

На правах рукописи

Суслов Кирилл Сергеевич

Проектирование многовитковых траекторий  
космических аппаратов с малой тягой  
с помощью методов усреднения и параметризации рядами Фурье

Специальность 1.1.7 — Теоретическая механика, динамика машин

Автореферат на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва — 2026

Работа выполнена в Федеральном государственном учреждении «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук» (ИПМ им. М.В. Келдыша РАН).

Научный руководитель: д.ф.-м.н., профессор Овчинников Михаил Юрьевич, главный научный сотрудник, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

Официальные оппоненты: д.т.н., доцент Игнатов Александр Иванович, профессор кафедры, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

к.ф.-м.н., доцент Никонов Василий Иванович, ведущий научный сотрудник, Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук»

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

Защита состоится 10 ноября 2026 г. в 11:00 часов на заседании диссертационного совета 24.1.237.02, созданного на базе ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 125047, Москва, Миусская пл., д.4

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ИПМ им. М.В. Келдыша РАН <http://keldysh.ru>

Автореферат разослан «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2026 г.

Учёный секретарь диссертационного совета  
к.ф.-м.н., доцент

М.Г. Ширококов

## **Актуальность темы исследования**

В настоящее время в космической отрасли отчётливо видна тенденция к миниатюризации космических аппаратов (КА). К причинам этого явления можно отнести уменьшение габаритов и снижение энергопотребления компонентов КА, существующие преимущества по сравнению с крупными платформами, а также возможность сценариев попутного запуска.

Массогабаритные ограничения, накладываемые на конструкцию малых космических аппаратов (МКА), приводят к неэффективности или невозможности установки на них жидкостных реактивных двигателей (ЖРД). Вместо них двигательные установки (ДУ) для МКА конструируются на базе высокоэффективных электрореактивных двигателей малой тяги. По сравнению с ДУ на базе ЖРД они имеют на порядок большие значения удельного импульса, что приводит к снижению необходимого запаса рабочего тела. Однако значение максимально возможной тяги таких двигателей значительно меньше характерных значений силы гравитационного притяжения. Чтобы значительно изменить орбиту МКА с помощью малой тяги, двигатель должен работать в течение десятков, а иногда и сотен суток, причём траектория будет иметь спиральный вид. Такие траектории называются многовитковыми, и их проектирование и исследование являются актуальными задачами в динамике космического полёта.

Построение многовитковой траектории является частью проектирования миссии МКА в околоземном пространстве, если в её рамках планируется значительно изменять орбиту спутника средствами собственной маршевой ДУ, что актуально при попутном запуске МКА и развёртывании многоспутниковых систем. Помимо околоземных миссий, построение многовитковой траектории МКА необходимо при проектировании межпланетных перелётов, а именно на этапах раскрутки у Земли и скрутки у целевого небесного тела.

Первые результаты исследования орбитального движения КА в гравитационном поле небесного тела под действием малой реактивной силы были получены аналитически для частных случаев управления и рассматриваемых орбит (Охоцимский Д.Е., Эльясберг П.Е., Белецкий В.В., Izzo D.). На практике одной из основных задач баллистического анализа является построение траектории, оптимальной с точки зрения затраченного рабочего тела, времени перелёта или других характеристик. Для построения таких траекторий используются методы оптимизации, которые условно можно разделить на две группы. К первой группе относятся вариационные (или не прямые) методы, которые основаны на выведении необходимых условий оптимальности и сведении задачи оптимизации к краевой задаче (Понтрягин Л. С., Петухов В. Г., Константинов М.С., Petropoulos A., Torpato F.). Вторая группа – это параметрические (или прямые) методы, основанные на сведении задачи оптимизации к задаче нелинейного программирования (Conway B. A., Ивашкин В. В., Oshima K., Gurfil P.). Также при построении траекторий КА

часто используется управление на основе функции Ляпунова (Petrooulos A., Ельников Р. В.).

Проектирование многовитковых траекторий КА с малой тягой связано с различными сложностями. Сложность и нелинейность орбитальной динамики приводят к отсутствию интерпретируемой связи между произвольным управлением и траекторией. Построение многовитковых траекторий требует больших вычислительных затрат. Задачи оптимизации многовитковых траекторий являются многоэкстремальными и обладают высокой чувствительностью к начальному приближению. Эти трудности усугубляются необходимостью построения большого числа траекторий при баллистическом анализе миссии, когда приходится варьировать внешние параметры. Для борьбы с трудностями были разработаны и продолжают разрабатываться различные подходы. Снизить время построения отдельной многовитковой траектории можно, усредняя уравнения движения на одном орбитальном витке (Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.). Начальное приближение зачастую ищется в упрощённых моделях. Для упрощения задачи построения оптимальной траектории используются методы продолжения (Петухов В.Г.).

Анализ литературы позволяет сделать вывод, что в настоящее время проводится много исследований, связанных с проектированием многовитковых траекторий КА с малой тягой, а значит, тематика диссертационной работы является актуальной и востребованной.

## **Цель и задачи диссертационной работы**

Целью работы является создание методов проектирования многовитковых траекторий перелёта космического аппарата с малой тягой. Для достижения поставленной цели решаются следующие задачи:

- разработка и анализ модели усреднённого орбитального движения КА с малой тягой,
- разработка методики поиска квазиоптимального управления при межорбитальных перелётах с малой тягой в модели усреднённой динамики,
- применение разработанной методики к задаче баллистического анализа миссии по исследованию магнитосферы Земли.

## **Методология и методы диссертационного исследования**

В работе используются методы небесной механики, теорий возмущений и оптимального управления, а также вычислительной математики. Математическая постановка основана на уравнениях орбитального движения в возмущённой задаче двух тел в терминах оскулирующих элементов эллиптической орбиты. Основу методики составляет метод усреднения из теории возмущений. Задачи поиска оптимального управления с помощью

параметризации сводятся к задачам нелинейного программирования, которые решаются градиентными методами оптимизации.

### **Положения, выносимые на защиту:**

1. Разработана модель усреднённого орбитального движения космического аппарата с двигателем малой тяги. В рамках модели учтены возмущающее ускорение за счёт полярного сжатия Земли и прерывание работы электрореактивного двигателя в тени. С помощью численного моделирования показано, что траектории космических аппаратов, построенные в рамках модели усреднённого движения, аппроксимируют траектории в исходной задаче с достаточной точностью на необходимых для практических задач промежутках времени. Получены приближённые решения в квадратурах и элементарных функциях для эволюции почти круговой орбиты под действием периодического возмущающего ускорения.
2. Разработана методика поиска квазиоптимального управления при многовитковом межорбитальном перелёте с малой тягой. В рамках методики предложены методы решения задачи минимизации затрат рабочего тела при межорбитальном перелёте с двигателем идеально регулируемой тяги и задачи быстрогодействия при межорбитальном перелёте с двигателем ограниченной тяги в классе периодических функций реактивного ускорения и реактивной тяги. Предложен подход к учёту слабой неперiodичности управления с помощью введения изменяющихся во времени параметров, определяющих периодическое управление.
3. Разработанные методики использованы в баллистическом анализе перспективной миссии МКА по исследованию магнитосферы Земли. Оценены возможности вывода единичного МКА с геопереходной орбиты на рабочую орбиту силами собственной ДУ на базе электрореактивного двигателя. Получены оценки количества рабочего тела и ресурса работы ДУ, построены траектории перелёта на рабочую орбиту и обеспечивающие их законы управления. Сделаны выводы о реализуемости миссии.

### **Научная новизна**

В работе предложена новая модель управляемого орбитального движения в возмущённой задаче двух тел, основанная на уравнениях усреднённого движения и аппроксимации возмущающего ускорения. Получены новые приближённые аналитические решения возмущённой задачи двух тел. На основе приближённой модели разработана новая методика проектирования многовитковых траекторий.

### **Теоретическая и практическая значимость работы**

В работе сделан вклад в изучение управляемого движения в рамках усреднённых моделей. Обнаружены связи между спектральными свойствами возмущающего ускорения и эволюцией мгновенной (оскулирующей) орбиты.

Предложенные в работе методики могут быть использованы при баллистическом анализе перспективных миссий в околоземном пространстве. Многовитковые траектории, получаемые с помощью методов, представленных в работе, могут быть использованы в перспективных миссиях малых космических аппаратов.

## **Достоверность результатов**

Достоверность полученных в диссертации результатов обеспечивается тем, что разработанная методика основана на классических методах теоретической механики и теории возмущений. При реализации методики использовались широко известные и проверенные программные комплексы и пакеты. Проведена валидация предложенной методики на модельных задачах. Результаты, полученные в диссертации, соотносятся с результатами, получаемыми другими методами построения многовитковых траекторий КА с малой тягой.

## **Апробация работы**

Результаты работы были представлены на следующих всероссийских и международных конференциях:

- 74-й Международный астронавтический конгресс (г. Баку, 2023).
- Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С. П. Королёва и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства (г. Москва, 2023, 2024, 2025).
- Всероссийская конференция «Проблемы и перспективы космических миссий с ЭРДУ» (г. Махачкала, 2022).
- научная конференция по механике «Десятые Поляховские чтения» (г. Санкт-Петербург, 2024).
- 58-е Научные чтения, посвященные разработке научного наследия и развитию идей К.Э. Циолковского (г. Калуга, 2023)
- 3-я Российская молодёжная научная конференция «Новые горизонты прикладной математики» (г. Москва, 2026)
- 64-я Всероссийская научная конференция МФТИ (г. Москва, 2021)

Результаты работы обсуждались на следующих научных семинарах:

- семинар «Динамика космических систем» отдела №7 в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (под руководством М.Ю. Овчинникова),
- семинар «Динамические системы и механика» в МАИ (НИУ) (под руководством Б.С. Бардина),
- по теории управления и динамике систем в ИПМех РАН (под руководством академика Ф.Л. Черноусько),
- семинар «Динамические системы и механика» в ИКИ РАН (под руководством Н.А. Эйсмонта),

- семинар Баллистического центра ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (под руководством А.Г. Тучина),
- семинар отдела №5 в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (под руководством Ю.Ф. Голубева).

## **Публикации**

По теме диссертации опубликовано 7 научных работ в изданиях, рекомендованных ВАК, в которых изложены основные научные результаты диссертации. Из них 4 статьи опубликованы в журналах, индексируемых в базах научного цитирования Scopus и/или Web of Science.

## **Личный вклад соискателя и соответствие паспорту специальности**

Содержание диссертационной работы и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Постановки задач были сформулированы научным руководителем Овчинниковым М.Ю., результаты исследований обсуждались с соавторами. Во всех работах в соавторстве части, связанные с диссертационной работой, были выполнены соискателем лично.

### **Диссертационная работа соответствует паспорту специальности (ПС)**

1.1.7 «Теоретическая механика, динамика машин» по ряду направлений. При анализе уравнений движения КА используются методы аналитической механики (направление 1 ПС) и динамики космических аппаратов (направление 10 ПС). Для верификации моделей движения проводилось математическое и компьютерное моделирование динамики (направление 14 ПС) КА с двигателем малой тяги. Работа имеет выраженный фундаментальный характер и поэтому относится к физико-математической отрасли наук.

## **Объём и структура диссертации**

Объём диссертационной работы составляет 102 страницы. Работа включает в себя 37 рисунков и 8 таблиц. Список литературы содержит 68 наименований.

## **Содержание работы**

Диссертационная работа состоит из введения, трёх глав, заключения, списка использованной литературы и одного приложения.

**Во введении** проводится обзор существующих подходов к построению многовитковых траекторий КА с малой тягой, сформулированы цели и задачи работы, обоснованы её актуальность и практическая значимость.

**Первая глава** посвящена разработке и анализу модели усреднённой орбитальной динамики КА. В работе исследуется движение в окрестности

небесного тела космического аппарата, оснащённого двигателем малой тяги. Тяга считается малой, если характерная величина реактивного ускорения мала по сравнению с ускорением КА за счёт притяжения небесного тела. В таком случае удобно рассматривать динамику КА в рамках задачи двух тел, возмущённой реактивным ускорением. Уравнения движения выписываются в виде уравнений Гаусса (Vallado D. A.) в терминах модифицированных равноденственных элементов (Kaula W.M.)  $p$ ,  $e_x$ ,  $e_y$ ,  $i_x$ ,  $i_y$  и эксцентрической долготы  $F$ :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, F)\mathbf{a}, \quad (1)$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\sqrt{(1-e_x^2-e_y^2)^3}\mu}{\sqrt{p^3}(1-e_x\cos F-e_y\sin F)} + \mathbf{b}^T(\mathbf{x}, F)\mathbf{a}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{x} = (p, e_x, e_y, i_x, i_y)^T$ ,  $t$  – время,  $\mu$  – гравитационный параметр небесного тела,  $\mathbf{a}$  – вектор реактивного ускорения, записанный в орбитальной системе координат,  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, F)$  и  $\mathbf{b}(\mathbf{x}, F)$  определены в диссертации. В таком виде уравнения движения позволяют использовать условие малости тяги  $\varepsilon = a_{\text{хар}} / a_\mu = p^2 a_{\text{хар}} / (1-e_x^2-e_y^2)^2 / \mu \ll 1$ , где  $a_{\text{хар}}$  – характерная величина модуля реактивного ускорения,  $a_\mu = \mu / a^2$  – величина ускорения за счёт притяжения небесного тела как точечной массы, для разделения переменных на медленную  $\mathbf{x}$  и быструю  $F$  и применить метод усреднения (Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.). Вводится усреднённая система

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{A}(\bar{\mathbf{x}}, \tilde{F}(\bar{\mathbf{x}}, t)) \mathbf{a} dt, \quad (3)$$

где  $\bar{\mathbf{x}} = [\bar{p}, \bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{i}_x, \bar{i}_y]$  – вектор усреднённых орбитальных элементов, а  $\tilde{F}(\bar{\mathbf{x}}, t)$  есть решение уравнения

$$\left. \frac{d\tilde{F}}{dt} = \frac{\sqrt{(1-\bar{e}_x^2-\bar{e}_y^2)^3}\mu}{\sqrt{\bar{p}^3}(1-\bar{e}_x\cos\tilde{F}-\bar{e}_y\sin\tilde{F})} \right|_{\bar{\mathbf{x}}=\text{const}}.$$

Согласно теории метода усреднения, при условии существования предела в (3), решение усреднённой системы (3) аппроксимирует решение исходной системы (1) с точностью порядка  $\varepsilon$  на интервалах времени порядка  $1/\varepsilon$ . Таким образом, рассматривая вместо системы (1)–(2) усреднённую систему (3), можно исследовать приближённую динамику элементов мгновенной орбиты КА на больших интервалах времени при условии малости реактивного ускорения.

В диссертационной работе предлагается рассматривать множество реактивных ускорений, чьи компоненты в орбитальной системе координат близки к периодическим функциям быстрой переменной. Это предположение основано на условии малости реактивного ускорения, наличии в системе медленных и быстрой переменных, а также на анализе законов управления, полученных существующими методами построения многовитковых траекторий. В качестве приближения в первой главе рассматривается реактивное ускорение, чей вектор в орбитальной системе координат является строго периодическим по эксцентрической долготе  $F$  и представимым в виде тригонометрического ряда

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(F) = \mathbf{a}_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (\mathbf{a}_k \cos kF + \mathbf{b}_k \sin kF). \quad (4)$$

Демонстрируется, что в случае, когда реактивное ускорение определяется выражением (4), предел (3) существует и может быть выписан явно. Усреднённая система имеет следующий вид:

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{M}(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{c}. \quad (5)$$

Вектор  $\mathbf{c} = (\alpha_0^r, \alpha_1^r, \beta_1^r, \alpha_2^r, \beta_2^r, \alpha_0^c, \alpha_1^c, \beta_1^c, \alpha_2^c, \beta_2^c, \alpha_0^n, \alpha_1^n, \beta_1^n, \alpha_2^n, \beta_2^n)^T$  содержит только те коэффициенты тригонометрического ряда (4), которые соответствуют частотам  $k = 0, 1, 2$  (здесь нижние индексы отвечают значению частоты, а верхние – компоненте реактивного ускорения).

Таким образом, в случае, когда малое реактивное ускорение является периодическим на витке, на усреднённую динамику мгновенной орбиты КА влияют только компоненты его разложения в тригонометрический ряд по  $F$ , постоянные во времени ( $k = 0$ ) или периодические с частотами  $k = 1, 2$ .

Описанные свойства усреднённой динамики распространяются не только на реактивное ускорение, но и на все возмущающие ускорения, которые можно аппроксимировать тригонометрическими рядами. Таким образом, чтобы учесть возмущающее ускорение, действующее на КА, нужно вычислить соответствующие коэффициенты разложения его в ряд Фурье и подставить их в уравнение (5). В работе предложен метод учёта в модели усреднённого движения возмущающего ускорения за счёт полярного сжатия (второй зональной гармоники геопотенциала) Земли, а также факта выключения ДУ, питаемой солнечными панелями, в тени Земли.

Полученная усреднённая система была исследована на наличие решений в явном виде для движения по околокруговым орбитам как важного практического случая в динамике орбитального движения спутников. В случае, когда  $\bar{\varepsilon} \leq 10^{-2}$  и  $\varepsilon \leq 10^{-3}$ , решение усреднённой системы с достаточной для

практических задач точностью можно выписать в квадратурах, а в случае, когда  $\bar{\varepsilon} \leq 10^{-3}$  и  $\varepsilon \leq 10^{-4}$ , – с помощью конечных формул.

**Вторая глава** посвящена разработке методики построения квазиоптимальных многовитковых траекторий КА с малой тягой. Считается, что изменение мгновенной орбиты КА описывается моделью усреднённой динамики, определяемой уравнением (5), а искомое управление представлено функцией реактивного ускорения

$$\mathbf{a}_{opt}(F) = \boldsymbol{\alpha}_0^{opt} + \sum_{k=1}^2 \left( \boldsymbol{\alpha}_k^{opt} \cos kF + \boldsymbol{\beta}_k^{opt} \sin kF \right) = \mathbf{a}(\mathbf{c}_{opt}, F), \quad (6)$$

где  $\mathbf{c}$  – вектор, стоящий в правой части (5). Гармоники высших порядков отбрасываются, так как они не влияют на усреднённую динамику и при этом осложняют управление угловым движением КА.

Теперь, когда управление параметризовано конечным набором скалярных параметров, а именно компонентами вектора  $\mathbf{c}$ , можно воспользоваться методами параметрической (прямой) оптимизации, а именно свести исходную задачу к задаче нелинейного программирования: требуется найти конечномерный вектор  $\mathbf{c}_{opt} \in \mathbb{R}^{15}$  такой, чтобы

- реализуемое управляющее реактивное ускорение  $\mathbf{a}(\mathbf{c}_{opt}, F)$  лежало в множестве доступных реактивных ускорений  $A$ , определённом заданной математической моделью ДУ;
- усреднённый функционал  $\bar{J}(\mathbf{c})$  на векторе  $\mathbf{c}_{opt}$  достигал минимума:  

$$\bar{J}(\mathbf{c}_{opt}) = \min_{\mathbf{a}(\mathbf{c}, F) \in A} \bar{J}(\mathbf{c});$$
- заданные ограничения на реализуемую траекторию КА в усреднённой модели:  $\mathbf{g}(\mathbf{c}_{opt}) = 0$ .

На траекторию КА в диссертации накладываются ограничения

$$\mathbf{g}(\mathbf{c}) = \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{c}, T) - \mathbf{x}_t,$$

обусловленные выходом на орбиту в модели усреднённой динамики, где  $\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{c}, T)$  – решение дифференциального уравнения (5) с вектором  $\mathbf{c}$  в правой части и начальным условием  $\bar{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}_0$ , а  $\mathbf{x}_t$  – вектор орбитальных элементов целевой орбиты. Выбор таких ограничений обусловлен тем, что модель усреднённой динамики не даёт информации о положении КА на мгновенной орбите.

Приведение исходной задачи к вышеописанной формулировке зависит от конкретных математической модели ДУ и функционала. В рамках диссертации рассматриваются две практически важные задачи: задача оптимизации затрат рабочего тела в модели двигателя с идеально регулируемой тягой (ИРТ) и задача быстрогодействия в модели двигателя ограниченной тяги.

Задача оптимизации затрат рабочего тела в модели двигателя с ИРТ в неусреднённой постановке характеризуется функционалом  $J_m = m(0) - m(T)$ . При решении задачи время перелёта  $T$ , орбитальные элементы начальной орбиты  $\mathbf{x}_0$  и целевой орбиты  $\mathbf{x}_t$  считаются известными и заданными. Характерным свойством этой задачи является возможность переписать минимизируемый функционал в терминах реактивного ускорения. Показано, что минимизация затрат рабочего тела в модели двигателя с ИРТ эквивалентна минимизации функционала

$$J_E = \frac{1}{2} \int_0^T a^2(t) dt.$$

Для перехода к усреднённой динамике вводится усреднённый функционал

$$\bar{J}_E(\mathbf{c}) = \int_0^T (k_0(\mathbf{c}) + \bar{e}_x k_x(\mathbf{c}) + \bar{e}_y k_y(\mathbf{c})) dt.$$

Задача быстродействия в модели двигателя с ограниченной тягой и фиксированной скоростью истечения характеризуется функционалом  $J_T = T$ , причём время перелёта  $T$  уже не является известным и заданным, как в предыдущей задаче, а становится искомой величиной наряду с параметрами управления. Фиксированными остаются величины  $\mathbf{x}_0$  и  $\mathbf{x}_t$ . При сведении к задаче нелинейного программирования к ограничению выхода на целевую орбиту добавляется ограничение на постоянство нормы реактивной тяги

$$|\mathbf{P}_{opt}(t)| = P_{\max}, \quad (7)$$

что является необходимым условием оптимальности при рассмотрении более общего класса кусочно-непрерывных функций управления для этой задачи.

Для простоты учёта ограничения (7) в рамках решения этой задачи изменяется предположение об искомом оптимальном управлении: оно представляется функцией не реактивного ускорения, а реактивной тяги

$$\mathbf{P}_{opt}(F) = \mathbf{a}_0^{opt} + \sum_{k=1}^2 \left( \mathbf{a}_k^{opt} \cos kF + \mathbf{\beta}_k^{opt} \sin kF \right) = \mathbf{P}(\tilde{\mathbf{c}}_{opt}, F), \quad (8)$$

где вектор  $\tilde{\mathbf{c}}$  составлен из компонент векторов  $\mathbf{a}_0$ ,  $\mathbf{a}_k$  и  $\mathbf{\beta}_k$ , как вектор  $\mathbf{c}$  из компонент векторов  $\mathbf{a}_0$ ,  $\mathbf{a}_k$  и  $\mathbf{\beta}_k$ . Таким образом, выполнение условия (7) перестаёт явно зависеть от времени и зависит только от выбора  $\tilde{\mathbf{c}}_{opt}$  и угловой переменной  $F$ . Для его выполнения необходимо и достаточно, чтобы

$$|\mathbf{P}(\tilde{\mathbf{c}}_{opt}, F)| = P_{\max} \quad (9)$$

выполнялось для любого  $F \in [0, 2\pi)$ . В работе показано, что ограничение (9) может быть сведено к выпуклому ограничению типа «неравенство» на параметры управления путём замены переменных.

Далее, в работе предлагается учесть слабую неперiodичность управления, которая наблюдается в решениях, полученных классическими методами построения многовитковых траекторий. Функции реактивного ускорения и тяги при решении вышеописанных задач предлагается продолжить определять выражениями (6) и (8) соответственно. Однако сами параметры управления (в случае реактивного ускорения это компоненты вектора  $\mathbf{c}$ , а в случае реактивной тяги – компоненты вектора  $\mathbf{z}$ ) перестают быть константами и становятся функциями времени  $\mathbf{c}(t)$  и  $\mathbf{z}(t)$ . Определяемые таким образом функции реактивного ускорения/тяги уже не удовлетворяют условиям теории метода усреднения в строгом смысле. Однако численное моделирование показывает, что если параметры управления не меняются слишком быстро от витка к витку, полученные решения остаются близкими к траекториям, полученным в результате применения того же управления в неусреднённой модели движения.

Чтобы задачу оптимизации можно было свести к задаче нелинейного программирования, зависимость параметров управления от времени параметризуется конечным набором скалярных параметров. В диссертации рассматриваются три подхода к параметризации: кусочно постоянная, кусочно-линейная и полиномиальная. Формально они определяются выражениями вида

$$\alpha(t) = \alpha_j, T_j \leq t < T_{j+1}, j = 0, \dots, k-1,$$

$$\alpha(t) = \frac{(T_{j+1} - t)\alpha_j + (t - T_j)\alpha_{j+1}}{T_{j+1} - T_j}, T_j \leq t < T_{j+1}, j = 0, \dots, k-2,$$

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{t}{T} + \dots + \alpha_{k-1} \left( \frac{t}{T} \right)^{k-1}$$

соответственно, где  $\alpha(t)$  обозначает компоненту вектора  $\mathbf{c}$  в случае решения задачи оптимизации затрат топлива или вектора  $\mathbf{z}$  в случае решения задачи быстрогодействия,  $T_j = jT / k$  для кусочно-постоянной параметризации,  $T_j = jT / (k-1)$  для кусочно-линейной параметризации. Параметр  $k \geq 2$  в работе назван порядком параметризации.

С целью демонстрации и валидации методики решены две модельные задачи, решения которых сравнены с известными оптимальными решениями, полученными классическими методами. В качестве первого примера демонстрируется, как методика справляется с решением задач поиска оптимальных по топливу перелётов в модели двигателя с ИРТ. В рассматриваемой модели движения на КА влияют только центральное поле тяготения Земли как материальной точки и управляющее ускорение. Параметры стартовой и целевой орбит соответствуют экваториальной геопереходной орбите (ГПО) и геостационарной орбите (ГСО).

Для получения траектории перелёта между заданными орбитами с почти периодическим управлением решается цепочка задач с возрастающим порядком параметризации  $k$ . На первом шаге решается задача со строго периодическим управлением ( $k_1=1$ ). Затем её решение берётся в качестве начального приближения для следующей задачи, порядок параметризации которой  $k_j > k_{j-1}$ , и так далее по цепочке. В качестве начального приближения для задачи с  $k_1$  берётся  $\mathbf{c}_0 = \mathbf{0}$ . В случае кусочно-постоянной (кусочно-линейной) параметризации повышение  $k$  заключается в делении всех интервалов постоянства (линейности) параметров управления на две равные части с сохранением значений параметров управления в промежуточных точках. В случае полиномиальной параметризации повышение  $k$  заключается в повышении порядка полиномов.

В результате применения решения задачи нелинейного программирования значение функционала  $J_E$ , соответствующее строго периодическому управлению, составило  $0.3194 \text{ м}^2/\text{с}^3$  при эталонном значении  $0.299 \text{ м}^2/\text{с}^3$ . Таким образом, ошибка вычисления оптимизируемого функционала составила 6.5%. Показано, что ошибка уменьшается при использовании почти периодического управления. Полученные значения оптимизируемого функционала падают с ростом параметра  $k$  и, как показывают Таблица 1, приближаются к функционалу эталонного решения. Итоговая ошибка определения функционала  $J_E$  составляет от 0.1% до 0.2%. При этом для кусочно-линейной и полиномиальной параметризаций такая точность достигается уже при  $k = 2$ . То есть в рамках рассматриваемой модельной задачи даже простые зависимости компонент вектора  $\mathbf{c}$  от времени обеспечивают перелёты, близкие к эталонному. Это подтверждает и сравнение профилей эталонного реактивного ускорения (см. Рисунки 1–5).

В качестве второго примера рассматривается оптимальный по времени перелёт с двигателем ограниченной тяги между сверхсинхронной переходной орбитой (ССПО) и ГСО, причём при построении учитываются полярное сжатие Земли и выключение ДУ в области тени. Как и в задаче №1, решается цепочка задач с растущим порядком параметризации  $k$ . На первом шаге задача оптимизации решается в терминах вектора  $\tilde{\mathbf{c}}$ . Затем по полученному вектору  $\tilde{\mathbf{c}}_{\text{opt}}$  определяются вектор  $\mathbf{z}_{\text{opt}}$  и  $\sigma_{\text{opt}}$ . Следующие задачи решаются в терминах  $\mathbf{z}$  и  $\sigma$ . Увеличение параметра  $k$  и формирование начальных приближений аналогичны задаче №1, за исключением того, что здесь полиномиальная параметризация не рассматривается.

Время перелёта, полученное при решении задачи быстрогодействия со строго периодическим управлением, составило 79.88 суток при эталонном значении 75.42 суток, т.е. относительная ошибка составляет 5.9%. Результаты решения модельной задачи с почти периодическим управлением представлены в Таблице 2 и на Рисунках 6–9. Итоговая ошибка определения оптимального

времени перелёта составляет 2.0% для кусочно-постоянной параметризации и 2.5% для кусочно-линейной параметризации, что значительно больше величин ошибок, полученных в первой задаче, но весьма неплохо, учитывая, в насколько узком классе управлений ищется решение. Как можно видеть на Рисунках 8 и 9 профилей реактивной тяги, полученные законы управления значительно отличаются от эталонного, особенно в начале перелёта. В то же время разница в оптимизируемых функционалах невелика, что говорит о многоэкстремальности множества решений рассматриваемой задачи многовиткового перелёта.

**В третьей главе** разработанные методики построения многовитковых траекторий используются для оценки затрат рабочего тела и времени перелёта МКА в рамках перспективной миссии по исследованию магнитосферы Земли. Основная цель миссии – получение новых сведений о солнечно-земных связях, а именно продолжительное наблюдение и исследование различных областей магнитосферы Земли. К наиболее интересующим учёных регионам магнитосферы относятся области вблизи линии Земля-Солнце, в особенности хвост магнитосферы (около 120000 км в направлении от Солнца), а также приполярные каспы – области на высоте около 25000 км над магнитными полюсами Земли.

Исходя из расположения областей наблюдений формируются требования к целевой орбите:  $a_1 = 70000$  км,  $e_1 = 0.71$  и  $i_1 = 90^\circ$ . Поскольку элементы околоземной орбиты определяются в геоцентрической инерциальной системе координат GCRS, а большая полуось целевой орбиты должна лежать на линии Солнце–Земля, долгота восходящего узла  $\Omega_1$  и аргумент перицентра  $\omega_1$  зависят от положения Солнца (см. Рисунок 10). В качестве стартовой орбиты в работе рассматривается геопереходная орбита со следующими параметрами:  $a_0 = 25000$  км,  $e_0 = 0.75$ ,  $i_0 = 51.7^\circ$ ,  $\omega_0 = 0^\circ$ . Долгота восходящего узла  $\Omega_0$  определяется временем запуска и обычно может быть выбрана так, чтобы снизить затраты рабочего тела и/или время перелёта на целевую орбиту.

Для оценки реализуемости миссии предлагается строить траектории перелёта единичного МКА между стартовой и целевой орбитами, полученные как решения задачи быстрогодействия в модели двигателя с ограниченной тягой. Такой выбор связан с тем, что траектории перелёта пересекают радиационные пояса магнитосферы. Малая масса КА не позволяет обеспечить высокую радиационную защиту электронных компонентов. Чтобы снизить вероятность потери миссии из-за выхода из строя, необходимо минимизировать время, которое МКА проводит в радиационных поясах, и, следовательно, минимизировать время перелёта. Поиск траекторий производится в модели усреднённой динамики, учитывающей полярное сжатие Земли и выключение ДУ МКА в тени Земли.

Важной особенностью задачи является то, что параметры  $\Omega_0, \Omega_1$  и  $\omega_1$ , определяющие стартовую и целевую орбиты, не фиксированы. Долгота восходящего узла  $\Omega_1$  и аргумент перицентра  $\omega_1$  целевой орбиты определяются положением Солнца в момент окончания перелёта  $f_C$ . Для полноты исследования этот параметр варьируется в диапазоне  $[0, 2\pi)$  с шагом в 10 градусов. Параметр  $\Omega_0$  оптимизируется. Основные результаты баллистического анализа представлены на Рисунке 11. Полученные результаты показывают, что оптимальное время перелёта не превышает 76 суток, а затраты рабочего тела составляют не более 10 кг. Эти значения находятся в пределах возможностей рассматриваемой платформы с запасом топлива 16 кг и ресурсом работы ДУ 208 суток, что делает построенные в главе траектории технически осуществимыми и говорит о принципиальной реализуемости миссии с точки зрения баллистического анализа.

**В заключении** сформулированы основные результаты, полученные в ходе диссертационного исследования.

## Основные результаты и выводы

В работе предложена методика проектирования многовитковых траекторий КА с двигателем малой тяги на основе методов усреднения и параметризации рядами Фурье. Разработана модель усреднённой орбитальной динамики КА под действием почти периодического реактивного ускорения. Исследование показало высокую точность аппроксимации вековых изменений орбиты КА с помощью предложенной модели. Для случаев малых эксцентриситетов получены явные аналитические решения в квадратурах и элементарных функциях для усреднённой возмущённой задачи двух тел. Использование предложенной модели усреднённого движения КА вместе с параметризацией реактивного ускорения (тяги) рядами Фурье позволило свести задачу поиска оптимальных по топливу (времени) межорбитальных перелётов КА с малой тягой к задаче нелинейного программирования небольшой размерности. С помощью разработанных подходов проведён баллистический анализ перспективной миссии по исследованию магнитосферы на базе МКА. Результаты баллистического анализа подтвердили принципиальную возможность довыведения МКА на рабочие орбиты с ГПО силами собственной ЭРДУ.

Разработанную методику можно применять в баллистическом анализе миссий МКА с двигателями малой тяги для быстрой оценки времени перелёта и затрат рабочего тела, а также для построения траекторий, близких к оптимальным. Уравнения системы усреднённого орбитального движения позволяют исследовать влияние периодических возмущающих ускорений на эволюцию орбиты КА.

## **Список публикаций автора диссертации, в которых отражены основные научные результаты диссертации**

1. Suslov, K.S., Shirobokov, M.G., Tselousova, A.A. Minimum-Energy Transfer Optimization between Near-Circular Orbits Using an Approximate Closed-Form Solution // Aerospace. 2023, 10, 1002.  
<https://doi.org/10.3390/aerospace10121002>
2. Suslov, K.S., Shirobokov, M.G., Trofimov, S.P. Approximate Finite Fourier Solution to the Periodically Perturbed Two-Body Problem // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2024, 47(8), pp. 1698—1708.  
<https://doi.org/10.2514/1.G007900>
3. Ovchinnikov, M.Y., Suslov, K.S., Tkachev, S.S., Shirobokov, M.G., Shestakov, S.A. Academy transaction note “time-optimal low thrust control using finite-Fourier parametrization” // Acta Astronautica. 2026, 239, pp. 478–482.  
<https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2025.11.029>
4. Suslov, K.S. Energy-Optimal Low Thrust Optimization using Finite-Fourier Parametrization with Nonstationary Spectrum // Astrodynamics  
<https://doi.org/10.1007/s42064-026-0312-x>
5. Suslov, K.S., Shirobokov, M.G., Bogachev, S.A. Ballistic analysis of a small spacecraft mission for studying the Earth's magnetosphere // Cosmic Research. 2024, 62(6), pp. 632–642. <https://doi.org/10.1134/S0010952524600987>
6. Суслов, К.С. Приближенное решение задачи двух тел, возмущённой периодическим ускорением // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2023, № 68, 17 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2023-68>
7. Васильев, Д.С., Комаров, А.А., Корнеев, К.Р., Попова, Ю.В., Степанова, Е.С., Суслов, К.С., Широбоков, М.Г. Перспективные проекты применения двигателей АО «ОКБ «Факел» // Космическая техника и технологии. 2025, 3(50), С. 72-88. EDN OMJBWP

Таблица 1

Значения функционала  $J_E$  для решений задачи №1.

|                                              | <b>k</b> | $J_E, \text{м}^2/\text{с}^3$ |
|----------------------------------------------|----------|------------------------------|
| Эталонное решение                            | —        | 0.299                        |
| Периодическое управление                     | 1        | 0.3194                       |
| Управление с кус.-постоянной параметризацией | 2        | 0.3050                       |
|                                              | 4        | 0.3015                       |
|                                              | 8        | 0.3006                       |
| Управление с кус.-линейной параметризацией   | 2        | 0.3006                       |
|                                              | 3        | 0.3004                       |
|                                              | 5        | 0.3003                       |
| Управление с полиномиальной параметризацией  | 2        | 0.3006                       |
|                                              | 3        | 0.3003                       |
|                                              | 4        | 0.3003                       |



Рисунок 1. Профиль реактивного ускорения на эталонном решении задачи №1.

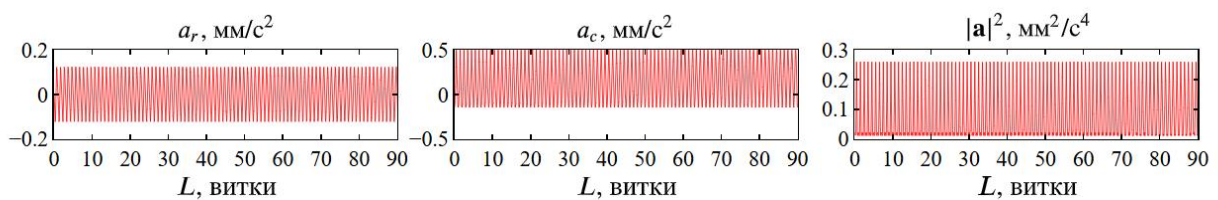


Рисунок 2. Профиль реактивного ускорения на строго периодическом решении задачи №1.

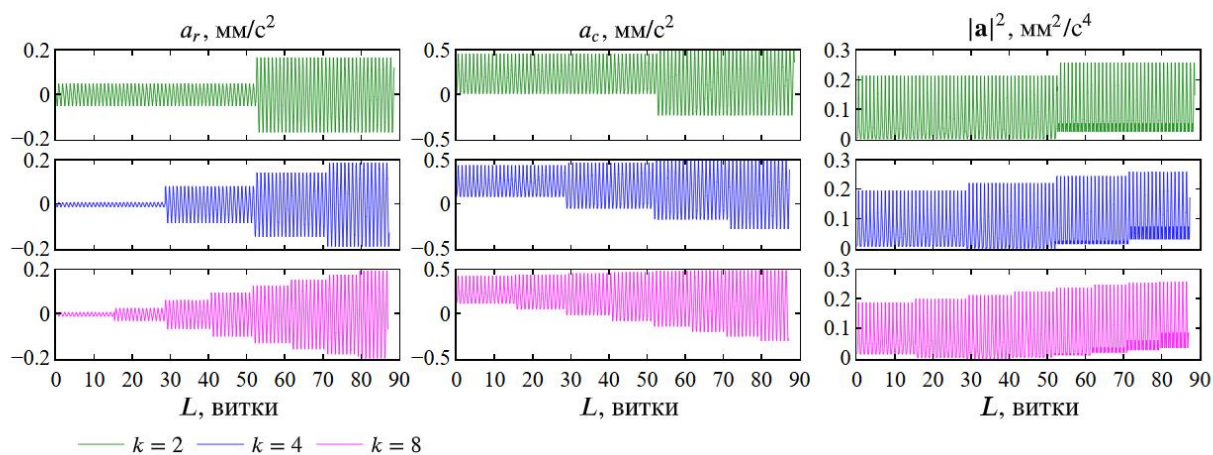


Рисунок 3. Профили реактивного ускорения на решениях задачи №1 с кусочно-постоянной параметризацией.

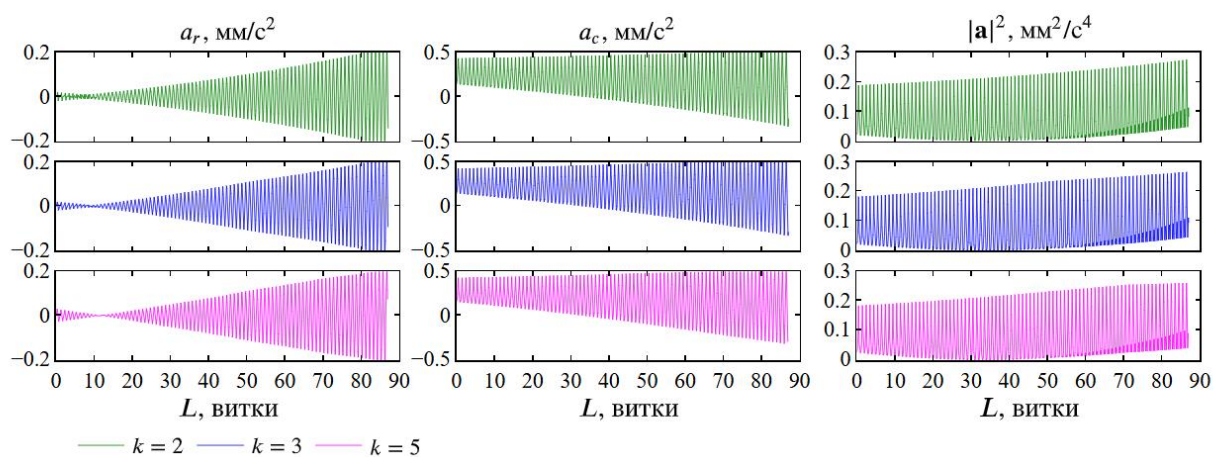


Рисунок 4. Профили реактивного ускорения на решениях задачи №1 с кусочно-линейной параметризацией.

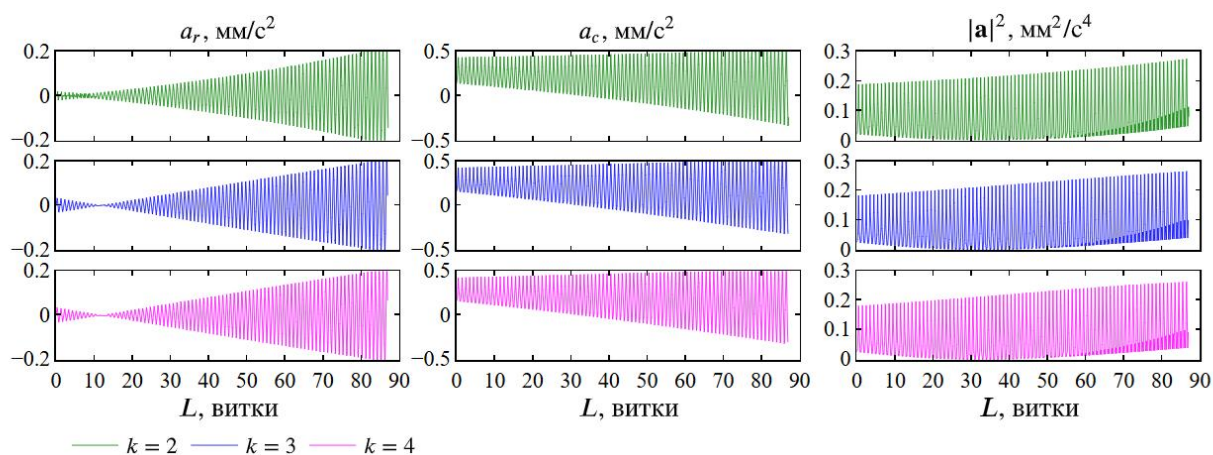


Рисунок 5. Профили реактивного ускорения на решениях задачи №1 с полиномиальной параметризацией.

Таблица 2

## Значения времени перелёта для решений задачи №2.

|                                              | k | T, сутки |
|----------------------------------------------|---|----------|
| Эталонное решение                            | — | 75.42    |
| Периодическое управление                     | 1 | 79.88    |
| Управление с кус.-постоянной параметризацией | 2 | 77.76    |
|                                              | 4 | 76.96    |
|                                              | 8 | 76.96    |
| Управление с кус.-линейной параметризацией   | 2 | 77.58    |
|                                              | 3 | 77.51    |
|                                              | 5 | 77.29    |

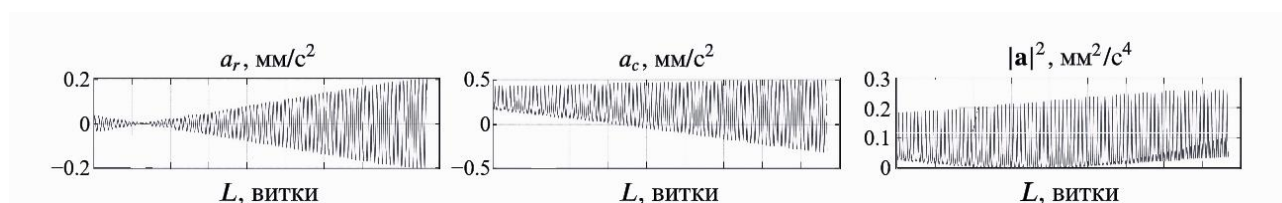


Рисунок 6. Профиль реактивной тяги на эталонном решении задачи №2.

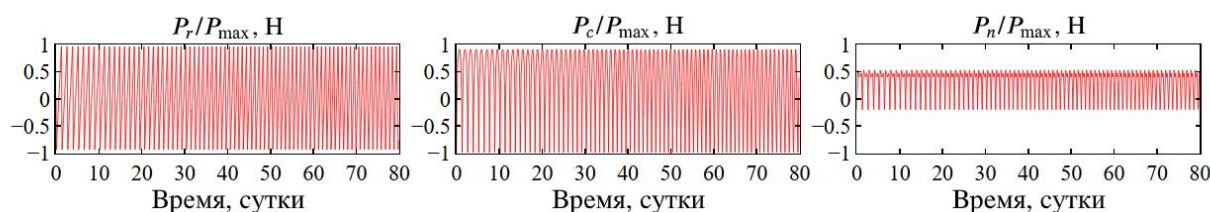


Рисунок 7. Профиль реактивной тяги на строго периодическом решении задачи №2.

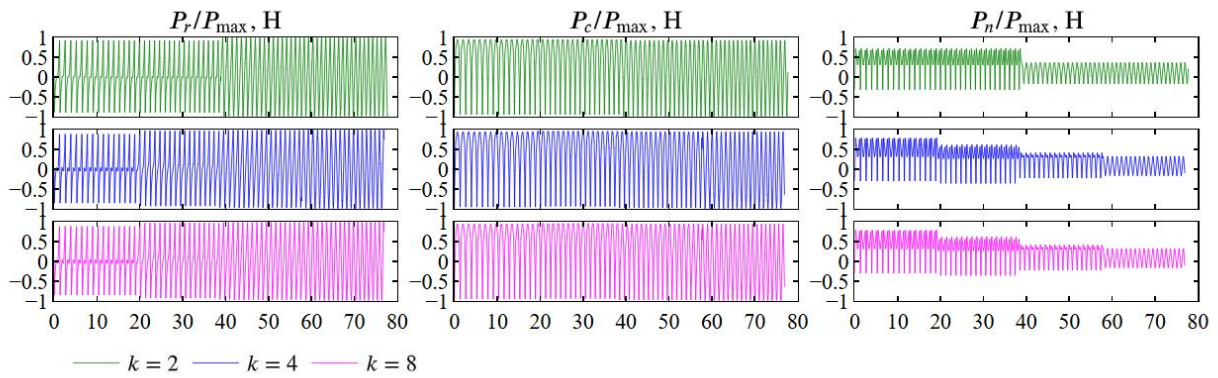


Рисунок 8. Профили реактивной тяги на решениях задачи №2 с кусочно-постоянной параметризацией.

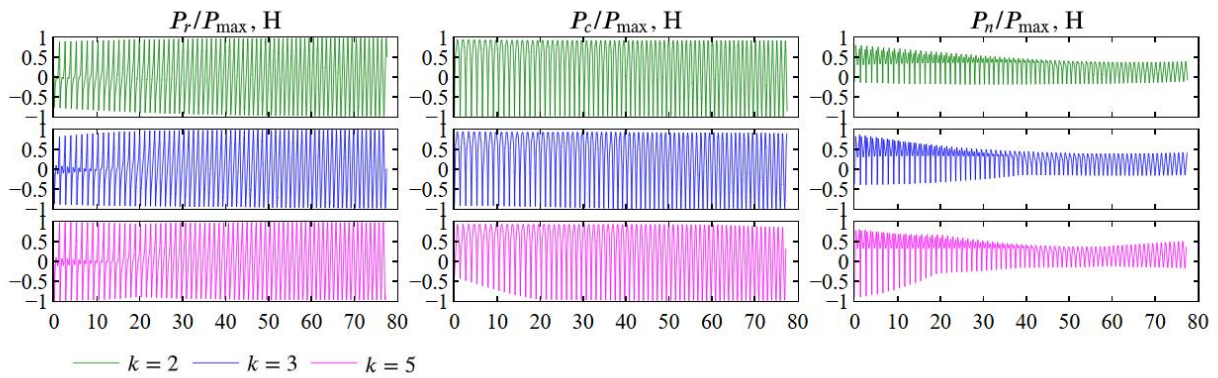


Рисунок 9. Профили реактивной тяги на решениях задачи №2 с кусочно-линейной параметризацией.

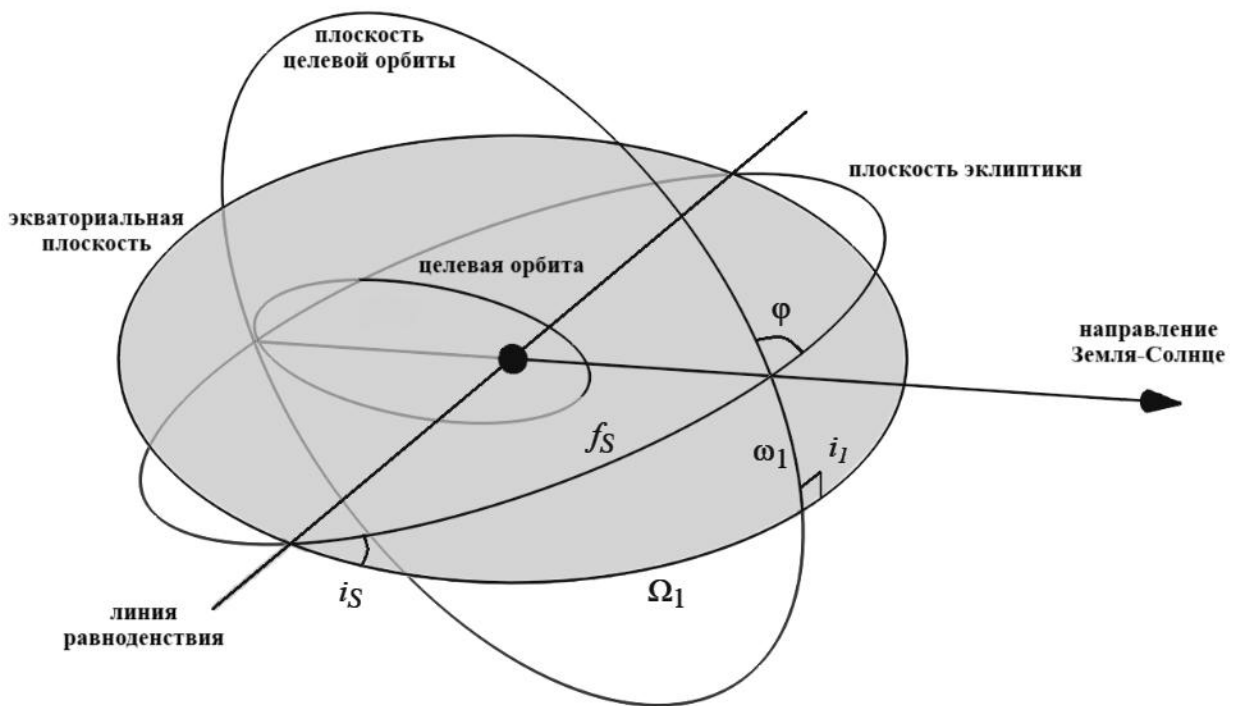


Рисунок 10. Положение целевой орбиты в пространстве.

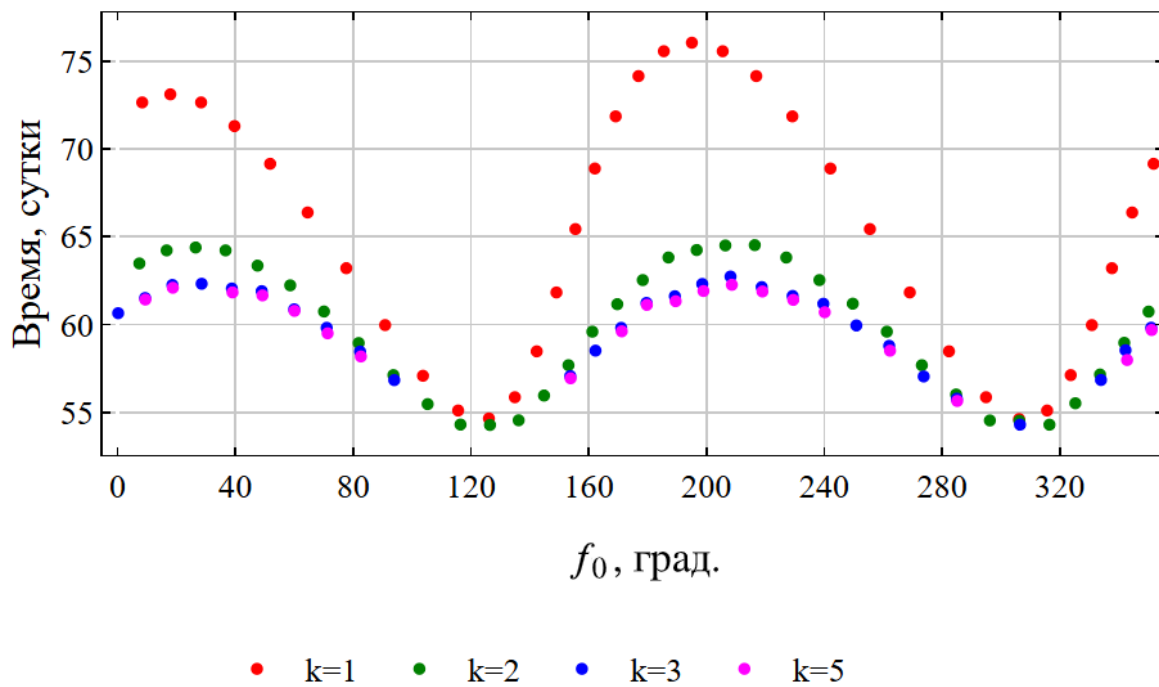


Рисунок 11. Оптимальное время перелёта в зависимости от направления на Солнце в начальный момент времени  $f_C$ .

