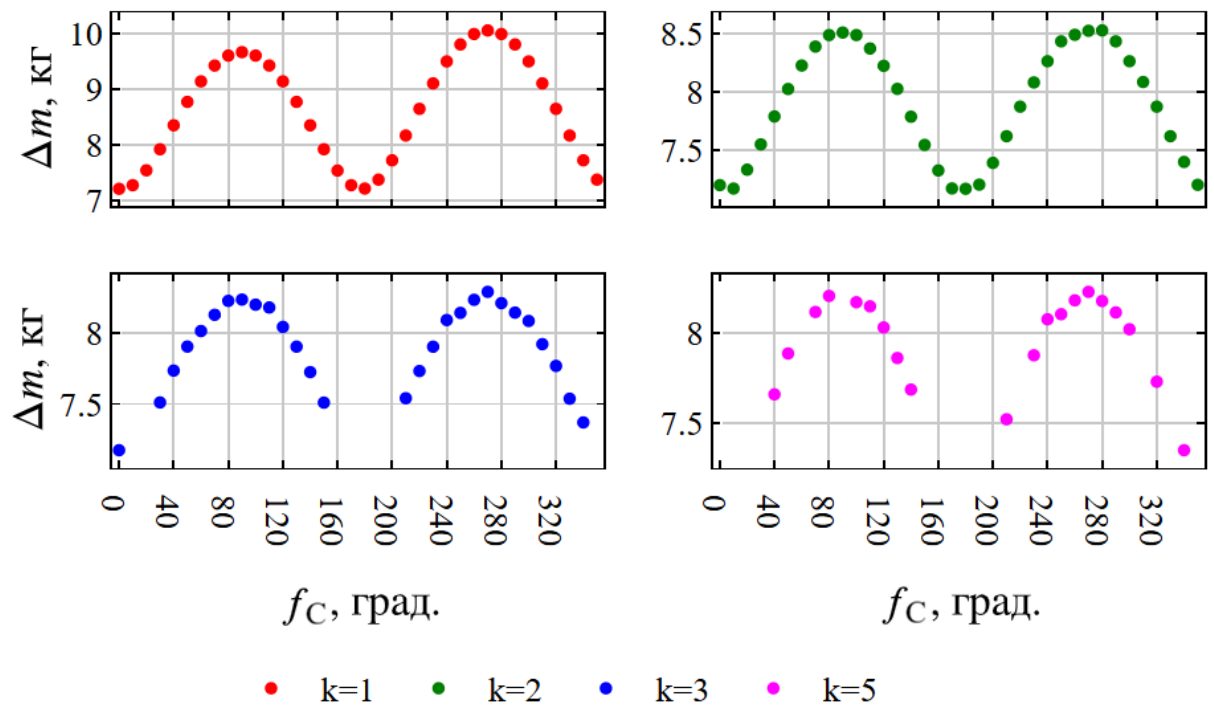


Рис. 32. Оптимальные затраты рабочего тела в зависимости от  $f_C$ .

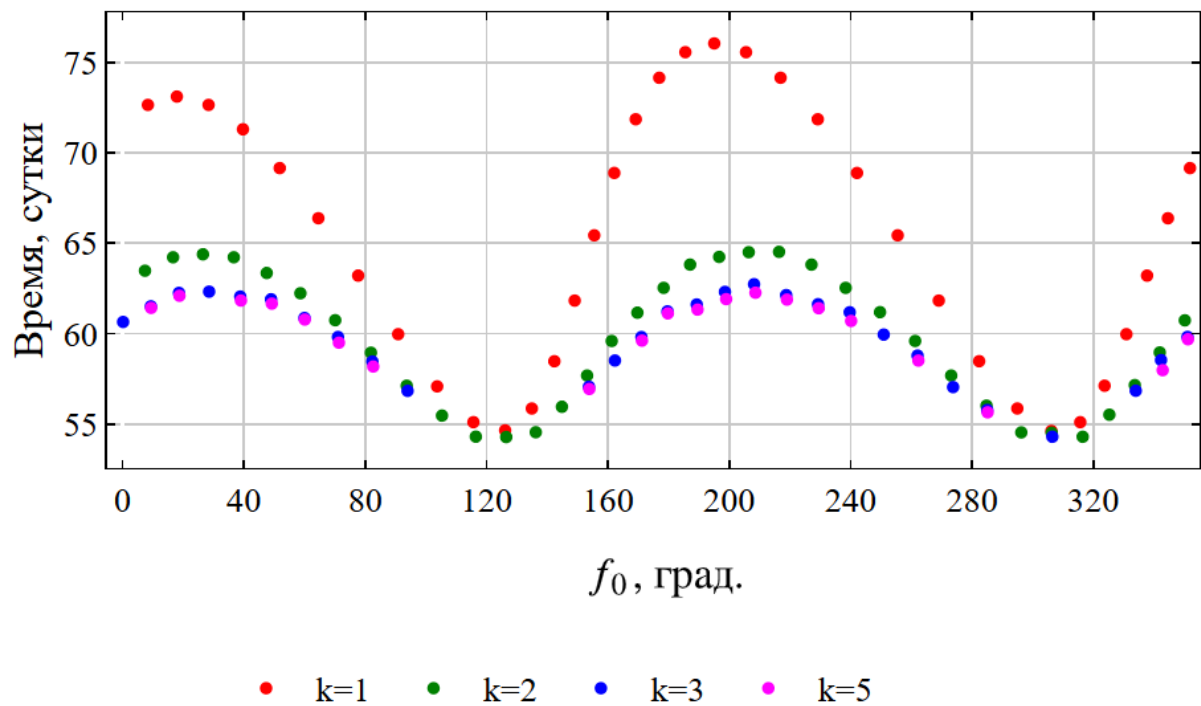


Рис. 33. Оптимальное время перелёта в зависимости от направления на Солнце в начальный момент времени  $f_0$ .

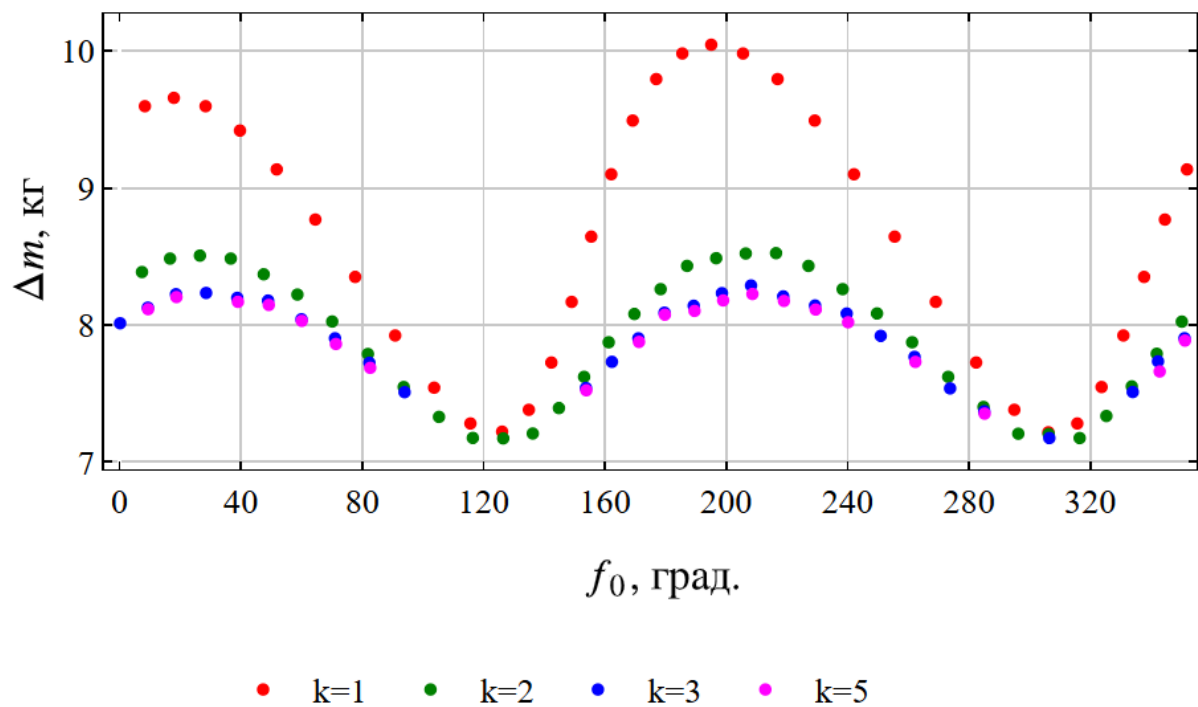


Рис. 34. Оптимальные затраты рабочего тела в зависимости от направления на Солнце в начальный момент времени  $f_0$ .

к  $g_0$ . К тому же на более высоких орбитах значительно уменьшается величина возмущающего ускорения от полярного сжатия Земли, поэтому КА «легче» парировать дрейф аргумента перигея.

Вышесказанное подтверждают графики компонент реактивной тяги, представленные на Рисунках 36 и 37. По сравнению с  $k = 1$ , при управлении с более сложной структурой трансверсальная компонента тяги  $P_c$  в начале перелёта меньше осциллирует и обладает большей секулярной составляющей. В терминах коэффициентов Фурье это означает, что у управлений при  $k = 2, 3, 5$  на начальном этапе перелёта коэффициент  $\alpha_0^c$  больше, чем при  $k = 1$ . Именно этот коэффициент, исходя из уравнений модели усреднённого движения (16)–(18), в большей степени отвечает за изменение параметра  $p$ , а значит, и большой полуоси  $a$ .

Также на Рисунке 35 представлены графики траекторий, построенных в модели неусреднённого движения под действием полученных управлений. Видно, что траектории в модели усреднённого движения с высокой точностью описывают среднее движение в модели неусреднённой динамики.

### Выводы по Главе 3

В третьей главе проведён баллистический анализ перспективной миссии по исследованию магнитосферы Земли. На основе предложенной во второй главе методики решения задач быстрогодействия построены траектории доведения единичного КА с геопереходной орбиты ( $a_0 = 25\,000$  км,  $e_0 = 0.75$ ,  $i_0 = 51.7^\circ$ ) на целевую высокоэллиптическую полярную орбиту ( $a_1 = 70\,000$  км,  $e_1 = 0.71$ ,  $i_1 = 90^\circ$ ), проходящую через области хвоста магнитосферы и приполярных каспов. Определены зависимости оптимального времени перелёта и затрат рабочего тела от направления на Солнце в момент старта. Полученные результаты показывают, что оптимальное время перелёта не превышает 76 суток, а затраты рабочего тела составляют не более 10 кг. Эти значения находятся в пределах возможностей рассматриваемой платформы с запасом топлива 16 кг и ресурсом работы ДУ 208 суток, что делает построенные в главе траектории

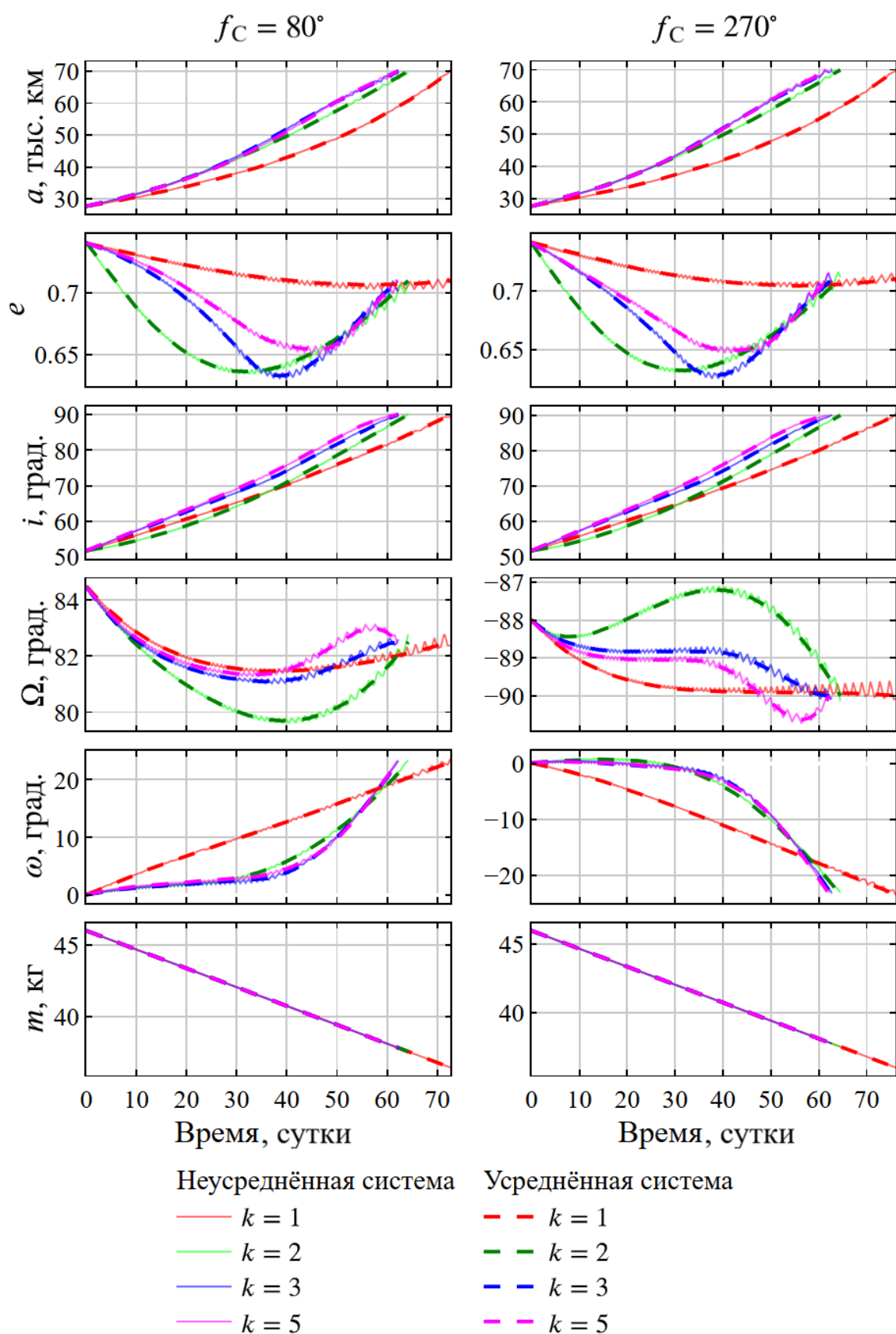


Рис. 35. Эволюции кеплеровых элементов и массы КА для решений задач быстрогодействия при  $f_C = 80^\circ$  и  $f_C = 270^\circ$ .

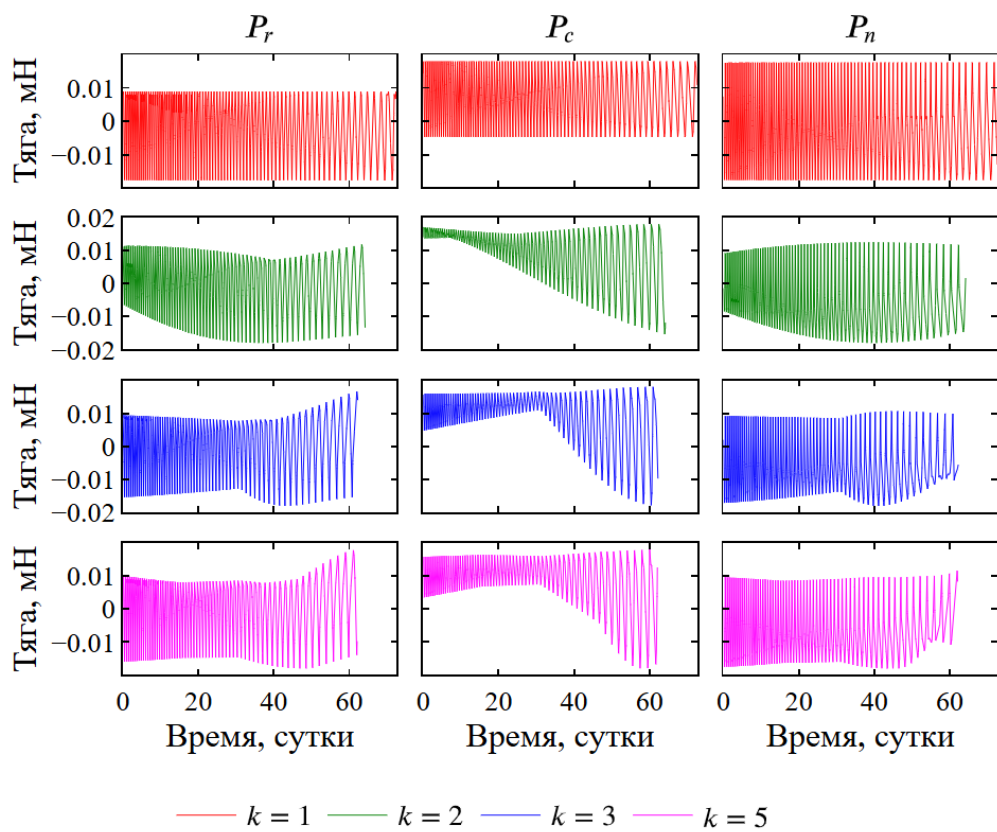


Рис. 36. Компоненты вектора реактивной тяги при  $f_C = 80^\circ$ .

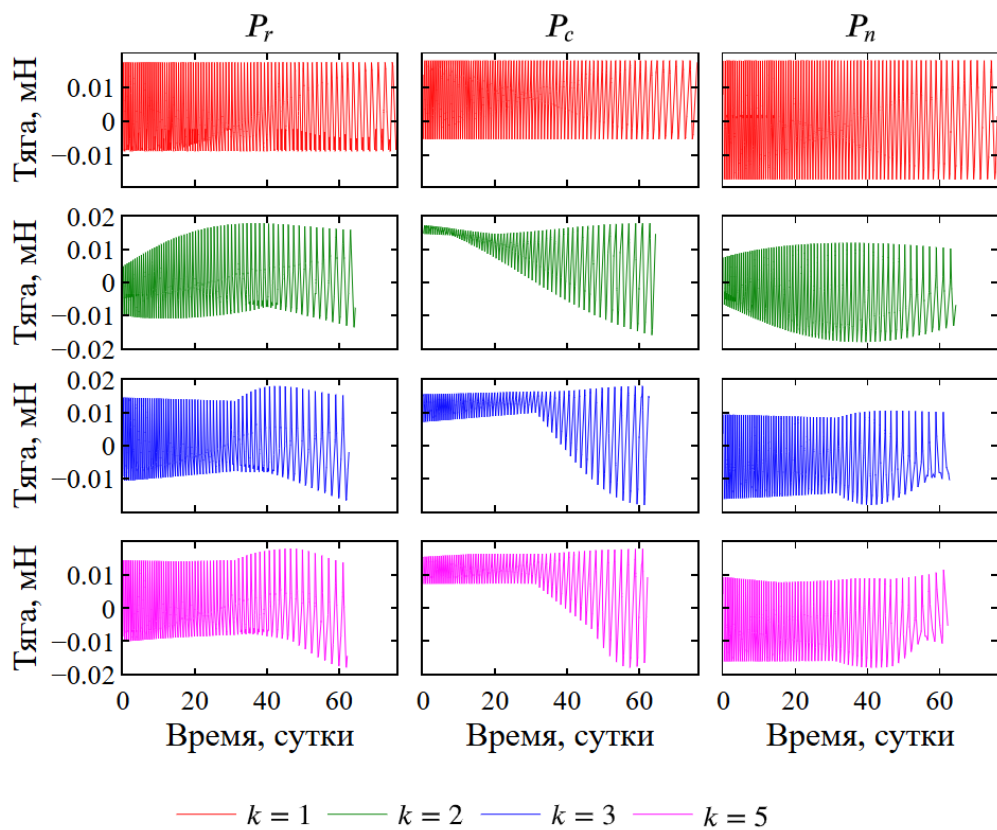


Рис. 37. Компоненты вектора реактивной тяги при  $f_C = 270^\circ$ .

технически осуществимыми и говорит о принципиальной реализуемости миссии с точки зрения баллистического анализа.

Более глубокий анализ полученных законов управления выявил, что при неблагоприятной ориентации целевой орбиты ( $f_C > 180^\circ$ ) возмущение от полярного сжатия Земли противодействует требуемому изменению аргумента перигея, что увеличивает время перелёта в случае строго периодического управления. Управления более сложного вида позволяют эффективнее перераспределять ресурс двигателя: они уменьшают осцилляции трансверсальной компоненты тяги в начале перелёта и увеличивают секулярную составляющую, что ускоряет рост большой полуоси. Верификация полученных законов управления в модели неусреднённого движения подтвердила результаты, полученные с помощью предлагаемой методики.

## Заключение

В настоящей диссертационной работе предложена методика проектирования многовитковых траекторий КА с двигателем малой тяги на основе методов усреднения и параметризации рядами Фурье. Разработана модель усреднённой орбитальной динамики КА под действием почти периодического реактивного ускорения. Исследование показало высокую точность аппроксимации вековых изменений орбиты КА с помощью предложенной модели. Для случаев малых эксцентриситетов получены явные аналитические решения в квадратурах и элементарных функциях для усреднённой возмущённой задачи двух тел. Использование предложенной модели усреднённого движения КА вместе с параметризацией реактивного ускорения (тяги) рядами Фурье позволило свести задачу поиска оптимальных по топливу (времени) межорбитальных перелётов КА с малой тягой к задаче нелинейного программирования небольшой размерности. С помощью разработанных подходов проведён баллистический анализ перспективной миссии по исследованию магнитосферы на базе МКА. Результаты баллистического анализа подтвердили принципиальную возможность довыведения МКА на рабочие орбиты с ГПО силами собственной ЭРДУ.

Разработанную методику можно применять в предварительном баллистическом анализе миссий МКА с двигателями малой тяги для быстрой оценки времени перелёта и затрат рабочего тела, а также для построения траекторий, близких к оптимальным. Уравнения системы усреднённого орбитального движения позволяют исследовать влияние периодических возмущающих ускорений на эволюцию орбиты КА.

В дальнейшем планируется развитие темы исследования в нескольких направлениях. Во-первых, необходимо расширить класс задач оптимизации, ре-

шаемых с помощью разработанной методики. Наиболее распространённой задачей в баллистическом анализе перелётов с малой тягой является задача оптимизации по топливу в модели двигателя с ограниченной тягой. Она характеризуется наличием пассивных участков, на которых аппарат движется с выключенным двигателем. Параметризация реактивной тяги рядами Фурье может дать информацию об оптимальных положениях пассивных участков на витке орбиты. Во-вторых, необходимо провести всесторонний анализ полученной системы уравнений усреднённого орбитального движения КА. Факт конечномерной параметризации управляющего воздействия при переходе к усреднённой системе может позволить эффективно строить управление с обратной связью, обеспечивающее необходимое среднее движение. В-третьих, помимо естественных возмущений, рассмотренных в диссертации, в модели усреднённого движения необходимо учесть такие возмущения, как высшие гармоники разложения гравитационного потенциала Земли, притяжение третьих массивных тел и сопротивление атмосферы на низких околоземных орбитах.

## Литература

- [1] BryceTech. (2025, March 27). Smallsats by the Numbers 2025. <https://brycetek.com/reports>.
- [2] Абраменков Г. В., Вертаков Н. М., Дронов П. А. Ракетные двигатели АО «ОКБ «Факел» для космических аппаратов — опыт лётного применения и новые разработки // Космическая техника и технологии. 2023. № 4 (43). С. 13–24.
- [3] Ловцов А. С., Селиванов М. Ю., Томилин Д. А., Шагайда А. А., Шашков А. С. Основные результаты разработок Центра Келдыша в области ЭРДУ // Известия РАН. Энергетика. 2020. № 2. С. 3–15. DOI: 10.31857/S0002331020020077.
- [4] Ахметжанов Р. В., Богатый А. В., Дьяконов Г. А., Ким В. П., Меркурьев Д. В., Любинская Н. В., Семенихин С. А., Спивак О. О., Попов Г. А. Электрические ракетные двигатели нового поколения для малых космических аппаратов // Известия РАН. Энергетика. 2019. №3. С. 3–13. DOI: 10.1134/S0002331019030038.
- [5] Кульков В. М., Обухов В. А., Егоров Ю. Г., Белик А. А., Крайнов А. М. Сравнительная оценка эффективности применения перспективных типов электроракетных двигателей в составе малых космических аппаратов // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С. П. Королёва (национального исследовательского университета). 2012. №3(1). С. 187–195. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/sravnitelnaya-otsenka-effektivnosti>

primeneniya-perspektivnyh-tipov-elektro-raketnyh-dvigatelye-v-sostave-malyh-kosmicheskikh (дата обращения: 15.06.2026).

- [6] Охоцимский Д.Е. Исследование движения в центральном поле сил под действием постоянного касательного ускорения // Космические исследования. — 1964. — Т. 2, № 6. — С. 817-842.
- [7] Эльясберг, П. Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. — М. : Наука, 1965. — 540 с.
- [8] Евтушенко, Ю. Г. Влияние касательного ускорения на движение спутника // Прикладная математика и механика. — 1966. — Т. 30, № 3. — С. 594–598.
- [9] Белецкий, В. В. Очерки о движении космических тел. — М. : Наука, 1972. — 360 с.
- [10] Zuiani, F. and Vasile, M., "Extended Analytical Formulas for the Perturbed Keplerian Motion Under a Constant Control Acceleration," *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Vol. 121, No. 3, 2015, pp. 275–300. <https://doi.org/10.1007/s10569-014-9600-5>
- [11] Izzo, D., and Biscani, F. (2015). "Explicit solution to the constant radial acceleration problem." *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 38, No. 4, pp. 733–739..DOI: 10.2514/1.G000116
- [12] Conway, B. (Ed.). *Spacecraft Trajectory Optimization*; Cambridge University Press: Cambridge, UK, 2010, <https://doi:10.1017/CB09780511778025>.
- [13] Shirazi, A.; Ceberio, J.; Lozano, J.A. Spacecraft trajectory optimization: a review of models, objectives, approaches and solutions. *Prog. Aerosp. Sci.* **2018**, 102, 76–98, <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2018.07.007>.
- [14] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Физматгиз, 1961. — 391 с..

- [15] Bryson, A.E.; Ho, Y. *Applied Optimal Control*, 1st ed.; Routledge: New York, NY, USA, 1975; 496p.
- [16] Broucke, R. A., and Prado, A. F. B. A., “Optimal N-impulse transfer between coplanar orbits,” AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, Victoria, British Columbia, Canada, 1994, AAS 93-660.
- [17] Петухов В. Г. Оптимизация многовитковых перелетов между некомпланарными эллиптическими орбитами // Космические исследования. — 2004. — Т. 42, № 3. — С. 260–279.
- [18] Lewis, A.D. The maximum principle of Pontryagin in control and in optimal control. *Handouts for the course taught at the Universitat Politecnica de Catalunya* **2006**. Available online: <https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=22a4c6ba37caf048029197bd5689a51ac9a57ac0> (accessed on 24 October 2023)
- [19] Petropoulos, A.; Russell, R. Low-thrust transfers using primer vector theory and a second-order penalty method. In Proceedings of AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit, Honolulu, Hawaii, 18–21 August 2008.
- [20] Константинов М.С., Мин Тейн. Оптимизация траектории выведения космического аппарата на рабочую гелиоцентрическую орбиту // Электронный журнал «Труды МАИ». 2013. № 67.
- [21] Zhang, C., Topputo, F., Bernelli-Zazzera, F., and Zhao, Y. S. (2015). Low-Thrust Minimum-Fuel Optimization in the Circular Restricted Three-Body Problem. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 38(8), 1501-1510. doi.org
- [22] P. J. Enright and B. A. Conway, Discrete approximations to optimal trajectories using direct transcription and nonlinear programming, *AIM J. of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 15, 994–1002 (1992).

- [23] Topputo, F., and Zhang, C. (2014). Survey of direct transcription for low-thrust space trajectory optimization with applications. *Abstract and Applied Analysis*, 2014, Article 851720.
- [24] Kluever, C.A.; Oleson, S.R. Direct Approach for Computing Near-Optimal Low-Thrust Earth-Orbit Transfers. *J. Spacecr. Rocket.* **1998**, 35, 4, 509–515, <https://doi.org/10.2514/2.3360>.
- [25] Betts, J.T. Very low-thrust trajectory optimization using a direct SQP method. *J. Comput. Appl. Math.* **2000**, 120, 27–40, [https://doi.org/10.1016/S0377-0427\(00\)00301-0](https://doi.org/10.1016/S0377-0427(00)00301-0).
- [26] Ивашкин, В. В., Крылов, И. В. Оптимизация траекторий перелёта космического аппарата с большой и малой тягой к астероиду Апофис // Космические исследования. — 2014. — Т. 52, № 6. — С. 483-491.
- [27] Oshima, K. Regularized direct method for low-thrust trajectory optimization: Minimum-fuel transfer between cislunar periodic orbits. *Adv. Space Res.* **2023**, 72, 6, 2051–2063, <https://doi.org/10.1016/j.asr.2023.05.055>.
- [28] Wu, D.; Cheng, L.; Gong, S.; Baoyin, H. Approximate time-optimal low-thrust rendezvous solutions between circular orbits. *Aerosp. Sci. Technol.* **2022**, 113, 108011, <https://doi.org/10.1016/j.ast.2022.108011>.
- [29] Lin, X.; Zhang, G.; Ma, H. Optimal low-thrust linearized elliptic orbit rendezvous considering the communication window. *Acta Astronaut.* **2022**, 197, 14–22, <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2022.05.004>.
- [30] Huang, A-Y.; Luo, Y-Z.; Li, H-N. Optimization of low-thrust rendezvous between circular orbits via thrust-switch strategy. *J. Guid. Control. Dyn.* **2022**, 45, 6, 1143–1152, <https://doi.org/10.2514/1.G006431>.
- [31] Wu, D.; Guo, X.; Jiang, F.; Baoyin, H. Atlas of optimal low-thrust rephasing solutions in circular orbit. *J. Guid. Control. Dyn.* **2023**, 46, 5, 856-870, <https://doi.org/10.2514/1.G007138>.

- [32] Gurfil, P. Spacecraft rendezvous using constant-magnitude low thrust. *J. Guid. Control. Dyn.* **2023**, 46,11, 2183–2191, <https://doi.org/10.2514/1.G007472>.
- [33] Dong Eui Chang, David F. Chichka, Jerrold E. Marsden. Lyapunov-based transfer between elliptic Keplerian orbits. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - B*, 2002, 2(1): 57-67. doi: 10.3934/dcdsb.2002.2.57
- [34] Anastassios Petropoulos. "Low-Thrust Orbit Transfers Using Candidate Lyapunov Functions with a Mechanism for Coasting," AIAA 2004-5089. AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit. August 2004.
- [35] Ельников Р. В. Использование функций Ляпунова для вычисления локально-оптимального управления вектором тяги при межорбитальном перелете с малой тягой // Космические исследования. — 2021. — Т. 59, № 3. — С. 255-264.
- [36] Bensaid, B., Poëtte, G., and Turpault, R. (2024). An Abstract Lyapunov Control Optimizer: Local Stabilization and Global Convergence. arXiv preprint arXiv:2407.01019.
- [37] Atmaca, D., and Pontani, M. (2024). Near-Optimal Feedback Guidance for Low-Thrust Earth Orbit Transfers. *Aerotecnica Missili and Spazio*, 103(3), 245–259. doi.org
- [38] Ely, Todd A.. “Mean Element Propagations Using Numerical Averaging.” *The Journal of the Astronautical Sciences* 61 (2014): 275 - 304.
- [39] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1974. — 504 с.
- [40] Wu, D., Cheng, L., Gong, S., and Baoyin, H. (2024). Low-Thrust Trajectory Optimization with Averaged Dynamics Using Analytical Switching Detection. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 47(7), 1-15. <https://doi.org/10.2514/1.G007858>

- [41] Петухов В.Г. Метод продолжения для оптимизации межпланетных траекторий с малой тягой. Космические исследования, 2012, т. 50, № 3, стр. 258-270.
- [42] Zhu, Zhengfan et al. "Solving fuel-optimal low-thrust orbital transfers with bang-bang control using a novel continuation technique." *Acta Astronautica* 137 (2017): 98-113.
- [43] Vallado, David A. *Fundamentals of Astrodynamics and Applications*. 4th ed., Microcosm Press, 2013.
- [44] W.M Kaula. *Theory of Satellite Geodesy*. Blaisdell Publishing Company, 1966. 124 p.
- [45] Broucke, R. A., and P. J. Cefola. "On the Equinoctial Orbit Elements." *Celestial Mechanics*, vol. 5, no. 3, 1972, pp. 303-310.
- [46] Hudson, J. S., Scheeres, D. J. Reduction of Low-Thrust Continuous Controls for Trajectory Dynamics // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2009, Vol. 32, No. 3, pp. 780-787.
- [47] Liu, J., Li, G., Zhu, Z.H., Liu, M., Zhan, X. Automatic orbital maneuver for mega-constellations maintenance with electrodynamic tethers// *Aerospace Science and Technology*, 105 (2020), p. 105910. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2020.105910>.
- [48] Pontani, M. Optimal Space Trajectories with Multiple Coast Arcs Using Modified Equinoctial Elements // *Journal of Optimization Theory and Applications*, 191 (2021), pp. 545–574. <https://doi.org/10.1007/s10957-021-01867-2>.
- [49] Jamaludin, N.A.A., Nik Long, N.M.A., Salimi, M., et al. Review of some iterative methods for solving nonlinear equations with multiple zeros // *Africa Matematica*, 30(2019), pp. 355–369 . <https://doi.org/10.1007/s13370-018-00650-3>.

- [50] Herceg, Đ., Herceg, D., Odry, P., Tadić, V. A New Family of Methods for Solving Systems of Nonlinear Equations // Mathematics, 13(2025), p. 3945. <https://doi.org/10.3390/math13243945>.
- [51] Binia, D.A., Boitoa, P., Eidelmanb, Y., Gemignania, L., Gohbergb, I. A fast implicit QR eigenvalue algorithm for companion matrices // Linear Algebra and its Applications, 432 (2010), pp. 2006–2031.
- [52] Hindmarsh, A. C. ODEPACK, A Systematized Collection of ODE Solvers // IMACS Transactions on Scientific Computation, Vol 1., pp. 55-64, 1983.
- [53] Петухов, В.Г. Оптимизация межпланетных траекторий космических аппаратов с идеально-регулируемым двигателем методом продолжения // Космические исследования, том 46, № 3, 2008, с. 224-237.
- [54] Graham, K.F., Rao, A.V. Minimum-Time Trajectory Optimization of Multiple Revolution Low-Thrust Earth-Orbit Transfers // JOURNAL OF SPACECRAFT AND ROCKETS, Vol. 52, No. 3, 2015, pp. 711–727. <https://arc.aiaa.org/doi/10.2514/1.A33187>.
- [55] Graham, K.F., Rao, A.V. Minimum-Time Trajectory Optimization of Low-Thrust Earth-Orbit Transfers with Eclipsing // JOURNAL OF SPACECRAFT AND ROCKETS, Vol. 53, No. 2, 2016, pp. 289–303. <https://dx.doi.org/10.2514/1.A33416>.
- [56] Kitamura K., Yamada, K., Shima, T. Minimum energy coplanar orbit transfer of geostationary spacecraft using time-averaged Hamiltonian // Acta Astronautica, 160(2019), pp. 270–279. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2019.04.033>
- [57] Fakoor, M., Sadeghi, S., Bakhtiari, M. Investigation of Low Thrust Optimal Orbital Transfer from LEO to GEO Considering Circular Orbits // The Journal of the Astronautical Sciences, 67 (2020), pp. 77–97. <https://doi.org/10.1007/s40295-019-00184-1>.

- [58] Wu, D., Wang, W., Jiang, F., Li, J. Minimum-time low-thrust many-revolution geocentric trajectories with analytical costates initialization // *Aerospace Science and Technology*, 119 (2021), 107146. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2021.107146>.
- [59] Sckopke N., Paschmann G., Brinca A. et al. Ion Thermalization in Quasi-Perpendicular Shocks Involving Reflected Ions // *J. Geophys. Res.* 1990. Vol. 95. P. 6337–6352. DOI: 10.1029/JA095iA05p06337.
- [60] Pollock C., Chen L., Schwartz S. et al. Dynamics of Earth’s bow shock under near-radial interplanetary magnetic field conditions // *Physics of Plasmas*. 2022. Vol. 29. No. 11. DOI: 10.1063/5.0089937.
- [61] Haerendel G., Paschmann G., Sckopke N. et al. The Frontside Boundary Layer of the Magnetosphere and Problem of Reconnection // *J. Geophys. Res.* 1978. Vol. 83. P. 3195–3216. DOI: 10.1029/JA083iA07p03195.
- [62] Berchem J., Raeder J., Ashour-Abdalla M. Magnetic Flux Ropes at the High-Latitude Magnetopause // *Geophys. Res. Lett.* 1995. Vol. 22. P. 1189–1192. DOI: 10.1029/95GL01014.
- [63] Lockwood M., Smith M. Low-Altitude Signature of the Cusp and Flux Transfer Events // *Geophys. Res. Lett.* 1989. Vol. 16. P. 879–882. DOI: 10.1029/GL016i008p00879.
- [64] Sibeck D., Croley D. Solar Wind Dynamic Pressure Variations and Possible Ground Signatures of Flux Transfer Events // *J. Geophys. Res.* 1981. Vol. 96. P. 5489–5495. DOI: 10.1029/90JA02357.
- [65] Escoubet C., Schmidt R., Goldstein M. Cluster – Science and Mission Overview // *Space Sci. Rev.* 1997. Vol. 79. P. 11–32. DOI: 10.1023/A:1004923124586.
- [66] Богачев С.А., Овчинников М.Ю., Шувалов В.А. Основные задачи исследования магнитного поля и электрических токов в магнитосфере Земли с

помощью малых космических аппаратов // Космонавтика и ракетостроение. 2024. № 1(134). С. 158–169.

[67] Васильев Д.С., Комаров А.А., Корнеев К.Р., Попова Ю.В., Степанова Е.С., Суслов К.С., Широбоков М.Г. Перспективные проекты применения двигателей АО «ОКБ «Факел» // Космонавтика и ракетостроение, 2025, №3(50), сс 98–114.

[68] Суслов, К.С. Баллистические аспекты вывода на высокоэллиптическую орбиту малого космического аппарата для исследования магнитосферы Земли // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2025. № 30. 21 с. EDN:PEXNWJ <https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2025-30>

# Приложение 1: Вывод коэффициентов Фурье возмущающего ускорения за счёт полярного сжатия Земли

Для вывода коэффициентов  $\alpha_{J_2,0}$ ,  $\alpha_{J_2,1}$ ,  $\beta_{J_2,1}$ ,  $\alpha_{J_2,2}$  и  $\beta_{J_2,2}$  разложения вектора  $\mathbf{a}_{J_2}(\mathbf{x}, F)$  в ряд Фурье представим его в виде

$$\mathbf{a}_{J_2}(\mathbf{x}, F) = -\varepsilon \frac{\mathbf{k}(\mathbf{x}, F)}{(1 - e_x \cos F - e_y \sin F)^6},$$

где  $e = \sqrt{e_x^2 + e_y^2}$ ,  $\varphi = 1 + i_x^2 + i_y^2$ ,  $\varepsilon = 3\mu J_2 R^2 (1 - e^2)^4 / p^4 / \varphi^2$  и

$$\mathbf{k}(\mathbf{x}, F) = \mathbf{k}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{k}_{s1}(\mathbf{x}) \sin F + \mathbf{k}_{c1}(\mathbf{x}) \cos F + \mathbf{k}_{s2}(\mathbf{x}) \sin 2F + \mathbf{k}_{c2}(\mathbf{x}) \cos 2F,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_0(\mathbf{x}) = \\ = \begin{pmatrix} \frac{(e^2+2)\varphi^2}{4} - 3(i_x^2 + i_y^2) - 6(e_x i_y - e_y i_x)^2 - 3b(e_x i_x + e_y i_y)^2 (be^2 - 2) \\ 2(i_x e_y - i_y e_x)(e_x i_x + e_y i_y)(2 + 2b - b^2 e^2) \\ 3(e_x i_y - e_y i_x)(1 - i_x^2 - i_y^2) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{s1}(\mathbf{x}) = \\ = - \begin{pmatrix} e_y \varphi^2 + 12i_x(e_x i_y - e_y i_x) + 12b e_x(i_x e_y - i_y e_x)(e_x i_x + e_y i_y) \\ 4(be_x((e_x^2 - e_y^2)(i_y^2 - i_x^2) - 4e_x e_y i_x i_y) + e_x(i_x^2 - i_y^2) + 2e_y i_x i_y) \\ -2(i_x^2 + i_y^2 - 1)(e_x e_y i_y - e_y^2 i_x - i_x + b e_x^2 i_x + b e_x e_y i_y) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{k}_{c1}(\mathbf{x}) =$$

$$= - \begin{pmatrix} e_x \varphi^2 + 12i_y (e_y i_x - e_x i_y) - 12b e_y (e_x i_x + e_y i_y) (i_x e_y - i_y e_x) \\ 4 (b e_y ((e_x^2 - e_y^2) (i_x^2 - i_y^2) + 4 e_x e_y i_x i_y) + e_y (i_x^2 - i_y^2) - 2 e_x i_x i_y) \\ 2 (i_x^2 + i_y^2 - 1) (e_x e_y i_x - e_x^2 i_y - i_y + b e_y^2 i_y + b e_x e_y i_x) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{k}_{s2}(\mathbf{x}) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{e_x e_y \varphi^2}{2} + 6i_x i_y - 6b (e_x i_x + e_y i_y) (i_y e_x + i_x e_y - b e_x e_y (i_x e_x + i_y e_y)) \\ -2 ((i_y^2 - i_x^2) (1 - b e^2) + 2 b^2 e_x e_y (e_x i_x + e_y i_y) (e_x i_y - e_y i_x)) \\ - (1 - i_x^2 - i_y^2) (-b i_x e_x^3 - b i_y e_x^2 e_y + b i_x e_x e_y^2 + b i_y e_y^3 + i_x e_x - i_y e_y) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{k}_{c2}(\mathbf{x}) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{e_x^2 - e_y^2}{4} \varphi^2 + 3 (i_x^2 - i_y^2) - 3b (b (i_x e_x + i_y e_y)^2 (e_y^2 - e_x^2) + 2 (i_x^2 e_x^2 - i_y^2 e_y^2)) \\ -2 b^2 (i_x i_y (e_x^2 - e_y^2)^2 + e_x e_y (i_y^2 - i_x^2) (e_x^2 - e_y^2)) + 2 i_x i_y (1 - b e^2) \\ (1 - i_x^2 - i_y^2) (-2 b i_x e_x^2 e_y - 2 b i_y e_x e_y^2 + i_y e_x + i_x e_y) \end{pmatrix}$$

в силу определения (21) вектора  $\mathbf{a}_{J_2}(\mathbf{x}, F)$ . Так как вектор  $\mathbf{k}(\mathbf{x}, F)$  содержит в себе конечное число частот по  $F$ , формулы коэффициентов ряда Фурье будут иметь конечный вид. Для их записи достаточно определить величины

$$I_0 = \int_0^{2\pi} \frac{dF}{(1 - e_x \cos F - e_y \sin F)^6} = \pi \frac{15e_x^4 + 30e_x^2 e_y^2 + 15e_y^4 + 40e^2 + 8}{4(1 - e^2)^{11/2}},$$

$$I_{s1} = \int_0^{2\pi} \frac{\sin F dF}{(1 - e_x \cos F - e_y \sin F)^6} = \pi e_y \frac{3(e_x^4 + 2e_x^2 e_y^2 + e_y^4 + 12e^2 + 8)}{4(1 - e^2)^{11/2}},$$

$$I_{c1} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos F dF}{(1 - e_x \cos F - e_y \sin F)^6} = \pi e_x \frac{3(e_x^4 + 2e_x^2 e_y^2 + e_y^4 + 12e^2 + 8)}{4(1 - e^2)^{11/2}},$$

$$I_{s2} = \int_0^{2\pi} \frac{\sin 2F dF}{(1 - e_x \cos F - e_y \sin F)^6} = \pi e_x e_y \frac{21 (e^2 + 2)}{2 (1 - e^2)^{11/2}},$$

$$I_{c2} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2F dF}{(1 - e_x \cos F - e_y \sin F)^6} = \frac{21 \pi (1 - e^2) (e^2 + 2)}{4 (1 - e^2)^{11/2}},$$

$$I_{c1,c1} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 F dF}{(1 - e_x \cos F - e_y \sin F)^6} = \pi \frac{4 + 3 (6e_x^4 + 5e_x^2 e_y^2 - e_y^4) + 42e_x^2 - e^2}{4 (1 - e^2)^{11/2}},$$

$$I_{s1,c1} = I_{c1,s1} = \int_0^{2\pi} \frac{\sin F \cos F dF}{(1 - e_x \cos F - e_y \sin F)^6} = \pi e_x e_y \frac{21 (e^2 + 2)}{4 (1 - e^2)^{11/2}},$$

$$\begin{aligned} I_{s1,c2} = I_{c2,s1} &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin F \cos 2F dF}{(1 - e_x \cos F - e_y \sin F)^6} = \\ &= \pi e_y \frac{2 (e^4 + 5e^2 - 6) + 7 (e^2 + 8) (e_x^2 - e_y^2)}{4 (1 - e^2)^{11/2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{s1,s2} = I_{s2,s1} &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin 2F \sin F dF}{(1 - e_x \cos F - e_y \sin F)^6} = \\ &= \pi e_x \frac{-e_x^4 + 5e_x^2 e_y^2 - 5e_x^2 + 6e_y^4 + 51e_y^2 + 6}{2 (1 - e^2)^{11/2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{s2,c1} = I_{c1,s2} &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin 2F \cos F dF}{(1 - e_x \cos F - e_y \sin F)^6} = \\ &= \pi e_y \frac{6e_x^4 + 5e_x^2 e_y^2 + 51e_x^2 - e_y^4 - 5e_y^2 + 6}{2 (1 - e^2)^{11/2}}, \end{aligned}$$

$$I_{c1,c2} = I_{c2,c1} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos F \cos 2F dF}{(1 - e_x \cos F - e_y \sin F)^6} =$$

$$= \pi e_x \frac{5e_x^4 - 4e_x^2 e_y^2 + 46e_x^2 - 9e_y^4 - 66e_y^2 + 12}{4(1 - e^2)^{11/2}},$$

$$I_{s2,s2} = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 2F dF}{(1 - e_x \cos F - e_y \sin F)^6} = \pi \frac{1 + 5e^2 - 6e_x^4 + 51e_x^2 e_y^2 - 6e_y^4}{(1 - e^2)^{11/2}},$$

$$I_{s2,c2} = I_{c2,s2} = \int_0^{2\pi} \frac{\sin 2F \cos 2F dF}{(1 - e_x \cos F - e_y \sin F)^6} = \pi e_x e_y \frac{63(e_x^2 - e_y^2)}{2(1 - e^2)^{11/2}},$$

$$I_{c2,c2} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 2F dF}{(1 - e_x \cos F - e_y \sin F)^6} = \pi \frac{39e_x^4 - 174e_x^2 e_y^2 + 20e^2 + 39e_y^4 + 4}{4(1 - e^2)^{11/2}},$$

а затем найти коэффициенты  $\alpha_{J_2,0}$ ,  $\alpha_{J_2,1}$ ,  $\beta_{J_2,1}$ ,  $\alpha_{J_2,2}$  и  $\beta_{J_2,2}$  как

$$\alpha_{J_2,0} = -\varepsilon \frac{I_0 \mathbf{k}_0 + I_{s1} \mathbf{k}_{s1} + I_{c1} \mathbf{k}_{c1} + I_{s2} \mathbf{k}_{s2} + I_{c2} \mathbf{k}_{c2}}{2\pi},$$

$$\alpha_{J_2,k} = -\varepsilon \frac{I_{ck} \mathbf{k}_0 + I_{s1,ck} \mathbf{k}_{s1} + I_{c1,ck} \mathbf{k}_{c1} + I_{s2,ck} \mathbf{k}_{s2} + I_{c2,ck} \mathbf{k}_{c2}}{\pi},$$

$$\beta_{J_2,k} = -\varepsilon \frac{I_{sk} \mathbf{k}_0 + I_{s1,sk} \mathbf{k}_{s1} + I_{c1,sk} \mathbf{k}_{c1} + I_{s2,sk} \mathbf{k}_{s2} + I_{c2,sk} \mathbf{k}_{c2}}{\pi}.$$