

Федеральное государственное учреждение
«Федеральный исследовательский центр
Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша
Российской академии наук»

На правах рукописи

Корнеев Кирилл Романович

**Исследование и аппроксимация многообразия
энергетически оптимальных межпланетных перелётов
с идеально регулируемой тягой**

Специальность 1.1.7 — «Теоретическая механика, динамика машин»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор,
главный научный сотрудник
Овчинников Михаил Юрьевич

Москва — 2026

Оглавление

	Стр.
Основные обозначения и сокращения	5
Введение	7
Глава 1. Методика построения, исследования и аппроксимации многообразия решений энергетически оптимальных задач встречи	27
1.1 Энергетически оптимальная задача встречи	27
1.2 Необходимые условия оптимальности и параметры оптимального управления	29
1.3 Нормировка переменных и связь безразмерной и размерной постановок	30
1.4 Выбор граничных условий и построение модельного многообразия	33
1.5 Метод построения модельного многообразия на основе дискретного продолжения	36
1.6 Методика исследования и аппроксимации многообразия	40
1.7 Символьная регрессия как инструмент получения конечных формул	44
1.8 Критерии отбора аппроксимационных формул и оценка качества аппроксимаций	47
1.9 Выводы к главе 1	50
Глава 2. Исследование многообразия энергетически оптимальных решений задачи встречи в плоской круговой модели движения небесных тел	53
2.1 Мотивационный пример: расслоение изолиний номограммы в эфемеридной задаче Земля–Марс	53
2.2 Переход к модельной постановке и геометрия односвязного модельного многообразия	55
2.3 Кривая локальных оптимумов	58
2.4 Точки оптимальной дальности	60

2.5	Конечные формулы для продолжительности перелёта, непрерывной фазы и квадратичного функционала	62
2.6	Конечные формулы для параметров оптимального управления	67
2.7	Дополнительные конечные формулы для продолжительности перелёта, непрерывной фазы и квадратичного функционала в области малой витковой дальности	72
2.8	Дополнительные конечные формулы для параметров оптимального управления в области малой витковой дальности	74
2.9	Верификация качества конечных формул	77
2.10	Выводы к главе 2	82

Глава 3. Линейные преобразования начальных значений

	сопряжённых переменных	85
3.1	Общий вид R -преобразования и классификация типов	85
3.2	Инварианты расширенной системы и ограничения на матрицу R	87
3.3	Методика численного исследования и построения конечных формул	92
3.4	R -преобразование I типа при изменении начального фазового вектора	95
3.5	Сравнение R -преобразования I типа с простым поворотом	98
3.6	R -преобразование II типа для задания эксцентриситета и аргумента перицентра	100
3.7	Коррекция витковой дальности при R -преобразовании II типа	108
3.8	R -преобразование III типа для задания наклона и долготы восходящего узла	113
3.9	Композиция R -преобразований	119
3.10	Выводы к главе 3	123

Глава 4. Управляющие параметры начального приближения в задаче баллистического проектирования

4.1	Управляющие параметры начального приближения	126
4.2	Алгоритм построения начального приближения	129
4.3	Пример построения начального приближения для перелёта Земля–Марс	133

4.4	Оценка качества начальных приближений для перелётов Земля–Марс и Земля–Венера	140
4.5	Сравнение с продолжением по гравитационному параметру	143
4.6	Постановки задачи с дополнительным импульсом скорости	149
4.7	Применение алгоритма при проектировании миссии Земля–Венера	154
4.8	Сценарии использования и программная реализация	162
4.9	Выводы к главе 4	167
Закключение		170
Список литературы		172
Приложение А. Построение решений модельной краевой задачи		185
Приложение Б. Таблицы коэффициентов аппроксимаций		193
Приложение В. Дополнительные формулы и таблицы		195

Основные обозначения и сокращения

Сокращения

ЭРДУ электрореактивная двигательная установка

КА космический аппарат

ИР идеально регулируемый

ПСИ постоянная скорость истечения

КЛО кривая локальных оптимумов

Основные обозначения

t, t_0, t_f время, начальный и конечный моменты времени

$\mathbf{r}, r$ радиус-вектор положения КА и его длина

$\mathbf{v}$ вектор скорости КА

$\mathbf{a}$ реактивное ускорение

$\mathbf{e}$ единичный вектор направления тяги

μ гравитационный параметр центрального тела

$\mathbf{v}$ постоянная скорость истечения рабочего тела

$\mathbf{p}_r$ сопряжённый положению вектор

$\mathbf{p}_v$ сопряжённый скорости вектор

$\mathbf{z}_0$ начальный вектор сопряжённых переменных: $\mathbf{z}_0 = (\mathbf{p}_{r0}, \mathbf{p}_{v0})$

T продолжительность перелёта

J значение квадратичного функционала

ξ вектор внешних параметров задачи

φ угловая дальность

Φ синодическая фаза в радианах

Ψ нормированная непрерывная фаза

R матрица линейного преобразования или R -преобразование

$\mathbf{q}$ вектор управляющих параметров: $\mathbf{q} = (\lambda, \kappa, \zeta, \chi, j, \gamma)$

λ витковая дальность

κ отношение радиусов модельных круговых орбит

ζ управляющий параметр R -преобразования II типа

χ управляющий угол плоского R -преобразования для задания долготы перицентра

j управляющий параметр R -преобразования III типа

γ управляющий угол пространственного R -преобразования для задания долготы восходящего узла

e эксцентриситет конечной орбиты

a большая полуось конечной орбиты

i наклонение конечной орбиты

Ω долгота восходящего узла

$\bar{\omega}$ долгота перицентра

ω аргумент перицентра

$\hat{x}$ аппроксимация величины x

x^* значение величины x , соответствующее численно найденному оптимальному решению

$\mathcal{A}^{(x)}$ коэффициент-функция конечной формулы для величины x

$C^{(x)}$ числовой коэффициент конечной формулы для величины x

Введение

Проектирование межпланетных перелётов космических аппаратов (КА) с электрореактивными двигательными установками (ЭРДУ) находится на стыке небесной механики, оптимального управления и прикладного проектно-баллистического анализа. В отличие от импульсных схем, траектории с непрерывной тягой формируются в результате длительного управляемого движения, поэтому их характеристики существенно зависят от продолжительности перелёта, параметров двигателя, граничных условий и структуры оптимального управления.

ЭРДУ особенно важны для малых межпланетных аппаратов, поскольку высокий удельный импульс позволяет реализовывать миссии при ограниченной массе рабочего тела. Однако это преимущество сопровождается увеличением продолжительности перелёта и существенным ростом трудоёмкости баллистического проектирования. На ранних этапах анализа миссии требуется многократно оценивать допустимые даты старта, длительность перелёта, расход рабочего тела и параметры управления. В классическом проектно-баллистическом анализе для такого предварительного выбора используются номограммы, связывающие дату старта, продолжительность перелёта и энергетические характеристики траектории. Поэтому особое значение приобретают численно-аналитические методы, позволяющие использовать результаты предварительного исследования не как набор разрозненных численных решений, а как основу для быстрого построения начальных приближений.

В настоящей работе рассматриваются энергетически оптимальные межпланетные перелёты с идеально регулируемой непрерывной тягой. Такая постановка является модельной, но сохраняет основные трудности непрямой оптимизации: наличие двухточечной краевой задачи, чувствительность к начальному вектору сопряжённых переменных и зависимость решения от параметров перелёта. Одновременно она позволяет отделить исследование структуры решений от частных особенностей эфемеридной задачи и перейти к построению модельного многообразия энергетически оптимальных траекторий.

Актуальность темы исследования

ЭРДУ позволяет существенно увеличить располагаемый запас характеристической скорости и тем самым расширяет множество возможных баллистических схем, особенно для малых космических аппаратов. В проектных

исследованиях межпланетных миссий с ЭРДУ приходится анализировать большие массивы траекторий, соответствующие различным датам старта, продолжительностям перелёта, целевым орбитам, характеристикам КА и двигателя. Непосредственное численное решение задачи оптимального управления для каждого набора параметров становится существенным вычислительным ограничением.

Трудность усугубляется тем, что задачи оптимизации межпланетных перелётов с непрерывной тягой, как правило, не имеют универсальных аналитических решений. Известные конечные формулы и асимптотические результаты применимы к специальным случаям: близким орбитам, усреднённым многовитковыми перелётам или постановкам с дополнительными упрощающими предположениями. Для межпланетных перелётов с малым числом витков, существенным изменением радиуса орбиты и непериодическим управлением такие приближения оказываются недостаточными.

Для перелётов с непрерывной тягой предварительный анализ по номограммам имеет дополнительную особенность: изолинии энергетических характеристик могут расслаиваться на области, соответствующие различному числу витков траектории. Поэтому задача выбора окна старта дополняется задачей выбора семейства решений и построения согласованного начального приближения для последующего численного уточнения.

В этих условиях актуальной является задача построения промежуточного численно-аналитического представления, связывающего результаты массового расчёта энергетически оптимальных траекторий с компактными конечными формулами. Такое представление должно быть достаточно простым для интерпретации и дальнейшего использования, но при этом сохранять информацию о структуре оптимальных решений, семействе траекторий и начальных значениях сопряжённых переменных. В настоящей работе эту роль выполняет модельное многообразие решений энергетически оптимальных задач встречи.

Степень научной разработанности темы исследования

Задачи проектирования межпланетных перелётов с непрерывной тягой находятся на пересечении нескольких больших направлений: динамики космического полёта, теории оптимального управления, численных методов решения краевых задач, методов продолжения, регуляризации уравнений движения, проектно-баллистического анализа миссий и современных методов аппроксимации численных данных. Поэтому степень разработанности темы целесообразно

рассматривать не как одну линейную историю, а как совокупность взаимосвязанных научных линий. Для настоящей работы особенно важны три обстоятельства: во-первых, наличие сильной отечественной школы исследования движения с малой тягой, во-вторых, развитость мировых методов не прямой оптимизации и гомотопического продолжения, в-третьих, отсутствие универсальных компактных конечных формул для межпланетных перелётов с малым числом витков и непериодическим управлением.

Отдельное место занимает школа Д.Е. Охоцимского и связанные с ней работы по динамике космического полёта, алгоритмам управления и фундаментальным вопросам баллистики. Эта линия задаёт прямую отечественную, в том числе связанную с ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, традицию постановки и численного исследования задач космической динамики. К этой линии относятся работы по динамике космического полёта, основам механики космического полёта и алгоритмам управления движением [1—3]. В рамках данной традиции важную роль играют графические и численные средства предварительного анализа межпланетных перелётов, включая номограммы выбора окон старта. Работы Т.М. Энеева по методическим вопросам проектирования траекторий с малой тягой и баллистике межпланетных перелётов с электрореактивными двигателями также относятся к этому историко-баллистическому контексту [4; 5]. В более широком учебном и методическом контексте важны также курсы и монографии по механике космического полёта и баллистике, задающие общий аппарат орбитальной динамики и проектирования траекторий [6—8]. Качественные методы небесной механики, представленные работами А.Д. Брюно и соавторов, образуют общий теоретический фон для анализа нелинейных динамических систем, хотя задачи настоящей диссертации решаются преимущественно численно-аналитическими методами [9—11]. Работы А.А. Баранова по маневрированию космических аппаратов дополняют этот фон прикладным взглядом на построение и анализ орбитальных манёвров [12].

Классическая основа задач движения с малой тягой была заложена в работах отечественной школы механики космического полёта. Монография Г.Л. Гродзовского, Ю.Н. Иванова и В.В. Токарева сформировала один из базовых языков описания движения космического аппарата с малой тягой и ограниченной мощностью [13]. Работы В.Н. Лебедева по расчёту движения космического аппарата с малой тягой, включая русскоязычную и англоязычную версии, важны как пример раннего систематического рассмотрения таких

траекторий и методов их вычисления [14; 15]. Существенный вклад в аналитическое понимание перелётов с двигателями постоянной мощности внесли работы В.В. Белецкого, В.А. Егорова и В.А. Ершова, а также обобщающие очерки о движении космических тел [16—19]. Эта линия показывает принципиальную ценность конечных формул и аналитически интерпретируемых зависимостей в задачах космической баллистики.

Прикладная актуальность задач с ЭРДУ подтверждается опытом реальных и проектируемых миссий. К ранним и показательным примерам относятся миссии *Deer Space 1* и *SMART-1*, где электрореактивная тяга использовалась как основной элемент межпланетного или окололунного перелёта [20; 21]. Позднее аналогичная технологическая линия была развита в миссиях к малым телам и планетам: миссии *Hayabusa2*, *Dawn* и *Psyche* демонстрируют востребованность длительных траекторий с электрореактивной тягой для задач исследования астероидов и малых тел [22—25]. Отдельную группу составляют малые космические аппараты и кубсаты, где высокий удельный импульс ЭРДУ позволяет реализовывать схемы, трудно достижимые при использовании только химических двигателей, к этой группе относятся *LunaH-Mar*, *Lunar IceCube* и *Team Miles* [26—28]. В отечественной прикладной традиции близкие вопросы рассматривались в работах по использованию ЭРДУ в миссиях к астероидам и в проектах экспедиций к астероидным телам [29; 30]. Более широкий фон постановки задач дальнего космоса задают обзорно-программные работы Т.М. Энеева [31].

Теоретической основой не прямых методов оптимизации является принцип максимума Л.С. Понтрягина [32]. Его применение к задачам перелёта с непрерывной тягой приводит к расширенной системе уравнений, включающей фазовые и сопряжённые переменные, и к двухточечной краевой задаче. В этом контексте существенны как классические идеи анализа оптимальных траекторий и сопряжённых переменных [33], так и более поздние работы, связывающие преобразования траекторной оптимизации с каноническими и геометрическими структурами [34—36]. В контексте настоящей работы этот слой литературы важен тем, что начальные значения сопряжённых переменных становятся главным объектом аппроксимации и переноса между близкими постановками.

Классическая небесная механика и регуляризация также оказывают влияние на современную траекторную оптимизацию. Преобразования времени и регуляризирующие замены переменных восходят к работам К.Ф. Сундмана и

Т. Леви-Чивиты [37; 38]. Эта линия развивалась в работах по регулярным методам небесной механики, преобразованиям времени и сравнению методов орбитальных преобразований [39—43]. В траекторной оптимизации близкий смысл имеют работы, где анализируется влияние выбора переменных, преобразований состояния и терминальных ограничений на устойчивость вычислений [44; 45]. Эти исследования подтверждают, что удачный выбор переменных и преобразований может существенно упростить численную задачу, даже если исходная физическая постановка остаётся той же.

Большой пласт литературы посвящён аналитическим и усреднённым решениям для специальных случаев движения с ограниченной мощностью. В зарубежной линии существенное место занимают работы С. да Силва Фернандеса и соавторов, где рассматривались квазикруговые, эллиптические, неэкваториальные и нецентральные постановки, а также первые приближения для задач с малой тягой [46—51]. Численные исследования перелётов с ограниченной мощностью и компланарных задач в этой же традиции представлены, в частности, работой Ф. дас Шагас Карвалью, С. да Силва Фернандеса и Р.В. де Мораса [52]. Методы усреднения и аналитические приближения для перелётов с малой тягой развивались также в работах С. Жеффруа и Р. Эпенуа, А. Петропулоса, Р.П. Расселла, Ж.А. Кечичяна и Д.М. Азимова [53—57]. Современный пример аппроксимационного подхода к возмущённой задаче двух тел дают конечные фурье-приближения К.С. Сулова [58]. Эти работы показывают, что аналитические или полуаналитические формулы остаются востребованными, но обычно строятся для более специальных режимов, чем рассматриваемые в настоящей диссертации маловитковые межпланетные перелёты.

В отечественной линии численной оптимизации перелётов с ЭРДУ особую роль играют работы В.Г. Петухова, М.С. Константинова и их соавторов. В работах В.Г. Петухова исследуются многовитковые перелёты между некомпланарными эллиптическими орбитами, методы продолжения и задачи с идеально регулируемым двигателем [59—62]. Отдельно важна работа по обратной связи и квазиоптимальному управлению, показывающая возможность перехода от точного решения краевой задачи к более конструктивным законам управления [63]. Монография М.С. Константинова, В.Г. Петухова и М. Тейна по оптимизации траекторий гелиоцентрических перелётов является одной из основных отечественных опор для рассматриваемой темы [64]. Её дополняют работы по выведению на геостационарную орбиту, гелиоцентрическим перелё-

там, траекториям к Юпитеру и анализу марсианских экспедиций с ядерной ЭРДУ [65—69]. Важным близким направлением являются методы на основе дискретных псевдоимпульсов, представленные обзором Ю.П. Улыбышева [70].

Мировая литература по численным методам оптимизации траекторий с непрерывной тягой существенно шире не прямой пристрелки в классическом виде. Современные обзоры показывают сосуществование прямых, не прямых, гибридных, усреднённых и эвристических подходов [71; 72]. Для межпланетных и окололунных постановок применяются как не прямое оптимальное управление [73], так и специальные алгоритмы для перелётов с уходом и захватом, баллистического захвата и сближения с астероидами [74—76]. Наряду с этим используются эволюционные и роевые методы, которые расширяют область поиска ценой большей вычислительной стоимости и меньшей аналитической прозрачности результата [77; 78]. Для высокоточных моделей важны робастность, быстрый пересчёт и устойчивость к деталям динамической модели, что отражено в работах по высокоточной оптимизации [79].

Одной из центральных вычислительных трудностей не прямых методов является многорешённость краевой задачи. Теоретические аспекты существования нескольких решений и локальной оптимальности обсуждаются в работах Х.Дж. Оберле и Дж.Э. Пруссинга [80; 81]. В прикладных задачах это приводит к необходимости не только найти одно решение, но и понимать структуру пространства решений. Методы гомотопии и продолжения решают эту задачу путём введения вспомогательного параметра и последовательного перехода от простой задачи к исходной [82—84]. Современные работы развивают двойную гомотопию, вероятностную гомотопию, поиск лучшего решения и исследование пространства решений с использованием двух гомотопий [85—88]. Новые варианты продолжения, в том числе с мягкими терминальными условиями, продолжают появляться и в недавней литературе [89]. В диссертации методы продолжения используются не только как вычислительный приём, но и как способ построения параметрического многообразия решений.

Задачи минимизации расхода топлива с постоянной скоростью истечения дополнительно осложняются разрывной структурой управления. Для таких постановок характерно bang-bang управление, и поэтому значительная часть литературы посвящена сглаживанию функции переключения и гомотопическому переходу между энергетически оптимальными и топливно-оптимальными постановками [84; 90; 91]. Сложные режимы работы двигательной установ-

ки, включая несколько режимов работы двигателя, также рассматриваются в современной литературе [92; 93]. Для повышения устойчивости решения используются параллельная пристрелка, аналитические производные и специальные процедуры продолжения [94]. Эти методы важны для практических задач, однако они не устраняют потребность в хорошем начальном приближении: напротив, качество начального приближения часто определяет, к какой ветви решения придёт не прямой метод.

Современные методы машинного обучения дают новый инструмент для получения конечных формул по численным данным. Ранние работы по символическому извлечению законов из данных показали, что регрессионный поиск может восстанавливать компактные аналитические зависимости в задачах механики [95]. Позже идеи автоматического поиска физических выражений были развиты в работах по дифференцируемым символьным графам и методу символьной регрессии PySR [96—98]. Обзор интерпретируемой символьной регрессии систематизирует возможности и ограничения таких методов [99]. Наряду с символьной регрессией появляются альтернативные интерпретируемые архитектуры, например сети Колмогорова-Арнольда [100]. В настоящей работе символьная регрессия используется не как чёрный ящик, а как инструмент отбора структуры конечных формул после предварительного механического анализа, нормировки переменных и репараметризации многообразия.

Таким образом, существующая литература подробно разработала отдельные элементы рассматриваемой проблемы: классическую механику полёта с малой тягой, принцип максимума и сопряжённые переменные, регуляризацию и преобразования переменных, усреднённые и аналитические приближения, методы продолжения и гомотопии, сглаживание разрывного управления, прикладное баллистическое проектирование и интерпретируемую аппроксимацию численных данных. При этом для межпланетных перелётов с малым числом витков остаётся недостаточно разработанной задача построения компактного аппроксимированного многообразия энергетически оптимальных решений, которое одновременно сохраняет связь с не прямой постановкой, допускает интерпретацию через конечные формулы и может использоваться как источник начального приближения в прикладном проектно-баллистическом анализе. На решение этой задачи направлена настоящая диссертационная работа.

Цель и задачи исследования

Целью диссертационной работы является разработка и апробация численно-аналитического метода построения начального приближения, согласованного с выбранным семейством траекторий в расслоении по числу витков, для энергетически оптимальных межпланетных перелётов с идеально регулируемой тягой на основе модельного многообразия решений задачи встречи.

Для достижения указанной цели в работе решаются следующие задачи:

1. разработать методику построения, исследования и аппроксимации модельного многообразия решений задачи встречи с идеально регулируемой тягой, позволяющую описывать расслоение по числу витков;
2. исследовать модельное многообразие решений в плоской круговой модели движения небесных тел, выделить точки оптимальной дальности и построить конечные формулы, связывающие параметры компланарного перелёта между круговыми орбитами с характеристиками траектории и начальными значениями сопряжённых переменных;
3. разработать линейные преобразования начальных значений сопряжённых переменных, позволяющие учитывать изменение начального фазового вектора, эллиптичность и пространственную ориентацию конечной орбиты при переходе от плоской круговой модельной постановки к целевой задаче встречи;
4. построить и апробировать алгоритм формирования начального приближения, согласованного с выбранным семейством траекторий, по заданной дате старта и параметрам целевой задачи встречи, включая прикладные задачи Земля–Марс и Земля–Венера, постановки с дополнительным импульсом скорости в начальный момент времени и последующее продолжение к постановке с постоянной скоростью истечения.

Объект и предмет исследования

Объектом исследования являются семейства энергетически оптимальных решений задач встречи для межпланетных перелётов космического аппарата с идеально регулируемой непрерывной тягой, рассматриваемые с точки зрения расслоения по числу витков.

Предметом исследования являются численно-аналитические методы построения, исследования, аппроксимации и использования модельного многооб-

разия решений задачи встречи с идеально регулируемой тягой, позволяющие описывать расслоение по числу витков и сформировать начальное приближение, согласованное с выбранным семейством траекторий.

Научная новизна

Научная новизна диссертационной работы состоит в следующем:

1. разработана методика применения символьной регрессии для построения конечных формул, аппроксимирующих характеристики решений задачи встречи с идеально регулируемой тягой. Эти конечные формулы являются интерпретируемыми зависимостями, пригодными для последующего построения начальных приближений;
2. предложен подход к описанию расслоения решений задачи встречи с идеально регулируемой тягой. В этом подходе структура расслоения задаётся пересечениями изолиний начальной синодической фазы с кривой локальных оптимумов в точках оптимальной дальности;
3. получены условия на допустимый вид линейных преобразований начальных значений сопряжённых переменных на основе инвариантов, связанных с первыми интегралами расширенной системы уравнений движения;
4. разработан алгоритм построения начального приближения, основанный на согласованном выборе семейства траекторий, продолжительности перелёта и начальных значений сопряжённых переменных.

Теоретическая и практическая значимость работы

Теоретическая значимость работы состоит в том, что исследована структура модельного многообразия энергетически оптимальных решений задачи встречи и предложены конечные формулы, связывающие параметры модельной постановки с характеристиками оптимальной траектории и начальными значениями сопряжённых переменных. Предложенные линейные преобразования задают численно-аналитический способ перехода от плоской круговой модели к более общим пространственным и эллиптическим постановкам.

Практическая значимость работы состоит в возможности использовать предложенные формулы для быстрого построения начальных приближений при проектно-баллистическом анализе межпланетных миссий с ЭРДУ.

Это позволяет сократить число расчётов, выполняемых с нуля, и использовать аппроксимированное модельное многообразие как промежуточное

численно-аналитическое представление между предварительным анализом миссии и последующим численным уточнением траектории.

Результаты работы реализованы в программном инструменте `ILTT Toolbox`, предназначенном для построения начальных приближений и уточнения энергетически оптимальных межпланетных траекторий. Апробация на перелётах Земля–Марс и Земля–Венера показала применимость предложенного подхода к задачам проектного анализа миссий с электрореактивной двигательной установкой.

Результаты диссертационной работы получены и использовались в рамках исследований, выполнявшихся при поддержке Российского научного фонда: проекта № 19-11-00256 «Динамика и навигация космических аппаратов в сложных гравитационных полях» и проекта № 24-11-00038 «Эффективные методы проектирования траекторий и управления движением малых космических аппаратов в дальнем космосе».

Методология и методы исследования

В работе используются методы теоретической механики, оптимального управления, небесной механики и вычислительной математики. Математическая постановка основана на уравнениях движения космического аппарата в центральном гравитационном поле и на принципе максимума Л.С. Понтрягина. Задача оптимального управления сводится к двухточечной краевой задаче для расширенной системы, включающей фазовые и сопряжённые переменные.

Основу методологии составляет построение регулярных связных ветвей решений энергетически оптимальных задач встречи. Такие ветви рассматриваются как модельные многообразия, на которых внешние параметры задачи, начальные значения сопряжённых переменных и характеристики траектории изменяются согласованно. Для численного построения модельных многообразий используется дискретное продолжение по параметрам граничных условий.

Полученные численные решения анализируются в выбранных параметрических представлениях. Если рассматриваемая зависимость имеет малую размерность и регулярную структуру, для неё строится непосредственная аппроксимация. В более сложных случаях применяется иерархический подход: выделяются более простые зависимости, а возникающие коэффициент-функции аппроксимируются отдельно.

Такой подход позволяет строить компактные конечные формулы для характеристик траекторий и начальных значений сопряжённых переменных.

Для построения конечных формул применяется символьная регрессия. При выборе аппроксимационных выражений учитываются не только численные метрики ошибки, но и корректность поведения на рабочей области параметров, согласованность со специальными случаями и пригодность формул для дальнейшего использования.

Качество построенных формул проверяется набором метрик, включающим анализ интегральных ошибок, локального распределения погрешности и, где это применимо, краевых невязок после интегрирования расширенной системы.

Для переноса решений из плоской модельной постановки к пространственной и эллиптической постановкам используются линейные преобразования начальных значений сопряжённых переменных. Итоговая проверка применимости разработанного подхода выполняется через построение начальных приближений, численное решение краевых задач и массовые вычислительные эксперименты на наборах дат старта.

Степень достоверности результатов

Достоверность результатов обеспечивается согласованностью математической постановки с необходимыми условиями оптимальности, численной проверкой граничных условий и систематической верификацией полученных аппроксимаций. Все конечные формулы проверяются на рассматриваемой области параметров, включая области, где поведение решений меняется наиболее существенно.

При построении модельного многообразия контролируются невязки двухточечной краевой задачи и устойчивость перехода между соседними точками параметрической сетки. Для линейных преобразований начальных значений сопряжённых переменных проверяется не только достижение целевых орбитальных элементов, но и побочные деформации витковой дальности и большой полуоси конечной орбиты.

Практическая проверка метода выполнена на задачах перелёта Земля–Марс и Земля–Венера. В этих экспериментах оценены ошибки начального приближения, качество последующего уточнения и вычислительные затраты по сравнению с альтернативными способами построения начального решения.

Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся следующие положения:

1. предложена методика исследования расслоения решений задачи встречи с идеально регулируемой тягой по числу витков. Методика основана на построении модельного многообразия решений двухточечной краевой задачи с помощью дискретного продолжения по параметрической сетке и последующей аппроксимации его характеристик. В рамках методики выделены точки оптимальной дальности, используемые как основной объект аппроксимации и выбора начального приближения;
2. для плоской круговой модели движения небесных тел предложены конечные формулы, полученные с использованием символьной регрессии и позволяющие по параметрам компланарного перелёта между круговыми орбитами выбирать точку оптимальной дальности и вычислять характеристики ИРТ-траектории. Предложенные формулы связывают параметры модельной задачи с продолжительностью перелёта, значением квадратичного функционала, начальной синодической фазой и начальными значениями сопряжённых переменных;
3. разработан аппарат линейных преобразований начальных значений сопряжённых переменных, используемый при переходе от плоской круговой модельной постановки к целевой задаче встречи. Эти преобразования позволяют учитывать изменение начального фазового вектора, эллиптичность и пространственную ориентацию конечной орбиты. Для управляющих параметров этих преобразований предложены конечные формулы, а также построена линейная коррекция витковой дальности;
4. построен и апробирован алгоритм выбора начального приближения, согласованного с выбранным семейством траекторий в расслоении по числу витков. Алгоритм по заданной дате старта и параметрам целевой задачи встречи формирует параметры модельной постановки, выбирает точку оптимальной дальности, вычисляет продолжительность перелёта и использует линейные преобразования для переноса начальных значений сопряжённых переменных к целевой задаче. Показано, что в прикладных задачах Земля–Марс и Земля–Венера получаемые начальные приближения обеспечивают успешное численное уточнение траекторий, в том числе при учёте дополнительного импульса скорости в начальный момент времени и при продолжении к постановке с постоянной скоростью истечения.

Апробация результатов работы

Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих всероссийских и международных научных конференциях:

1. 67-я Всероссийская научная конференция МФТИ (Москва, 31 марта – 5 апреля 2025 г.), доклад «Аппроксимация энергетически оптимальных перелетов между компланарными круговыми орбитами»;
2. Молодежная научная конференция «Новые горизонты прикладной математики» (Москва, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 17–18 апреля 2025 г.), доклад «Аффинные преобразования сопряжённых переменных для оптимизации некомпланарных межорбитальных перелётов»;
3. 12-й симпозиум Международной академии астронавтики по будущему освоению космоса “Future Space Exploration” (Турин, Италия, 9–11 июня 2025 г.), доклад “Specifics of Low-Thrust Interplanetary Trajectory Optimization for the Universal Small Spacecraft Platform”;
4. XLIX Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П. Королёва и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства (Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 28–31 января 2025 г.), доклад «Исследование структуры решений задачи энергетически оптимального перелёта между компланарными эллиптической и круговой орбитами»;
5. XXIII Научно-техническая конференция молодых учёных и специалистов ПАО «РКК “Энергия” имени С.П. Королёва» (Королёв, 28 октября – 1 ноября 2024 г.), доклад «Объединенная двигательная установка на основе ЭРДУ для миссии малого аппарата к Марсу, Луне, астероидам»;
6. 23-я Международная конференция «Авиация и космонавтика» (Москва, 18–22 ноября 2024 г.), доклад «Использование символьной регрессии для аппроксимации решений задачи оптимального межпланетного перелёта с малой тягой»;
7. 75-й Международный астронавтический конгресс (Милан, Италия, 14–18 октября 2024 г.), доклад “Exhaustive Parametric Analysis of Minimum-Energy Coplanar Low-Thrust Transfers”;
8. Молодежная научная конференция «Новые горизонты прикладной математики» (Москва, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 18–19 апреля 2024 г.), доклад «Длительность перелёта между круговыми компланарными орбитами с идеально регулируемым двигателем малой тяги»;

9. XLVIII Академические чтения по космонавтике (Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 23–26 января 2024 г.), доклад «Двухуровневая схема оптимизации перелёта Земля–Марс малого космического аппарата по гибридной схеме с электрореактивной двигательной установкой»;
10. 65-я Всероссийская научная конференция МФТИ (Москва, Долгопрудный, Жуковский, 3–8 апреля 2023 г.), доклад «Анализ структуры решений краевых задач принципа максимума при оптимизации перелёта Земля–Марс»;
11. XLVI Академические чтения по космонавтике (Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 25–28 января 2022 г.), доклад «Переход к переменным Кустаанхеймо–Штифеля как каноническое преобразование уравнений оптимального движения с малой тягой»;
12. 64-я Всероссийская научная конференция МФТИ (Москва, Долгопрудный, Жуковский, 29 ноября – 3 декабря 2021 г.), доклад «Замена фазовых переменных как точечное каноническое преобразование в задачах оптимального орбитального перелета»;
13. 63-я Всероссийская научная конференция МФТИ (Москва, Долгопрудный, Жуковский, 23–29 ноября 2020 г.), доклад «Построение оптимальной траектории КА с использованием регуляризованных уравнений движения».

Результаты работы также обсуждались на следующих научных семинарах:

1. семинар «Динамика космических систем» отдела №7 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (под руководством М.Ю. Овчинникова);
2. семинар по механике, управлению и информатике Института космических исследований РАН (под руководством Р.Р. Назирова и Н.А. Эйсмонта);
3. семинар по теории управления и динамике систем Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН (под руководством академика Ф.Л. Черноушко);
4. семинар Баллистического центра ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (под руководством А.Г. Тучина);
5. семинар «Механика и управление движением» отдела №5 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (под руководством Ю.Ф. Голубева);

6. семинар «Динамические системы и механика» Московского авиационного института (под руководством Б.С. Бардина и П.С. Красильникова);
7. семинар «Механика космического полета», проводимый на кафедре «Космические системы и ракетостроение» МАИ (под руководством В.Г. Петухова).

Публикации по теме диссертации

По теме диссертации опубликовано 19 научных работ, в том числе 6 работ в изданиях, рекомендованных ВАК РФ, из них 2 статьи в изданиях, индексируемых в международных базах научного цитирования Scopus и Web of Science, а также 13 работ в изданиях и материалах научных конференций, индексируемых в Российском индексе научного цитирования. Получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ, относящейся к программной реализации разработанного метода.

Основные публикации автора по теме диссертации в изданиях, рекомендованных ВАК РФ:

1. Korneev K.R., Trofimov S.P. Low-Thrust Trajectory Optimization in Kustaanheimo–Stiefel Variables // Cosmic Research. 2024. Vol. 62, no. 3. P. 256—265. URL: <https://link.springer.com/10.1134/S0010952524600288>.
2. Korneev K., Trofimov S. Parametric Analysis of Minimum-Energy Trajectories between Coplanar Circular Orbits // Cosmic Research. 2025. Vol. 63. P. 550—568. URL: <https://link.springer.com/10.1134/S0010952525601410>.
3. Корнеев К.Р., Трофимов С.П. Использование регулярных переменных в задаче оптимизации траектории КА с малой тягой // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2022. № 32. С. 1—36. URL: <https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2022-32>.
4. Овчинников М.Ю. [и др.]. Миссия к Марсу на базе универсальной малогабаритной платформы с ЭРДУ // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2024. № 44. С. 1—32. URL: <https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2024-44>.
5. Овчинников М.Ю. [и др.]. Миссия к Венере на базе универсальной малогабаритной платформы с ЭРДУ // Препринты ИПМ им. М. В.

- Келдыша. 2026. № 7. С. 1—30. URL: <https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2026-7>.
6. Корнеев К.Р. Аффинные преобразования сопряжённых переменных в задаче энергетически оптимального перелёта // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2025. № 32. С. 1—33. URL: <https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2025-32>.

Публикации автора по теме диссертации в изданиях и материалах научных конференций, индексируемых в Российском индексе научного цитирования:

1. Васильев Д.С., Комаров А.А., Корнеев К.Р. [и др.]. Перспективные проекты применения двигателей АО «ОКБ «ФАКЕЛ» // Космическая техника и технологии. 2025. 3(50). С. 72—88.
2. Корнеев К.Р. Использование символьной регрессии для аппроксимации решений задачи оптимального межпланетного перелёта с малой тягой // 23-я Международная конференция «Авиация и космонавтика». Москва, 2024.
3. Корнеев К.Р. Длительность перелёта между круговыми компланарными орбитами с идеально регулируемым двигателем малой тяги // Новые горизонты прикладной математики: тезисы молодежной научной конференции. Москва : ИПМ им. М. В. Келдыша, 2024. URL: <https://keldysh.ru/ngpm/2024/proc.pdf>.
4. Корнеев К.Р. [и др.]. Двухуровневая схема оптимизации перелёта Земля–Марс малого космического аппарата по гибридной схеме с электрореактивной двигательной установкой // XLVIII Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С. П. Королёва и других выдающихся отечественных учёных — пионеров освоения космического пространства. Т. 2. Москва : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2024. С. 316—318.
5. Korneev K. [et al.]. Exhaustive Parametric Analysis of Minimum-Energy Coplanar Low-Thrust Transfers // Proceedings of the 75th International Astronautical Congress. Milan, Italy, 2024. P. 14.
6. Корнеев К.Р. Аппроксимация энергетически оптимальных перелётов между компланарными круговыми орбитами // 67-я Всероссийская научная конференция МФТИ. Москва, 2025.
7. Корнеев К.Р. Аффинные преобразования сопряжённых переменных для оптимизации некомпланарных межорбитальных перелётов // Мо-

- лодежная научная конференция «Новые горизонты прикладной математики». Москва : ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2025.
8. Корнеев К.Р. Исследование структуры решений задачи энергетически оптимального перелёта между компланарными эллиптической и круговой орбитами // XLIX Академические чтения по космонавтике. Москва : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2025.
 9. Корнеев К.Р., Трофимов С.П. Анализ структуры решений краевых задач принципа максимума при оптимизации перелёта Земля–Марс // Труды 65-й Всероссийской научной конференции МФТИ. Секция динамики и управления движением космических аппаратов. Прикладная математика и информатика. Москва : МФТИ, 2023. С. 49–51. URL: <https://mipt.ru/upload/medialibrary/b36/prikladnaya-matematika-i-informatika.pdf>.
 10. Корнеев К.Р., Трофимов С.П. Переход к переменным Кустаанхеймо — Штифеля как каноническое преобразование уравнений оптимального движения с малой тягой // Сборник тезисов XLVI Академических чтений по космонавтике. Т. 1. Москва, 2022. С. 353–356. URL: <https://press.bmstu.ru/catalog/item/7554>.
 11. Корнеев К.Р., Трофимов С.П. Замена фазовых переменных как точечное каноническое преобразование в задачах оптимального орбитального перелета // Труды 64-й Всероссийской научной конференции МФТИ. Секция динамики и управления движением космических аппаратов. Прикладная математика и информатика. Москва : МФТИ, 2021. С. 65–67.
 12. Корнеев К.Р., Трофимов С.П. Построение оптимальной траектории КА с использованием регуляризованных уравнений движения // Труды 63-й Всероссийской научной конференции МФТИ. Секция динамики и управления движением космических аппаратов. Прикладная математика и информатика. Москва : МФТИ, 2020. С. 63–65.
 13. Корнеев К.Р., Степанова Е.С. Объединенная двигательная установка на основе ЭРДУ для миссии малого аппарата к Марсу, Луне, астероидам // XXIII Научно-техническая конференция молодых учёных и специалистов ПАО «РКК «Энергия». Королёв, 2024.

Результат интеллектуальной деятельности, связанный с программной реализацией разработанного метода:

1. Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ. Interplanetary Low Thrust Trajectories Toolbox (ILTT_Toolbox) / К.Р. Корнеев, М.Ю. Овчинников, А.С. Кузнецова ; Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук». № 2025680250 ; заявл. 07.08.2025 ; опубл. 02.09.2025, 2025683296 (Рос. Федерация).

Личный вклад автора

Основные результаты, выносимые на защиту, получены автором лично. Автором выполнены постановка и реализация вычислительных экспериментов, построение модельного многообразия решений энергетически оптимальных задач встречи, анализ структуры полученных семейств решений, построение и верификация конечных формул для характеристик траекторий и начальных значений сопряжённых переменных.

Автором разработаны линейные преобразования начальных значений сопряжённых переменных, выполнено численное исследование их свойств, построены формулы для управляющих параметров преобразований и проведена проверка качества получаемых начальных приближений. Автором также выполнена программная реализация алгоритмов, использованных в диссертационной работе, включая реализацию вычислительной схемы в составе ILTT Toolbox.

В совместных публикациях соавторам принадлежат постановочные, прикладные и консультационные элементы, связанные с общим контекстом проектирования миссий, выбором прикладных постановок и обсуждением результатов. Разработка основного численно-аналитического метода, получение конечных формул, анализ модельного многообразия и подготовка результатов, выносимых на защиту, выполнены автором лично.

Соответствие диссертации паспорту специальности

Диссертационная работа соответствует паспорту научной специальности 1.1.7 «Теоретическая механика, динамика машин». Согласно паспорту специальности, данная научная специальность относится к области естественных наук, группе научных специальностей 1.1 «Математика и механика», ученые степени по ней присуждаются по физико-математическим и техническим отраслям науки.

Содержание диссертации соответствует нескольким направлениям исследований, указанным в паспорте специальности. При выводе расширенной системы уравнений движения космического аппарата с непрерывной тягой, использовании необходимых условий оптимальности и анализе сопряжённых переменных применяются методы классической механики и аналитической динамики (направление 1 ПС).

Постановка энергетически оптимальной задачи встречи, построение параметров оптимального управления и разработка алгоритма выбора начального приближения относятся к задачам управления движением механических систем (направление 5 ПС). Рассматриваемые межпланетные перелёты, модель движения в центральном гравитационном поле, орбитальные элементы и задачи встречи космического аппарата с небесным телом соответствуют направлению небесной механики и астродинамики (направление 9 ПС), а также направлению динамики летательных аппаратов и космических конструкций (направление 10 ПС).

Построение модельного многообразия решений, массовые численные расчёты, аппроксимация характеристик энергетически оптимальных траекторий конечными формулами, верификация этих формул и их использование в алгоритме выбора начального приближения относятся к математическому и компьютерному моделированию кинематики и динамики механических систем (направление 14 ПС).

Таким образом, диссертационная работа соответствует паспорту специальности 1.1.7 «Теоретическая механика, динамика машин» по направлениям 1, 5, 9, 10 и 14. Работа имеет фундаментальный численно-аналитический характер и относится к физико-математической отрасли наук.

Объём и структура диссертации

Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и 3 приложений. Полный объём диссертации составляет 198 страниц, включая 53 рисунка и 32 таблицы. Список литературы содержит 124 наименования.

В первой главе формулируется методика построения, исследования и аппроксимации модельного многообразия решений энергетически оптимальных задач встречи. Вводятся базовая математическая постановка, расширенная система уравнений, параметры модельной задачи и схема дискретного продолжения по параметрам.

Во второй главе исследуется многообразие решений энергетически оптимальной задачи встречи в плоской круговой модели движения небесных тел. Строятся конечные формулы для продолжительности перелёта, функционала, синодической фазы и начальных значений сопряжённых переменных, а также проводится проверка качества этих формул.

В третьей главе разрабатываются линейные преобразования начальных значений сопряжённых переменных, позволяющие переносить решения плоской круговой модели к более общей постановке с изменённым начальным фазовым вектором, эллиптичностью и пространственной ориентацией конечной орбиты. Рассматриваются преобразования I, II и III типов, их композиция и верификация.

В четвёртой главе полученные конечные формулы и преобразования используются для построения начального приближения в прикладных задачах баллистического проектирования. Рассматриваются примеры перелётов Земля–Марс и Земля–Венера, проводится сравнение с методом продолжения по гравитационному параметру и обсуждается программная реализация метода.

В заключении сформулированы основные результаты диссертационной работы и направления дальнейших исследований.

Глава 1. Методика построения, исследования и аппроксимации многообразия решений энергетически оптимальных задач встречи

В настоящей главе излагается методическая основа дальнейшего исследования. Сначала формулируется энергетически оптимальная задача встречи и выводятся необходимые условия оптимальности. Затем вводится безразмерная постановка, задаются модельные граничные условия и определяется модельное многообразие как регулярная связная ветвь решений, построенная на выбранной области внешних параметров. После этого описывается метод его численного построения на основе дискретного продолжения, а также общая схема исследования и аппроксимации полученного множества решений. В этой схеме компоненты модельного многообразия могут аппроксимироваться непосредственно либо, при более сложной структуре зависимости, через иерархию коэффициент-функций. В заключительных разделах главы обосновывается выбор символьной регрессии в качестве основного инструмента получения конечных формул и формулируются критерии отбора аппроксимационных выражений, включая расширенную проверку качества на рабочей области параметров. Тем самым первая глава задаёт единый методический каркас, который в дальнейшем используется для построения конечных формул, анализа линейных преобразований начальных значений сопряжённых переменных и формирования начального приближения.

1.1 Энергетически оптимальная задача встречи

В качестве исходной постановки в работе рассматривается энергетически оптимальная задача встречи космического аппарата в центральном гравитационном поле. Под задачей встречи понимается задача нахождения такого управления, которое переводит космический аппарат между двумя заданными точками фазового пространства за фиксированное время и минимизирует выбранный функционал качества.

Изложение ведётся в безразмерной форме. Такой выбор обусловлен тем, что безразмерные переменные позволяют выделить общую структуру решений,

не связанную с конкретным выбором единиц измерения и параметрами рассматриваемой миссии. Размерная интерпретация используемых величин задаётся принятой системой нормировки.

В безразмерных переменных движение космического аппарата описывается уравнениями задачи двух тел с реактивным ускорением [13]:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{a}, \end{cases} \quad (1.1)$$

где $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$ обозначают безразмерные векторы положения и скорости космического аппарата, $r = \|\mathbf{r}\|$, а $\mathbf{a}$ — безразмерное реактивное ускорение. Такая запись соответствует модели движения в центральном гравитационном поле при выборе системы нормировки, в которой гравитационный параметр центрального тела принимается равным единице.

В работе принимается модель идеально регулируемой тяги. В рамках этой модели управление задаётся непосредственно реактивным ускорением $\mathbf{a}(t)$, а критерием оптимальности служит квадратичный функционал

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \|\mathbf{a}(t)\|^2 dt \rightarrow \min. \quad (1.2)$$

Минимизация данного функционала соответствует минимизации энергетических затрат в рамках принятой модели и тем самым определяет класс энергетически оптимальных траекторий.

Рассматривается задача оптимального управления, в которой время перелёта выступает внешним параметром:

$$t_0 = 0, \quad t_f = T, \quad T > 0. \quad (1.3)$$

Начальное и конечное состояния считаются фиксированными, то есть рассматривается задача встречи:

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0, \quad (1.4)$$

$$\mathbf{r}(t_f) = \mathbf{r}_f, \quad \mathbf{v}(t_f) = \mathbf{v}_f. \quad (1.5)$$

Следовательно, энергетически оптимальная задача встречи состоит в нахождении такого управления $\mathbf{a}(t)$, которое переводит космический аппарат из

заданного начального состояния в заданное конечное состояние за фиксированное время и при этом минимизирует функционал J .

Сформулированная постановка служит основой для применения принципа максимума Понтрягина [32]. На её основе выводятся необходимые условия оптимальности и получается система уравнений, описывающая энергетически оптимальные траектории в расширенном фазовом пространстве.

1.2 Необходимые условия оптимальности и параметры оптимального управления

Для задачи встречи, сформулированной в предыдущем разделе, необходимые условия оптимальности выводятся на основе принципа максимума Понтрягина [32]. Введём сопряжённые переменные $\mathbf{p}_r(t)$ и $\mathbf{p}_v(t)$, соответствующие векторам положения и скорости, и объединим их в вектор

$$\mathbf{p}(t) = (\mathbf{p}_r(t), \mathbf{p}_v(t)). \quad (1.6)$$

Тогда функция Гамильтона–Понтрягина для рассматриваемой задачи имеет вид

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{p}_r, \mathbf{p}_v, \mathbf{a}) = \mathbf{p}_r \cdot \mathbf{v} + \mathbf{p}_v \cdot \left(-\frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{a} \right) - \frac{1}{2} \|\mathbf{a}\|^2. \quad (1.7)$$

Поскольку начальное и конечное состояния космического аппарата фиксированы, а время перелёта считается заданным, условие стационарности по переменной $\mathbf{a}$ записывается в виде

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{p}_v - \mathbf{a} = \mathbf{0}. \quad (1.8)$$

Отсюда следует

$$\mathbf{a} = \mathbf{p}_v. \quad (1.9)$$

Следовательно, оптимальное управление на траектории полностью определяется сопряжённым вектором $\mathbf{p}_v(t)$. После подстановки этого выражения

уравнения движения и сопряжённые уравнения принимают вид

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{p}_v, \\ \dot{\mathbf{p}}_r = \frac{1}{r^3}\mathbf{p}_v - \frac{3}{r^5}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}_v)\mathbf{r}, \\ \dot{\mathbf{p}}_v = -\mathbf{p}_r. \end{cases} \quad (1.10)$$

Тем самым энергетически оптимальная траектория описывается системой из двенадцати обыкновенных дифференциальных уравнений для векторов $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{p}_r$ и $\mathbf{p}_v$.

Полученная система образует двухточечную краевую задачу. Начальные значения $\mathbf{r}(t_0)$ и $\mathbf{v}(t_0)$ считаются заданными, тогда как начальные значения сопряжённых переменных $\mathbf{p}_{r0}$ и $\mathbf{p}_{v0}$ остаются неизвестными и должны быть определены из условия выполнения заданных конечных ограничений. Таким образом, пространство неизвестных параметров задачи имеет размерность шесть и естественным образом параметризуется начальными значениями сопряжённых переменных.

Это обстоятельство определяет выбор параметров дальнейшей численной процедуры. Поскольку оптимальное управление на всей траектории однозначно восстанавливается по $\mathbf{p}_v(t)$, а эволюция сопряжённых переменных определяется их начальными значениями, введём обозначение

$$\mathbf{z} = (\mathbf{p}_{r0}, \mathbf{p}_{v0}). \quad (1.11)$$

Далее вектор $\mathbf{z}$ рассматривается как набор параметров оптимального управления. В последующих разделах эти параметры используются при построении регулярной ветви решений, а затем выступают одним из основных объектов аппроксимации при формировании начального приближения.

1.3 Нормировка переменных и связь безразмерной и размерной постановок

В предыдущих разделах задача встречи и соответствующие необходимые условия оптимальности были записаны в безразмерной форме. Такой способ

изложения выбран не только из соображений компактности. Безразмерная постановка позволяет выделить общую структуру рассматриваемой ветви решений, не связывая её с конкретными размерными характеристиками миссии, и тем самым использовать единый аппарат для её исследования, аппроксимации и последующего построения начального приближения.

Установим теперь связь между используемой безразмерной моделью и соответствующей размерной постановкой. Размерные величины будем обозначать индексом d . В качестве характерной длины выберем радиус опорной круговой орбиты и обозначим его через DU , а через TU обозначим единицу времени в принятой системе нормировки. Тогда размерные и безразмерные переменные связаны соотношениями

$$\mathbf{r}_d = DU \mathbf{r}, \quad t_d = TU t, \quad \mathbf{v}_d = \frac{DU}{TU} \mathbf{v}, \quad \mathbf{a}_d = \frac{DU}{TU^2} \mathbf{a}. \quad (1.12)$$

Покажем, как выбирается величина TU . Рассмотрим размерные уравнения движения космического аппарата в центральном гравитационном поле:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}}_d = \mathbf{v}_d, \\ \dot{\mathbf{v}}_d = -\mu_d \frac{\mathbf{r}_d}{r_d^3} + \mathbf{a}_d, \end{cases} \quad (1.13)$$

где μ_d обозначает размерный гравитационный параметр центрального тела. Подставляя в эти уравнения приведённые выше соотношения между размерными и безразмерными переменными, получаем

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} = -\frac{\mu_d TU^2}{DU^3} \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{a}. \end{cases} \quad (1.14)$$

Следовательно, перед гравитационным членом возникает безразмерный коэффициент $\mu_d TU^2 / DU^3$. Для того чтобы система приняла вид, использованный ранее в разделе 1.1, этот коэффициент полагается равным единице:

$$\frac{\mu_d TU^2}{DU^3} = 1. \quad (1.15)$$

Отсюда следует

$$TU = \sqrt{\frac{DU^3}{\mu_d}}. \quad (1.16)$$

При таком выборе нормировки задача двух тел записывается в виде

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{a}, \end{cases} \quad (1.17)$$

то есть в той же безразмерной форме, которая уже использовалась в разделе 1.1. В частности, круговая орбита радиуса 1 в безразмерных переменных имеет скорость, равную 1, а её период обращения равен 2π .

Аналогичным образом масштабируется и квадратичный функционал энергетически оптимальной задачи. Если

$$J_d = \frac{1}{2} \int_{t_{0,d}}^{t_{f,d}} \|\mathbf{a}_d(t_d)\|^2 dt_d \quad (1.18)$$

обозначает его размерную форму, то после перехода к безразмерным переменным получаем

$$J_d = \frac{DU^2}{TU^3} J, \quad (1.19)$$

где

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \|\mathbf{a}(t)\|^2 dt. \quad (1.20)$$

Следовательно, безразмерный функционал J определяет размерную энергетическую цену траектории с точностью до множителя, задаваемого выбранной системой нормировки.

Для идеально регулируемой тяги размерное значение функционала связано с расходом рабочего тела [13]. Если m_0 обозначает начальную массу космического аппарата, η — коэффициент полезного действия, а $N_{\max}$ — максимальную доступную электрическую мощность, то масса израсходованного рабочего тела определяется формулой

$$m_p = m_0 - \frac{m_0}{1 + \frac{m_0 J_d}{\eta N_{\max}}}. \quad (1.21)$$

Подставляя сюда связь между J_d и безразмерным функционалом J , получаем

$$m_p = m_0 - \frac{m_0}{1 + \frac{m_0 DU^2}{\eta N_{\max} TU^3} J}. \quad (1.22)$$

Тем самым при фиксированных характеристиках космического аппарата и двигательной установки значение безразмерного функционала однозначно определяет требуемый запас рабочего тела.

Отдельного пояснения требует масштабирование сопряжённых переменных. Оно выбирается так, чтобы безразмерная расширенная система сохраняла ту же структуру, что и размерная, а условие стационарности по-прежнему приводило к соотношению между управлением и сопряжённым вектором скорости. Для этого используются соотношения

$$\mathbf{p}_{r,d} = \frac{DU}{TU^3} \mathbf{p}_r, \quad \mathbf{p}_{v,d} = \frac{DU}{TU^2} \mathbf{p}_v. \quad (1.23)$$

При такой нормировке условие стационарности сохраняет вид

$$\mathbf{a} = \mathbf{p}_v, \quad (1.24)$$

а расширенная система уравнений движения записывается в той же безразмерной форме, которая была получена в разделе 1.2.

Таким образом, используемая в работе безразмерная постановка не сводится к техническому упрощению записи. Она задаёт единый нормализованный класс задач встречи, в котором геометрическая структура решения отделена от конкретных размерных характеристик миссии. Размерная интерпретация результатов при этом полностью восстанавливается по значениям DU , TU , m_0 , η и $N_{\max}$, что существенно для дальнейшего перехода от модельного многообразия к практическим задачам баллистического проектирования.

1.4 Выбор граничных условий и построение модельного многообразия

Непосредственная аппроксимация реального массива межпланетных траекторий оказывается затруднительной. Такое множество зависит от конкретных дат старта, характеристик космического аппарата и двигательной установки, а также от особенностей рассматриваемой миссии. В результате вместо гладкой структуры решений возникает набор разрозненных точек, малоприспособный для выявления устойчивых закономерностей и построения компактных аналитических зависимостей. Поэтому в работе рассматривается не реальное множество траекторий, а специально построенный модельный класс задач встречи.

Под *модельным многообразием* далее понимается множество решений энергетически оптимальных задач встречи в упрощённой постановке, выбранной таким образом, чтобы, с одной стороны, сохранить ключевые динамические свойства рассматриваемого перелёта, а с другой стороны, исключить второстепенные факторы, затрудняющие исследование и аппроксимацию. В этой постановке фиксируются модель движения, тип двигательной установки и способ задания граничных условий, после чего исследуется структура соответствующей регулярной ветви решений.

В качестве модели движения сохраняется задача двух тел, а в качестве модели тяги рассматривается идеально регулируемая тяга с квадратичным функционалом, введённым ранее. Основное упрощение связано с выбором граничных условий. Вместо реальных небесных тел, движение которых определяется эфемеридной моделью и календарной датой старта, вводятся *виртуальные небесные тела*, то есть материальные точки, движущиеся по заданным круговым компланарным орбитам.

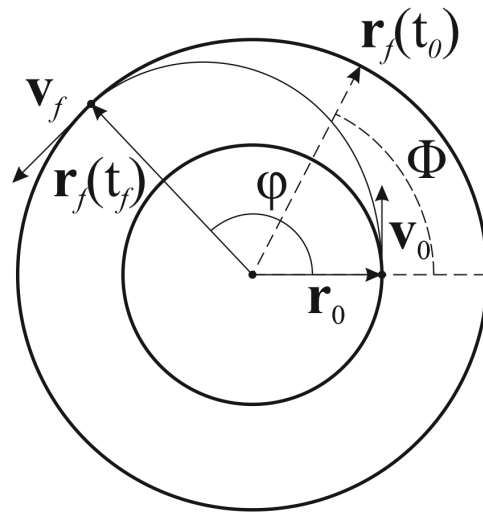


Рисунок 1.1 — Модельная постановка задачи встречи для виртуальных небесных тел на круговых компланарных орбитах

Схема такой постановки приведена на рис. 1.1. Начальное виртуальное небесное тело выбирается на круговой орбите единичного радиуса. Без ограничения общности начальные положение и скорость точки встречи записываются в виде

$$\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.25)$$

Конечное виртуальное небесное тело движется по круговой компланарной орбите радиуса κ , где параметр κ задаёт отношение радиусов конечной и начальной орбит. Положение конечной виртуальной планеты в момент встречи задаётся угловой дальностью φ . Тогда конечные граничные условия имеют вид

$$\mathbf{r}_f = \kappa \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_f = \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.26)$$

Таким образом, параметр φ в данном разделе задаёт не оптимальное значение некоторой характеристики траектории, а непосредственно положение конечной виртуальной планеты на её орбите в момент встречи.

Для описания взаимного положения виртуальных тел в начальный момент времени используется синодическая фаза Φ . В модельной постановке она играет ту же роль, что и дата старта в реальной межпланетной задаче: изменение Φ приводит к изменению конфигурации задачи встречи без обращения к календарным параметрам и эфемеридным данным. При фиксированных κ и T параметры Φ и φ однозначно связаны соотношением

$$\varphi = \Phi + \frac{T}{\kappa^{3/2}}, \quad (1.27)$$

рассматриваемым с точностью до добавления целого числа периодов 2π . Поэтому в зависимости от рассматриваемой задачи удобно использовать либо начальную синодическую фазу Φ , либо конечную угловую дальность φ .

Такой выбор параметров позволяет перейти от частных траекторных расчётов к исследованию непрерывного пространства решений. Это особенно важно для задач с непрямой постановкой, где наличие нескольких решений при одних и тех же граничных условиях является типичным явлением, а соответствующие траектории естественно изучать как результат продолжения по параметрам [59; 60; 62].

Введённая система граничных условий служит основой для построения модельного многообразия энергетически оптимальных решений задачи встречи. На этом многообразии без разрывов изменяются как характеристики траектории, так и параметры оптимального управления. Именно это многообразие рассматривается как центральный объект исследования и аппроксимации, а его численное построение осуществляется методом дискретного продолжения по координатной сетке.

1.5 Метод построения модельного многообразия на основе дискретного продолжения

После выбора модельной постановки дадим формальное определение модельного многообразия. Пусть $\xi \in D \subset \mathbb{R}^h$ обозначает вектор внешних параметров задачи встречи. Предположим, что на некоторой связной области $D_{\text{reg}} \subset D$ существует одна и та же регулярная ветвь решений энергетически оптимальной двухточечной краевой задачи, непрерывно продолжаемая по параметрам. Тогда каждому значению $\xi \in D_{\text{reg}}$ сопоставляются вектор начальных значений сопряжённых переменных

$$\mathbf{z}(\xi) \in \mathbb{R}^6 \quad (1.28)$$

и набор характеристик соответствующей траектории

$$\mathbf{c}(\xi) \in \mathbb{R}^n. \quad (1.29)$$

Под *модельным многообразием* далее понимается образ отображения

$$M : D_{\text{reg}} \rightarrow \mathbb{R}^{6+n}, \quad M(\xi) = (\mathbf{z}(\xi), \mathbf{c}(\xi)), \quad (1.30)$$

построенного на одной регулярной ветви решений энергетически оптимальной задачи встречи.

Таким образом, в настоящей работе модельное многообразие понимается не как всё множество формально допустимых решений, а как регулярная связная структура, на которой внешние параметры задачи, начальные значения сопряжённых переменных и характеристики траектории изменяются согласованно и без разрывов. Именно такой объект далее исследуется численно и аппроксимируется конечными формулами.

Построение модельного многообразия начинается с *базового решения*. Для одного выбранного значения внешних параметров ξ_{base} сначала численно решается соответствующая двухточечная краевая задача. Это решение рассматривается не как самостоятельный итог, а как исходная точка для дальнейшего распространения на соседние значения параметров. Пример такого базового решения показан на рис. 1.2.

После получения базового решения вводится координатная сетка по внешним параметрам. В низкоразмерном случае такая сетка может быть одномерной

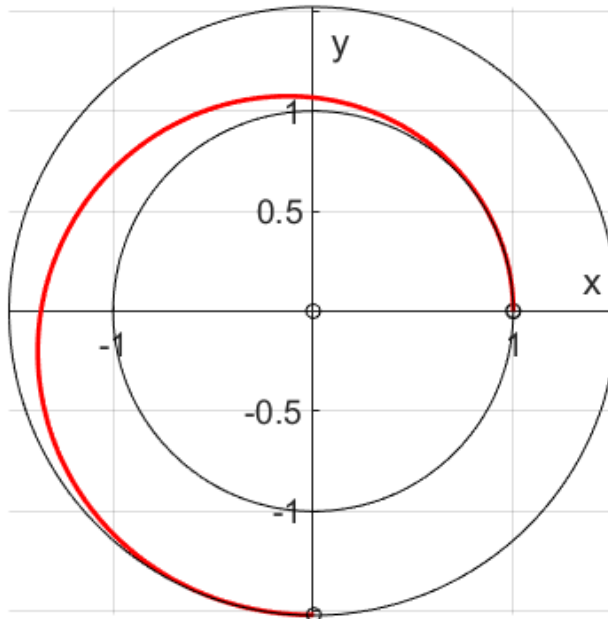


Рисунок 1.2 — Базовое решение, используемое как исходная точка для построения модельного многообразия

или двумерной, в рассматриваемых далее основных построениях используется двумерная сетка, поскольку она позволяет наглядно прослеживать связную область регулярной ветви и выявлять её границы. Далее применяется *дискретное продолжение*: если в одном узле сетки решение уже найдено, то оно используется как начальное приближение в соседнем узле. Тем самым многообразие строится не путём независимого решения всех краевых задач, а путём последовательного продолжения одной и той же ветви решений по сетке параметров.

По своей идее этот подход относится к методам продолжения, однако занимает среди них более узкое место. Современный обзор методов оптимизации траекторий с малой тягой выделяет методы продолжения по параметру как естественный класс подходов для трудных краевых задач [71]. В работах В.Г. Петухова продолжение используется прежде всего как средство исследования структуры ветвей решений и многовитковых перелётов [62]. В работе Ж. Жерго рассматривается гомотопия для задач минимального расхода, в которой численное решение проводится через трудные режимы [83]. В работе Ф. Цзяна энергетически оптимальная постановка используется как более гладкая опорная задача для последующего перехода к более сложной [84]. Рассматриваемый здесь метод отличается от глобальных схем тем, что не строит

единую аналитическую гомотопию, а локально продолжает уже найденную ветвь по сетке внешних параметров.

При таком обходе сетки в одном узле могут быть доступны несколько соседних решений. Поэтому требуется заранее зафиксировать, какое из них следует использовать в первую очередь. Для этого вводится матрица приоритетов соседних направлений

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 1 & * & 3 \\ 7 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad (1.31)$$

где символ $*$ соответствует текущему узлу. Здесь приоритет 1 имеет левый сосед, приоритет 2 — верхний, далее правый и нижний, а диагональные направления рассматриваются только после этого. Иными словами, алгоритм ориентирован прежде всего на продолжение решения вдоль наиболее естественно прослеживаемой локальной ветви. При необходимости выполняется вторая итерация с транспонированной матрицей приоритетов, что позволяет более полно покрыть регулярную область параметров.

Используемый алгоритм имеет локальный характер. Его задача состоит не в полном переборе всех возможных ветвей решений, а в устойчивом продолжении уже найденной регулярной ветви при минимальном числе модификаций численного метода. Именно поэтому в работе отдельно вводится понятие *вычислительного барьера*. Под вычислительным барьером далее понимается область параметрического пространства, в которой локальное продолжение либо перестаёт сходиться без существенной перенастройки алгоритма, либо приводит к решениям, неудобным для дальнейшей интерпретации и аппроксимации.

Важно подчеркнуть, что вычислительный барьер не утверждает отсутствия решений за его пределами. Он задаёт границу рабочей области, на которой выбранная регулярная ветвь устойчиво прослеживается используемым методом и пригодна для построения конечных формул. Иными словами, вычислительный барьер является не физической границей множества решений, а границей той регулярной области, которая включается в модельное многообразие в рамках рассматриваемого численного построения.

Схематическая интерпретация такого построения показана на рис. 1.3. На нижней плоскости изображена сетка внешних параметров, а над построенной связной областью узлов показана одна из характеристик траектории $s(\xi_1, \xi_2)$.

Поверхность изображается только над той частью сетки, где регулярная ветвь уже построена. Отдельно отмечены базовое решение, вычислительный барьер и непостроенная часть регулярной области.

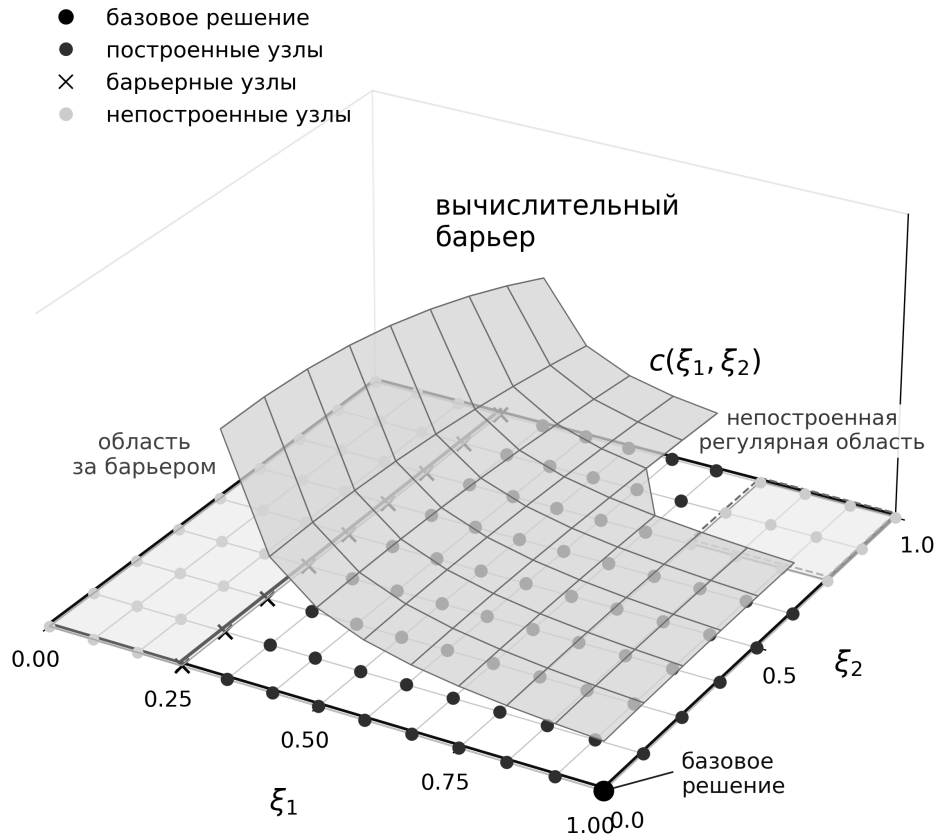


Рисунок 1.3 — Схема построения модельного многообразия на двумерной сетке внешних параметров. Поверхность $c(\xi_1, \xi_2)$ показана только над построенной связной областью узлов, вычислительный барьер отмечает границу устойчивого локального продолжения выбранной регулярной ветви.

В подобных областях наличие вычислительного барьера рассматривается как основание ограничить рабочую область аппроксимации. На рис. 1.4 приведён характерный пример вычислительного барьера, связанного с численными трудностями из-за особенностей траектории вблизи центрального тела.

Тем самым рассматриваемый метод занимает вполне определённое место среди других методов продолжения. Как и классические методы продолжения, он использует соседнее решение как опору для построения следующего. Однако, в отличие от более сильных глобальных схем, здесь не ставится цель охватить все ветви решений и не вводится единый аналитический параметр продолжения.

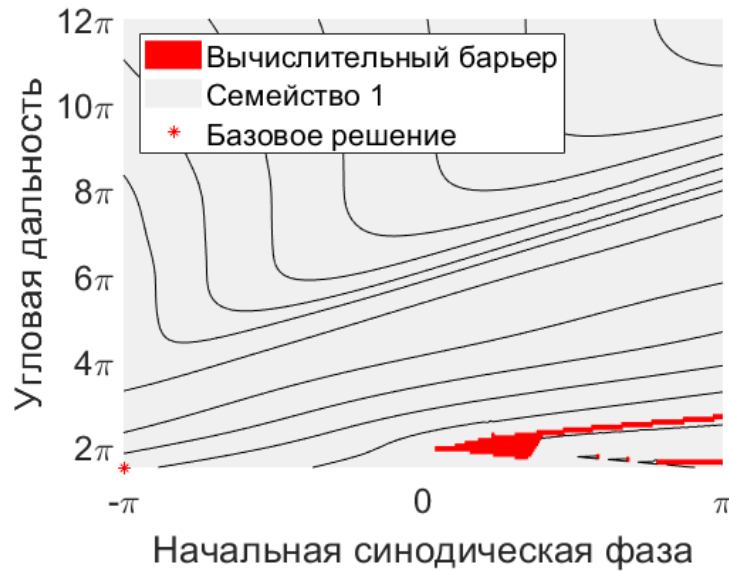


Рисунок 1.4 — Пример вычислительного барьера при построении регулярной ветви решений на двумерной сетке параметров

Метод ориентирован на конструктивное выделение одной регулярной связной ветви, удобной для исследования и последующей аппроксимации.

1.6 Методика исследования и аппроксимации многообразия

Построенное модельное многообразие используется в работе не только как численный массив решений, но и как объект дальнейшего анализа. После построения отображения

$$M(\xi) = (z(\xi), c(\xi)) \quad (1.32)$$

возникает задача получить компактные конечные формулы для отдельных компонент начального вектора сопряжённых переменных $z(\xi)$ и характеристик траектории $c(\xi)$. При этом аппроксимируется не произвольная таблица численных данных, а регулярная связная структура, полученная продолжением одной ветви решений двухточечной краевой задачи.

Общая методика состоит из нескольких этапов. Сначала выбирается рабочая область параметров, на которой ветвь решений прослеживается устойчиво и не содержит разрывов. Затем анализируется геометрия построенного многообразия: выявляются удобные параметры, области ухудшения регулярности, возможные симметрии и естественные сечения. После этого выбирается способ

аппроксимации: непосредственное построение конечной формулы для выбранной компоненты либо предварительное разложение зависимости на более простые уровни. На заключительном этапе полученные формулы проверяются расширенной системой метрик на рабочей области параметров.

Если выбранная область внешних параметров имеет малую размерность и зависимости компонент $\mathbf{z}$ и $\mathbf{c}$ достаточно гладкие, конечные формулы строятся непосредственно. В этом случае каждая рассматриваемая величина записывается как функция выбранных внешних параметров:

$$z_j = z_j(\boldsymbol{\xi}), \quad c_k = c_k(\boldsymbol{\xi}). \quad (1.33)$$

Такой случай соответствует прямой аппроксимации компонент модельного многообразия.

Однако не всякая зависимость, возникающая при исследовании регулярной ветви, удобна для прямой аппроксимации по полному вектору внешних параметров. Если размерность зависимости увеличивается или её геометрия оказывается неудобной для описания одной компактной формулой, используется иерархический подход. В этом случае вектор внешних параметров условно разделяется на группы

$$\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{\xi}_1), \quad (1.34)$$

где $\boldsymbol{\xi}_0$ обозначает параметры, по которым на первом уровне рассматривается основная структура зависимости, а $\boldsymbol{\xi}_1$ — параметры, определяющие изменение этой структуры от одного сечения рабочей области к другому. Такое разделение не задаётся заранее, а выбирается по результатам численного анализа модельного многообразия и поиска удобной параметризации.

Рассмотрим для пояснения одну компоненту вектора характеристик траектории,

$$c = c(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3). \quad (1.35)$$

Прямая аппроксимация предполагала бы построение одной формулы для всей зависимости от трёх параметров. Однако численный анализ может показать, что по одному из параметров зависимость имеет устойчивую простую структуру, тогда как остальные параметры изменяют коэффициенты этой структуры. Например, на пояснительном уровне можно представить зависимость в виде

$$c(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3) \approx \mathcal{A}_1(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) \boldsymbol{\xi}_3 + \mathcal{A}_2(\boldsymbol{\xi}_1) \cos \boldsymbol{\xi}_3. \quad (1.36)$$

В этом выражении важно не конкретное сочетание функций, а роль входящих в него величин. На верхнем уровне $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ выступают как коэффициенты при выбранной структуре зависимости по ξ_3 . Однако они не являются числовыми коэффициентами на всей рабочей области, поскольку сами зависят от других внешних параметров. Следовательно, на следующем уровне они становятся самостоятельными объектами аппроксимации:

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_1(\xi_1, \xi_2), \quad \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_2(\xi_1). \quad (1.37)$$

Такие величины далее будем называть коэффициент-функциями. Коэффициент-функция отличается от числового коэффициента тем, что входит в формулу одного уровня как коэффициент, но при этом имеет собственные аргументы и задаётся отдельной конечной формулой. Поэтому иерархическая аппроксимация представляет собой последовательное построение связанных формул: сначала для структуры зависимости на выбранном уровне, затем для коэффициент-функций, возникающих на этом уровне.

Приведённый пример служит только для пояснения принципа. В реальных задачах структура верхнего уровня заранее не фиксируется. Она является результатом анализа численно построенной регулярной ветви, выбора параметризации и поиска конечных формул методом символьной регрессии. Поэтому иерархизация в настоящей работе не является заранее заданным шаблоном, это способ заменить прямую аппроксимацию сложной многопараметрической зависимости последовательностью более простых низкоразмерных зависимостей.

Для сохранения однозначной связи между формулами и таблицами коэффициентов используется следующее соглашение. Числовые коэффициенты конечных формул обозначаются через $C_i^{(X)}$, где нижний индекс нумерует коэффициент, а верхний индекс указывает величину или формулу, к которой он относится. Такие коэффициенты являются числами и приводятся в таблицах коэффициентов.

Если же величина входит в формулу как коэффициент на одном уровне, но сама зависит от параметров задачи и аппроксимируется отдельно, она обозначается каллиграфической буквой. Основным обозначением для коэффициент-функций далее является $\mathcal{A}^{(X)}$, а для отдельных компонент таких функций используется запись $\mathcal{A}_m^{(X)}$. В зависимости от смысла конкретной формулы для коэффициент-функций могут также использоваться другие каллиграфические буквы, например $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$ или $\mathcal{P}$. Во всех случаях принцип остаётся

тем же: символ $C_i^{(X)}$ обозначает числовой коэффициент, а каллиграфическая буква обозначает функцию, имеющую собственные аргументы.

Такое различие особенно важно при иерархическом построении формул. На одном уровне коэффициент-функция может входить в выражение так же, как обычный коэффициент, но на следующем уровне она раскрывается через отдельную аппроксимацию. Тем самым конечная формула может состоять из нескольких связанных уровней, каждый из которых имеет собственную область определения, набор аргументов и числовые коэффициенты.

С практической точки зрения иерархизация выполняет две функции. Во-первых, она понижает размерность отдельных задач аппроксимации: вместо одной формулы от полного вектора ξ строится несколько более простых зависимостей. Во-вторых, она повышает интерпретируемость результата: верхний уровень описывает найденную структуру зависимости, а нижние уровни показывают, как коэффициенты этой структуры изменяются при изменении параметров задачи.



Рисунок 1.5 — Общая схема исследования, аппроксимации и проверки конечных формул

На рис. 1.5 показана общая схема методики. В реальной вычислительной работе этапы построения многообразия, анализа его структуры, выбора

параметризации, построения конечных формул и проверки качества могут выполняться итерационно. Однако в дальнейшем изложении приводится не вся история таких итераций, а итоговая последовательность построений, выбранная по результатам анализа и проверки. Промежуточные варианты параметризации и пробные аппроксимации не являются самостоятельным результатом диссертации, их роль состоит в выборе окончательной структуры конечных формул.

Качество полученных конечных формул оценивается на рабочей области параметров. Проверка включает не только интегральные метрики ошибки, но и анализ локального распределения погрешности, поведения формул на границах области, согласованности с кинематическими и физическими связями, а также пригодности восстановленных величин для дальнейшего построения начального приближения. Тем самым процедура построения формул включает два взаимосвязанных этапа: получение компактного аналитического выражения и расширенную верификацию его качества на той области, где это выражение далее используется.

1.7 Символьная регрессия как инструмент получения конечных формул

После построения модельного многообразия требуется перейти от численно найденных зависимостей к компактным аналитическим выражениям. В рассматриваемой задаче этот переход не является чисто технической процедурой. Получаемые формулы должны быть не только точными, но и интерпретируемыми, пригодными для дальнейшего анализа и практического использования при построении начального приближения. По этой причине в качестве основного инструмента аппроксимации в работе используется символьная регрессия [98], а библиотека PySR¹ служит её практической реализацией.

Содержательное отличие символьной регрессии от обычной регрессии состоит в том, что в ней заранее не фиксируется структура искомой формулы. Вместо подгонки коэффициентов в заранее заданном классе функций одновременно подбираются аналитический вид зависимости и значения входящих в неё числовых коэффициентов. Это особенно важно для настоящей работы,

¹<https://github.com/MilesCranmer/PySR>

поскольку конечные формулы должны описывать не произвольную статистическую зависимость, а регулярные структуры, возникающие на модельном многообразии. Поэтому важны не только малая ошибка аппроксимации, но и компактность, устойчивость и возможность дальнейшего использования найденного выражения в вычислительной схеме.

В реализации PySR поиск выполняется с помощью многопопуляционного эволюционного алгоритма [98]. Кандидатные формулы представляются в виде символьных деревьев и эволюционируют параллельно в нескольких популяциях. На каждом шаге алгоритм модифицирует выражения с помощью операций мутации и рекомбинации, затем упрощает полученные формулы и отдельно уточняет входящие в них числовые константы. Именно цикл из эволюции, упрощения и оптимизации составляет одну из ключевых особенностей метода. В результате поиск ведётся не по пространству фиксированных шаблонов, а по широкому классу выражений, построенных из заранее заданного набора элементарных операций и функций.

Итогом работы алгоритма является не единственная формула, а набор кандидатов, различающихся по точности и сложности. Поэтому символьная регрессия в настоящей работе используется не как полностью автоматический способ окончательного выбора формулы, а как инструмент генерации компактных аналитических зависимостей. Окончательный выбор выполняется по совокупности требований: корректность на рабочей области, малость ошибки, отсутствие локальных областей резкого ухудшения качества, согласованность с физическим смыслом величины и пригодность для дальнейшего использования. Эти требования подробно формулируются в следующем разделе.

Важной особенностью такого подхода является возможность явно управлять классом допустимых формул. До запуска поиска фиксируются разрешённые бинарные и унарные операции, допустимая сложность выражения, а также ограничения на глубину и структуру символьного дерева. Тем самым символьная регрессия рассматривается не как “чёрный ящик”, а как управляемый инструмент, в котором исследователь задаёт язык, на котором могут быть записаны искомые зависимости. Для задач баллистического проектирования это принципиально: чрезмерно громоздкие или искусственные выражения теряют практическую ценность даже в тех случаях, когда формально обеспечивают малую ошибку.

Символьная регрессия применяется как к непосредственным аппроксимациям компонент модельного многообразия, так и к формулам нижних уровней иерархии. В первом случае строятся конечные формулы для отдельных компонент начального вектора сопряжённых переменных и характеристик траектории:

$$z_j = z_j(\xi), \quad c_k = c_k(\xi). \quad (1.38)$$

Во втором случае объектом аппроксимации становятся коэффициент-функции, возникающие при иерархическом описании зависимости. Такие функции на одном уровне входят в формулу как коэффициенты, но сами зависят от параметров задачи и поэтому требуют отдельного аналитического задания. Таким образом, символьная регрессия используется не только для построения конечной формулы верхнего уровня, но и для последовательного раскрытия коэффициент-функций, если такая иерархическая структура оказывается более устойчивой и интерпретируемой.

Структура иерархии при этом заранее не задаётся. Она определяется по результатам численного анализа построенной регулярной ветви, выбора параметризации и сравнения кандидатных выражений. Если компонента $\mathbf{z}$ или $\mathbf{c}$ хорошо описывается как функция выбранных внешних параметров, используется непосредственная аппроксимация. Если же прямая формула оказывается громоздкой или неустойчивой, зависимость может быть описана через коэффициент-функции, которые затем аппроксимируются отдельно. В обоих случаях цель остаётся одной и той же: получить конечные формулы, пригодные для работы на заданной области параметров.

В работе символьная регрессия использовалась после предварительного сравнения с несколькими альтернативными подходами. На этапе первичного анализа рассматривались полиномиальная аппроксимация, спектральная аппроксимация, сети Колмогорова–Арнольда [100] и символьная регрессия. Полиномиальные и спектральные представления удобны в тех случаях, когда структура зависимости заранее достаточно ясна. Однако в рассматриваемых задачах многие искомые функции одновременно обладают полиномиальными, логарифмическими и квазипериодическими чертами, что затрудняет выбор фиксированного класса аппроксимаций. Сети Колмогорова–Арнольда дают более гибкое численное приближение, однако в предварительном сравнении для данной задачи не показали принципиального преимущества по точности и при

этом уступали по компактности итоговых выражений. По этой причине основным инструментом аппроксимации была выбрана символьная регрессия.

Практически поиск конечных формул выполняется поэтапно. Сначала проводится сравнительно широкий поиск с расширенным набором элементарных функций и умеренным числом итераций. Его задача состоит в выявлении общей структуры зависимости, выборе удобных независимых переменных и предварительной оценке того, требуется ли иерархическое описание. Затем, после уточнения параметризации и состава аппроксимируемых величин, поиск повторяется в более узком классе выражений, но уже с более жёстким контролем сложности и качества формул. Такой режим соответствует общей методике главы: сначала исследуется структура модельного многообразия, затем уточняется язык аппроксимации, после чего фиксируются конечные формулы и выполняется их расширенная проверка на рабочей области параметров.

1.8 Критерии отбора аппроксимационных формул и оценка качества аппроксимаций

После запуска символьной регрессии получается не одна формула, а набор допустимых кандидатов, различающихся точностью, сложностью и характером поведения на рабочей области параметров. Поэтому в настоящей работе требуется не только построить аппроксимационные выражения, но и явно зафиксировать критерии, по которым итоговые конечные формулы отбираются для дальнейшего использования.

В отличие от задач статистического прогнозирования, здесь конечная формула рассматривается как компактное аналитическое описание численно построенной регулярной структуры на заданной рабочей области параметров. Поэтому качество формулы оценивается не по одному численному показателю, а по расширенной системе метрик и проверок. Цель такой проверки состоит в том, чтобы убедиться, что найденное выражение корректно работает на всей области, где оно будет использоваться, не имеет локальных провалов качества и согласовано с геометрическим и физическим смыслом аппроксимируемой величины.

Основными численными характеристиками ошибки служат среднеквадратическое отклонение, средняя абсолютная ошибка и максимальное отклонение на рабочей области параметров. Эти величины позволяют оценить общий уровень погрешности, но сами по себе не дают полной картины качества формулы. Поэтому дополнительно анализируется пространственное распределение ошибки: строятся карты погрешности, исследуются области локального ухудшения качества и поведение формулы вблизи границ рабочей области.

Отдельную роль играет проверка специальных и предельных случаев. Если для некоторого значения параметров известна кинематическая связь, симметрия или простой предельный режим, найденная формула должна быть с ними согласована. Например, в задачах, где существует режим пассивного движения или вырожденная геометрическая конфигурация, поведение аппроксимации в таком случае проверяется отдельно. Такие проверки не заменяют интегральные метрики ошибки, но позволяют исключить формулы, которые формально имеют малую среднюю ошибку, однако нарушают важные свойства рассматриваемой задачи.

Для величин, связанных между собой кинематическими или физическими соотношениями, дополнительно проверяется согласованность альтернативных способов восстановления. Если одна и та же характеристика может быть получена непосредственно из конечной формулы или через другую аппроксимированную величину, сравнение этих вариантов используется как дополнительный индикатор качества. В случаях, когда конечная формула задаёт начальные значения сопряжённых переменных, важной проверкой становится интегрирование расширенной системы и анализ невязок на правом конце краевой задачи.

Критерии отбора конечных формул сведены в табл. 1.1. Они используются не как независимые формальные условия, а как совокупность требований, по которым сравниваются кандидаты, полученные методом символьной регрессии.

Критерии, приведённые в табл. 1.1, не являются равноправными в процедурном смысле. На первом этапе формула должна удовлетворять жёстким требованиям корректности на рабочей области: в ней не должно возникать сингулярностей, неопределённых значений и неустойчивого поведения в используемом диапазоне параметров. После этого сравниваются численные метрики ошибки. Однако окончательный выбор не сводится к минимизации одной скалярной величины. Предпочтение отдаётся формулам, которые сочетают малую интегральную ошибку, приемлемое локальное распределение погрешности,

Таблица 1.1 — Критерии отбора конечных аппроксимационных формул

Критерий	Метод проверки
Корректность на рабочей области	Проверка отсутствия сингулярностей, неопределённых значений, разрывов и неустойчивого поведения на области, где формула используется.
Интегральная ошибка аппроксимации	Вычисление среднеквадратического отклонения, средней абсолютной ошибки и максимального отклонения на рабочей области параметров.
Локальная структура ошибки	Построение карт погрешности, анализ областей локального ухудшения качества и проверка равномерности распределения ошибки.
Поведение на границах области	Отдельная проверка формулы вблизи границ рабочей области и вблизи вычислительных барьеров, если они присутствуют.
Согласованность со специальными случаями	Проверка известных предельных режимов, вырожденных конфигураций, симметрий и кинематических связей.
Согласованность связанных величин	Сравнение альтернативных способов восстановления одной и той же величины, если такая возможность следует из постановки задачи.
Динамическая проверка	Интегрирование расширенной системы с восстановленными начальными значениями сопряжённых переменных и анализ краевых невязок, если это применимо.
Компактность и интерпретируемость	Сравнение формул-кандидатов с учётом сложности выражения, устойчивости поведения и пригодности для дальнейшего использования.

согласованность со специальными случаями и достаточно простую аналитическую структуру.

Такой способ отбора особенно важен для символьной регрессии, поскольку она обычно порождает несколько формул, лежащих на разных участках компромисса между точностью и сложностью. Более сложная формула может иметь меньшую среднюю ошибку, но при этом хуже вести себя на границе области, содержать искусственные сингулярности или быть менее пригодной для дальнейшего использования. Поэтому в настоящей работе итоговая формула выбирается не автоматически, а после сопоставления кандидатов по совокупности метрических, геометрических и содержательных критериев.

Отдельно подчеркнём, что расширенная проверка качества не является дополнительным оформительским этапом после построения формулы. Она входит в саму методику получения конечных формул. Результаты анализа ошибок могут приводить к уточнению параметризации, изменению состава аппроксимируемых величин, переходу к иерархической записи через коэффициент-функции или отказу от слишком громоздкого выражения в пользу более устойчивого. Тем самым построение конечных формул и проверка их качества образуют единую исследовательскую процедуру.

В результате в настоящей работе итоговая конечная формула принимается только в том случае, если она корректна на рабочей области параметров, обеспечивает приемлемую ошибку восстановления, не содержит выраженных локальных провалов качества и пригодна для дальнейшего использования в алгоритмах построения начального приближения. Такой подход соответствует цели исследования: получить не просто численное приближение, а устойчивые и интерпретируемые конечные формулы для описания аппроксимированного модельного многообразия.

1.9 Выводы к главе 1

В настоящей главе сформирована методическая основа исследования. Получены следующие результаты.

1. Сформулирована энергетически оптимальная задача встречи в безразмерной постановке и выведены необходимые условия оптимальности в

форме двухточечной краевой задачи. Показано, что начальные значения сопряжённых переменных определяют оптимальное управление на траектории.

2. Установлена связь между безразмерной и размерной постановками. Показано, как масштабируются фазовые переменные, реактивное ускорение, сопряжённые переменные и квадратичный функционал.
3. Введена модельная постановка задачи встречи для виртуальных небесных тел, движущихся по круговым компланарным орбитам. Такая постановка позволяет отделить регулярную структуру решений от календарных и эфемеридных особенностей конкретной миссии.
4. Дано определение модельного многообразия как регулярной связной ветви решений, на которой внешние параметры задачи, начальные значения сопряжённых переменных и характеристики траектории изменяются согласованно.
5. Описан метод дискретного продолжения по сетке внешних параметров. Показано, что он предназначен для построения рабочей регулярной области выбранной ветви, пригодной для дальнейшего исследования и аппроксимации.
6. Сформулирована общая методика исследования и аппроксимации модельного многообразия. Она включает построение регулярной ветви, анализ её геометрии, выбор параметризации, построение конечных формул и проверку их качества на рабочей области параметров.
7. Введён принцип иерархической аппроксимации. Показано, что низко-размерные гладкие зависимости могут аппроксимироваться непосредственно, а более сложные зависимости могут раскладываться на уровни через коэффициент-функции.
8. Зафиксировано различие между числовыми коэффициентами конечных формул и коэффициент-функциями. Это соглашение необходимо для однозначной связи между формулами и таблицами коэффициентов.
9. Обоснован выбор символьной регрессии как основного инструмента построения конечных формул. Показано, что она применяется как для непосредственной аппроксимации компонент модельного многообразия, так и для аппроксимации коэффициент-функций в иерархических формулах.

10. Сформулированы критерии отбора конечных формул и расширенная система проверки их качества. Итоговые формулы выбираются по совокупности требований: корректность на рабочей области, малость ошибки, отсутствие локальных провалов качества, согласованность со специальными случаями и пригодность для дальнейшего использования.

Таким образом, в главе задан единый методический аппарат, который позволяет перейти от отдельной краевой задачи к построению регулярного модельного многообразия, получению конечных формул и проверке их пригодности для задач баллистического проектирования.

Глава 2. Исследование многообразия энергетически оптимальных решений задачи встречи в плоской круговой модели движения небесных тел

В настоящей главе исследуется структура решений энергетически оптимальной задачи встречи в плоской круговой модели движения небесных тел. В качестве исходной мотивации рассматривается структура номограммы перелётов Земля–Марс в эфемеридной постановке, построенной в координатах дата старта – продолжительность перелёта. Для перелётов с непрерывной тягой такая номограмма расслаивается по числу витков траектории, что усложняет выбор окна старта и требует согласованного выбора семейства решений. После этого выполняется переход к модельной задаче для виртуальных небесных тел на круговых компланарных орбитах. Далее показывается, что после устранения эфемеридной зависимости наблюдаемое расслоение переходит в односвязное модельное многообразие, на котором при дополнительном условии на свободный правый конец выделяется кривая локальных оптимумов. На этой кривой вводятся точки оптимальной дальности и строятся конечные формулы для продолжительности перелёта, нормированной непрерывной фазы, квадратичного функционала и параметров оптимального управления. Отдельно рассматривается область малой витковой дальности, необходимая для устойчивого использования полученных зависимостей при построении начальных приближений. В заключительной части главы приводится верификация качества конечных формул и проверка согласованности восстановленных решений с краевыми условиями.

2.1 Мотивационный пример: расслоение изолиний номограммы в эфемеридной задаче Земля–Марс

Исследование, изложенное в настоящей главе, возникло из наблюдаемой структуры реальных межпланетных перелётов. Рассмотрим энергетически оптимальные перелёты Земля–Марс, рассчитанные в эфемеридной постановке. В этой задаче внешними параметрами выступают дата старта и продол-

жительность перелёта, а в качестве характеристики решения естественно рассматривать требуемый запас рабочего тела или значение функционала. Уже на этом уровне обнаруживается, что номограмма выбора окна старта для перелётов с непрерывной тягой не сводится к одной гладкой поверхности.

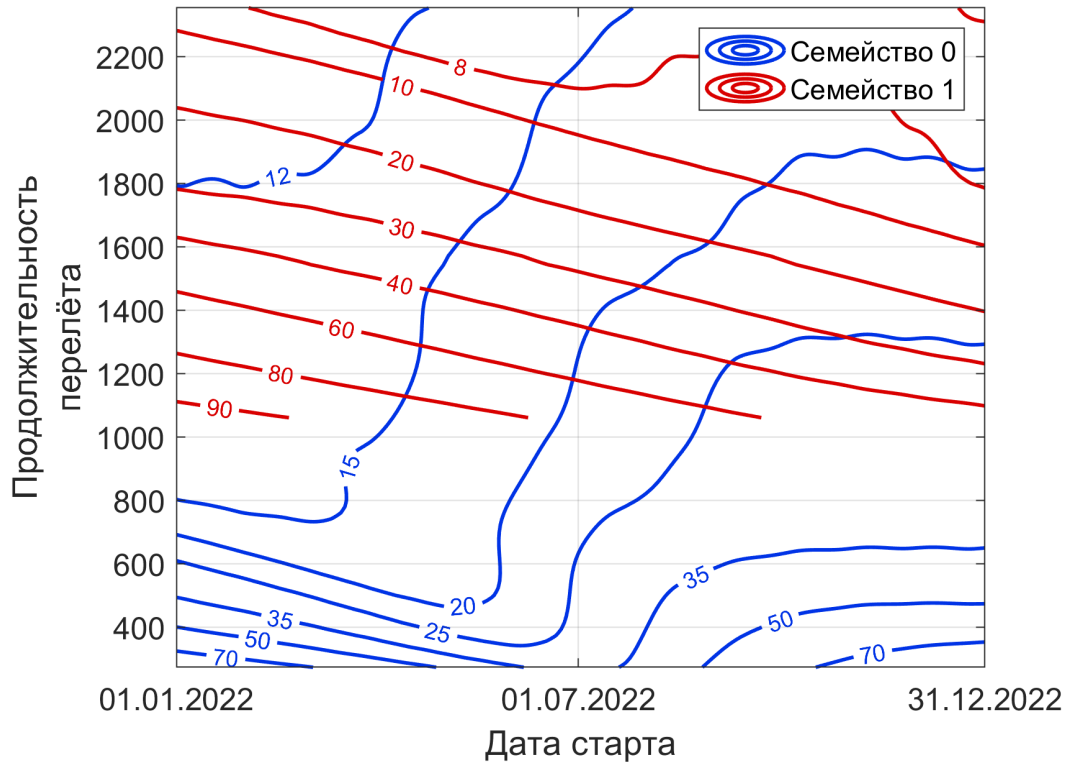


Рисунок 2.1 — Расслоение изолиний номограммы требуемого запаса рабочего тела для перелёта Земля–Марс в координатах дата старта – продолжительность перелёта

На рис. 2.1 показан характерный пример такой структуры. По горизонтальной оси отложена дата старта, по вертикальной — продолжительность перелёта, а изолиниями представлена энергетическая характеристика перелёта. Видно, что изолинии расслаиваются на области, соответствующие различному числу витков траектории. Такие области далее будем называть *семействами решений*. В этой части главы термин используется для описания наблюдаемой структуры эфемеридной задачи, в модельной постановке основной объект исследования будет задан иначе.

Возникновение такого расслоения связано с тем, что перелёты, близкие по дате старта и продолжительности, могут различаться по числу дополнительных оборотов и, как следствие, по значению функционала. При этом в эфемеридной постановке соответствующие семейства технически остаются различными.

Даже если рассматривать сдвиг на синодический период, конфигурация реальных планет не воспроизводится тождественно, поскольку движение задаётся эфемеридами, а не кеплеровской моделью. Поэтому наблюдаемая структура не сводится к простой периодической повторяемости.

Это наблюдение служит отправной мотивацией анализа. С одной стороны, такая номограмма имеет непосредственный прикладной смысл: дата старта является физической величиной, а выявляемые на ней окна перелёта наблюдаемы и важны для баллистического проектирования. С другой стороны, сама структура графика оказывается слишком сложной для прямого исследования и тем более для построения компактных аналитических зависимостей. Это приводит к необходимости перейти к упрощённой постановке, в которой календарная дата старта заменяется начальной синодической фазой, а реальные планеты — виртуальными небесными телами на круговых компланарных орбитах.

Таким образом, переход к модельной постановке используется не только для упрощения вычислений, но и для выделения той структурной особенности, которая проявилась в эфемеридной задаче Земля–Марс, а именно расслоения множества энергетически оптимальных решений по числу витков. В следующем разделе будет показано, что после устранения эфемеридной зависимости эта структура естественным образом переходит в односвязное модельное многообразие, которое в разных координатных представлениях может выглядеть по-разному.

2.2 Переход к модельной постановке и геометрия односвязного модельного многообразия

Наблюдаемое в эфемеридной задаче расслоение изолиний по числу витков требует более простой постановки, в которой основные геометрические закономерности можно исследовать независимо от календарных и эфемеридных особенностей конкретной миссии. Кроме того, для уменьшения числа независимых параметров, таких как наклонение и эксцентриситет, рассматриваются компланарные круговые орбиты. Реальные планеты заменяются виртуальными небесными телами, движущимися по круговым компланарным орбитам, а дата старта — начальной синодической фазой.

В рассматриваемой модельной задаче фиксируются начальные граничные условия, соответствующие движению по круговой орбите единичного радиуса, а конечные граничные условия задаются отношением радиусов κ и угловой дальностью φ . Для дальнейшего анализа удобно перейти от угловой дальности к витковой дальности

$$\lambda = \frac{\varphi}{2\pi}, \quad (2.1)$$

поскольку именно параметр λ естественно отражает многовитковый характер решений. Таким образом, при фиксированном значении κ множество решений можно рассматривать как геометрический объект в пространстве параметров, включающем начальную синодическую фазу, витковую дальность, продолжительность перелёта и значение функционала.

$$\mathbf{c} = (\Phi, \lambda, T, J). \quad (2.2)$$

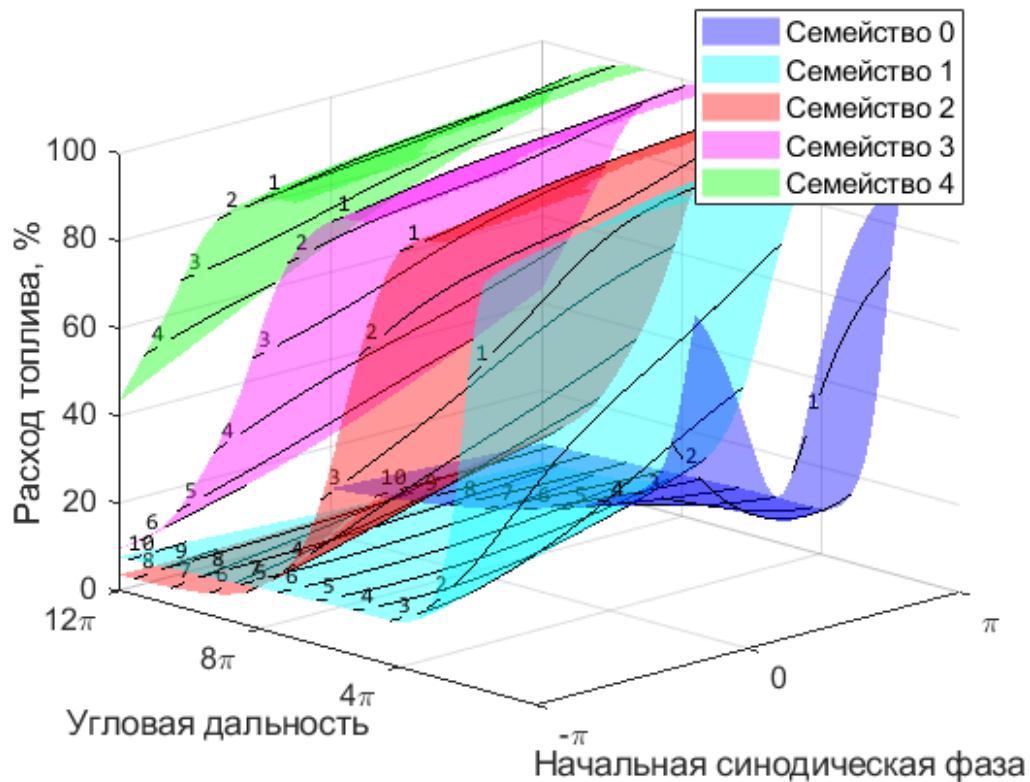


Рисунок 2.2 — Одно из представлений модельного многообразия в координатах начальная синодическая фаза – витковая дальность

На рис. 2.2 показано одно из таких представлений. В координатах начальная синодическая фаза – витковая дальность одно и то же множество решений визуальнo распадается на несколько ветвей. Это представление связано с рис. 2.1, поскольку начальная синодическая фаза является аналогом

даты старта. Однако в модельной постановке визуальный распад на несколько семейств зависит от выбора координат и отражает способ представления многообразия, а не наличие нескольких независимых множеств решений.

Для выявления внутренней геометрии объекта удобнее использовать другое координатное представление, в котором вместо начальной синодической фазы рассматривается продолжительность перелёта. При таком переходе те же самые решения образуют односвязное модельное многообразие.

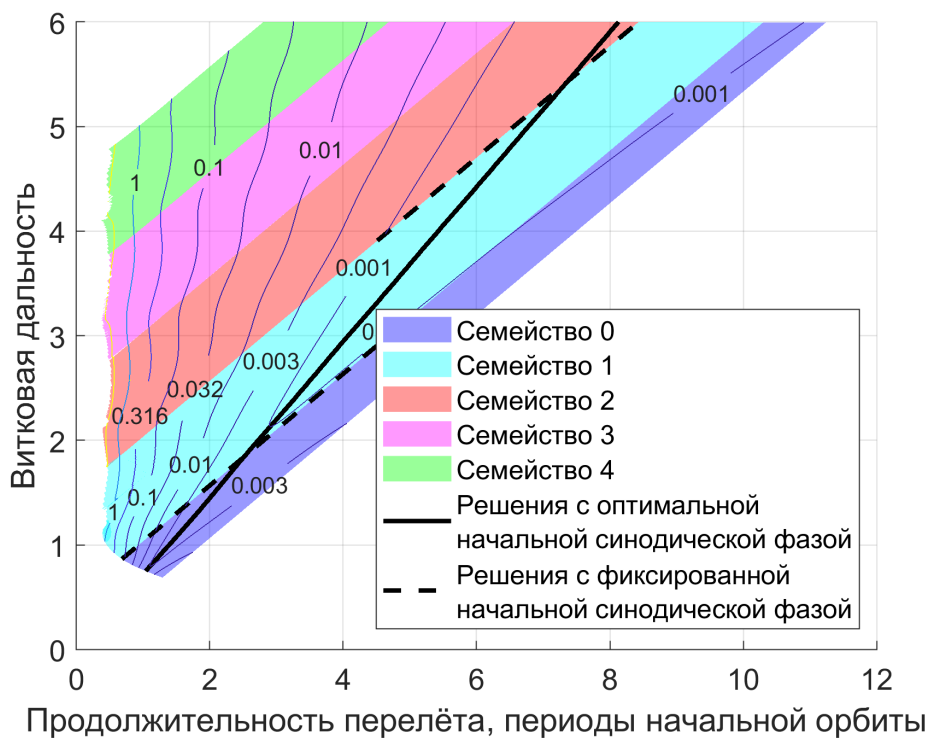


Рисунок 2.3 — Односвязное модельное многообразие в координатах продолжительности перелёта – витковая дальность

На рис. 2.3 видно, что после замены координат ранее наблюдавшиеся ветви сливаются в односвязное модельное многообразие. Тем самым семейства решений, введённые в мотивационном разделе, оказываются не базовой структурой модельной задачи, а координатно-зависимым способом видеть один и тот же объект.

Переход к модельной постановке тем самым решает две задачи. Во-первых, он устраняет эфемеридную зависимость и позволяет исследовать структуру решений в чистом виде. Во-вторых, он даёт возможность перейти от календарно заданной прикладной задачи к геометрическому описанию, в котором далее можно выделить специальное подмногообразие локально

оптимальных решений. В следующем разделе для односвязного модельного многообразия будет введена кривая локальных оптимумов.

2.3 Кривая локальных оптимумов

При анализе односвязного модельного многообразия в координатах продолжительность перелёта – витковая дальность обнаруживается важная закономерность: в исследованной области параметров при фиксированных значениях κ и T функционал имеет одно локально минимальное значение по витковой дальности. Наблюдение именно этой структуры и приводит к введению кривой локальных оптимумов. Таким образом, речь идёт не о формальном выделении произвольного подмногообразия, а о специальной ветви решений, существование которой непосредственно следует из численно наблюдаемой геометрии модельного многообразия.

Для локально оптимального значения витковой дальности введём обозначение

$$J(T, \lambda^*, \kappa) = \min_{\lambda} J(T, \lambda, \kappa), \quad (2.3)$$

где λ^* обозначает локально оптимальное значение витковой дальности при фиксированных T и κ . Совокупность таких значений образует одномерное подмногообразие модельного многообразия, которое далее будем называть *кривой локальных оптимумов*.

Переход от двумерного модельного многообразия к кривой локальных оптимумов осуществляется не отбором точек на ранее построенной координатной сетке. Численно к модельному многообразию применяется дополнительное условие на свободный правый конец согласно принципу максимума, после чего выполняется продолжение решения уже для новой постановки. Тем самым кривая локальных оптимумов строится как новая ветвь решений, а не как результат постобработки заранее рассчитанного массива точек.

На рис. 2.4 показана кривая локальных оптимумов для фиксированного значения κ . Именно на этом этапе происходит сужение от двумерного модельного многообразия к одномерной структуре, которая далее служит основой для построения конечных формул. Для случая $\kappa = 1.52$, соответствующего перелёту типа Земля–Марс, уже на раннем этапе исследования была отмечена простая

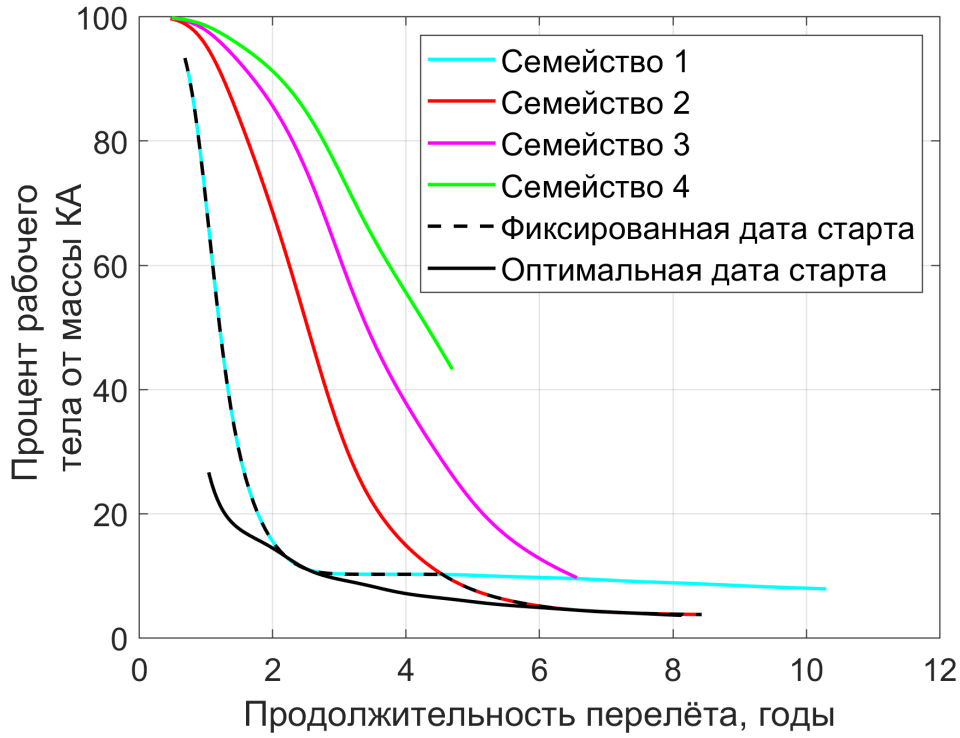


Рисунок 2.4 — Кривая локальных оптимумов в координатах продолжительность перелёта – витковая дальность

линейная аппроксимация этой кривой [109]:

$$\hat{T} \approx 1.35 \times 10^0 + 3.94 \times 10^{-2} \lambda^*. \quad (2.4)$$

Хотя далее используются более точные конечные формулы, сама возможность такой простой аппроксимации отражает регулярный характер кривой локальных оптимумов.

Кривая локальных оптимумов играет принципиальную роль в построении конечных формул для продолжительности перелёта, начальной синодической фазы, квадратичного функционала и параметров оптимального управления. Кроме того, в координатах начальная синодическая фаза – витковая дальность она допускает естественную интерпретацию через пересечения с изолиниями фиксированной начальной синодической фазы. Эти пересечения образуют счётное множество точек оптимальной дальности.

2.4 Точки оптимальной дальности

Кривая локальных оптимумов задаёт локально оптимальные значения витковой дальности при фиксированных продолжительности перелёта и отношении радиусов. Однако в прикладной задаче обычно фиксируется не продолжительность перелёта, а дата старта. В модельной постановке её геометрическим аналогом является начальная синодическая фаза. Поэтому следующим шагом необходимо рассмотреть пересечения кривой локальных оптимумов с изолиниями фиксированной начальной синодической фазы.

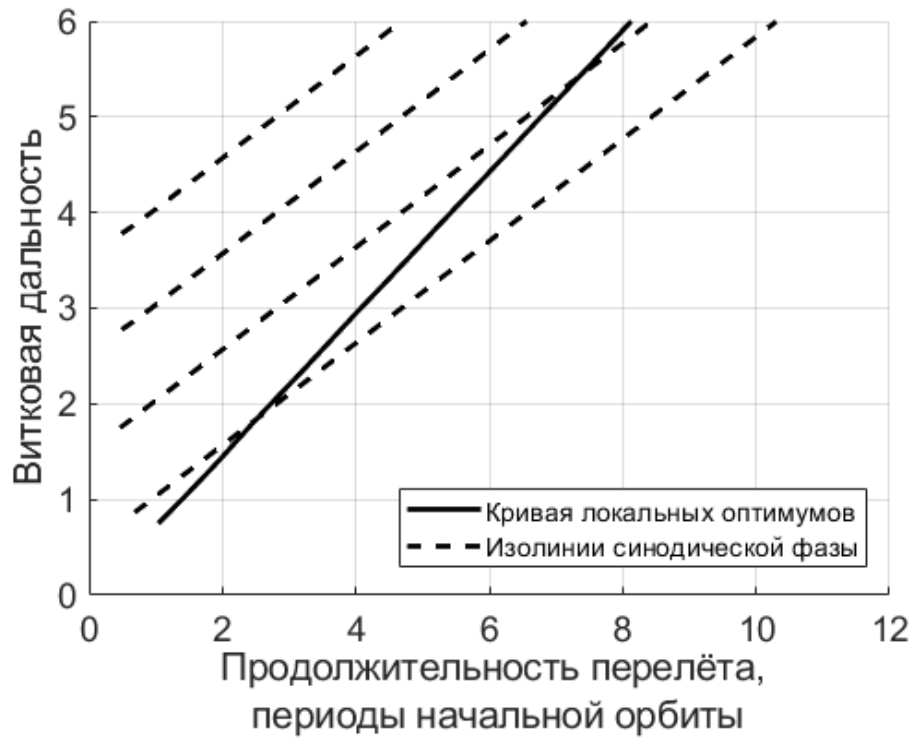


Рисунок 2.5 — Точки оптимальной дальности как пересечения кривой локальных оптимумов с изолиниями фиксированной начальной синодической фазы

Точки оптимальной дальности — это счётное множество точек пересечения кривой локальных оптимумов с изолиниями фиксированной начальной синодической фазы. Каждая такая точка соответствует локально оптимальному значению витковой дальности при заданной дате старта.

На рис. 2.5 показана геометрическая интерпретация этого определения. Кривая локальных оптимумов задаёт допустимые локально оптимальные значения витковой дальности, а изолинии начальной синодической фазы выделяют

из неё те решения, которые соответствуют выбранной дате старта. В результате для одной и той же даты может существовать не одна, а несколько точек оптимальной дальности.

Точки оптимальной дальности определены только после фиксации начальной синодической фазы. При изменении даты старта соответствующие изолинии сдвигаются, а вместе с ними сдвигаются и точки пересечения с кривой локальных оптимумов. При этом отдельные точки могут выходить из физически допустимой области $T > 0$, а новые точки, наоборот, входить в неё. Поэтому простая нумерация точек по положению на графике не является устойчивой.

При построении конечных формул возникает дополнительная особенность. Начальная синодическая фаза является геометрической величиной, заданной с точностью до периода, поэтому при приведении к основному диапазону она имеет разрывы. Непосредственная аппроксимация такой разрывной зависимости затруднительна. Поэтому далее вместо неё используется нормированная непрерывная фаза, то есть развёртка синодической фазы по витковой дальности.

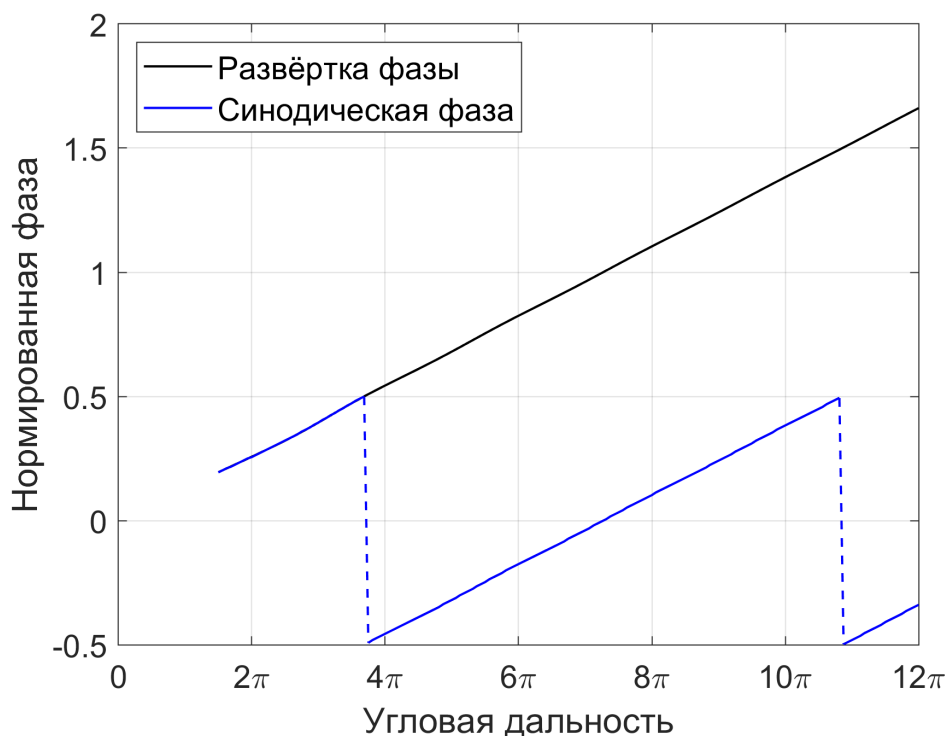


Рисунок 2.6 — Связь между синодической фазой и её непрерывной развёрткой

На рис. 2.6 показана эта связь. Синодическая фаза после приведения к основному диапазону имеет скачки, тогда как её развёртка изменяется непрерывно. Введём обозначение Ψ для нормированной непрерывной фазы. Если

Φ обозначает начальную синодическую фазу в радианной мере, то значение $\Phi/(2\pi)$ задаёт нормированную фазу с точностью до целого числа оборотов. Непрерывная фаза Ψ выбирает одну из таких ветвей и тем самым устраняет разрывы, мешающие аппроксимации.

Таким образом, точки оптимальной дальности связывают геометрическое описание кривой локальных оптимумов с прикладной постановкой, в которой задаётся дата старта. При фиксированной начальной синодической фазе они выделяют на кривой локальных оптимумов те значения витковой дальности, которые соответствуют выбранной конфигурации тел. При этом для последующего построения конечных формул удобнее работать не с разрывной синодической фазой, а с её нормированной непрерывной развёрткой Ψ . Это позволяет сохранить геометрический смысл начальной синодической фазы и одновременно получить гладкую зависимость, пригодную для аппроксимации.

2.5 Конечные формулы для продолжительности перелёта, непрерывной фазы и квадратичного функционала

После выделения кривой локальных оптимумов и введения точек оптимальной дальности следующей задачей становится получение компактных конечных формул для основных характеристик перелёта. В данном разделе рассматриваются конечные формулы для продолжительности перелёта, нормированной непрерывной фазы и квадратичного функционала. Эти величины определяют положение решения на кривой локальных оптимумов и позволяют восстановить основные баллистические характеристики перелёта без повторного решения двухточечной краевой задачи.

В дальнейшем различаются кинематические связи, следующие из постановки задачи и введённых обозначений, и конечные формулы, полученные методом символьной регрессии. Для конечных формул используется знак крышки: $\hat{T}$, $\hat{\Psi}$ и $\hat{J}$ обозначают конечные формулы для продолжительности перелёта, нормированной непрерывной фазы и квадратичного функционала соответственно. Точность этих формул характеризуется среднеквадратической ошибкой на тестовой выборке.

Для продолжительности перелёта используется конечная формула

$$\hat{T}(\lambda^*, \kappa) = \frac{2}{27} \kappa \ln \kappa + \lambda^* \left(\kappa - \frac{\sqrt{6}}{9} \kappa \ln \kappa \right). \quad (2.5)$$

Здесь независимыми переменными являются локально оптимальная витковая дальность λ^* и отношение радиусов κ . Формула сохраняет правильное поведение в предельном случае совпадающих круговых орбит:

$$\hat{T}(\lambda^*, 1) = \lambda^*. \quad (2.6)$$

Тем самым конечная формула для продолжительности перелёта не только описывает численно построенную кривую локальных оптимумов, но и согласуется с простейшим предельным режимом пассивного движения.

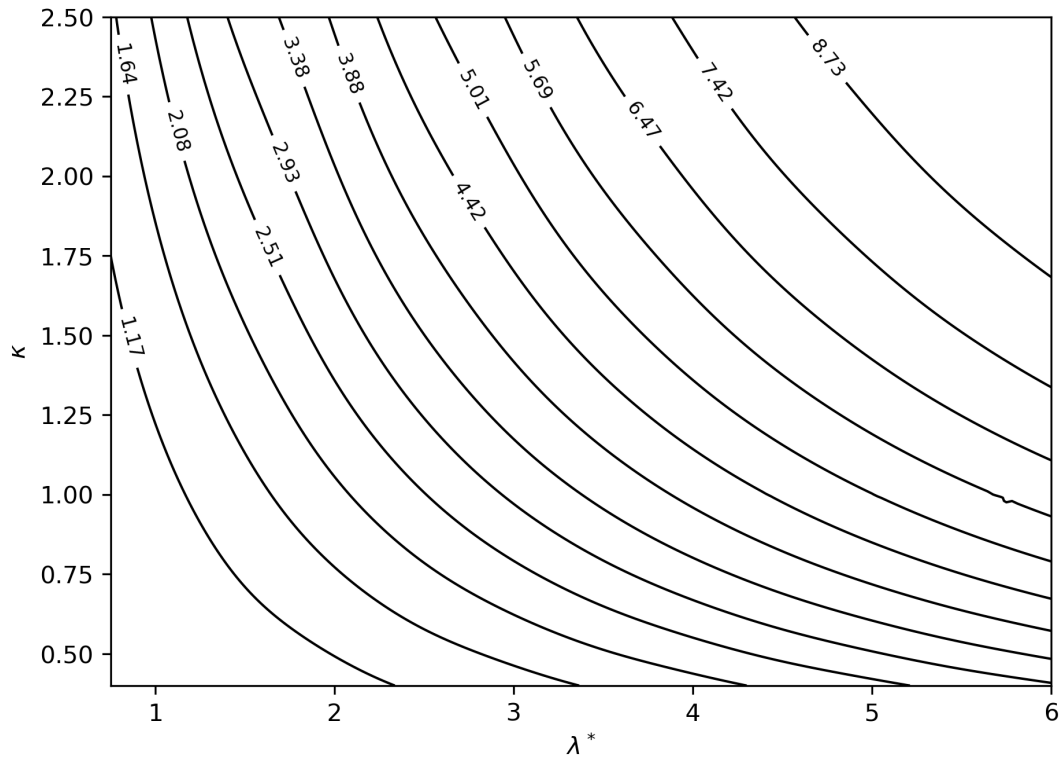


Рисунок 2.7 — Изолинии продолжительности перелёта на основной области

На рис. 2.7 показана структура продолжительности перелёта в координатах λ^* и κ . Изолинии отражают гладкий характер зависимости, что согласуется с простым видом конечной формулы для $\hat{T}$.

Между продолжительностью перелёта, витковой дальностью и непрерывной фазой существует кинематическая связь. В используемой нормировке её можно записать в виде

$$\Psi = \lambda^* - \frac{T}{\kappa^{3/2}}. \quad (2.7)$$

Поэтому после получения конечной формулы для продолжительности перелёта можно построить производную оценку непрерывной фазы:

$$\widehat{\Psi}_T(\lambda^*, \kappa) = \lambda^* - \frac{\widehat{T}(\lambda^*, \kappa)}{\kappa^{3/2}}. \quad (2.8)$$

Подставляя сюда конечную формулу для $\widehat{T}$, получаем

$$\widehat{\Psi}_T(\lambda^*, \kappa) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\kappa}} + \frac{\sqrt{6} \ln \kappa}{9 \sqrt{\kappa}}\right) \lambda^* - \frac{2 \ln \kappa}{27 \sqrt{\kappa}}. \quad (2.9)$$

Таким образом, непрерывная фаза может быть восстановлена двумя способами: через кинематическую связь с продолжительностью перелёта или с помощью самостоятельной конечной формулы, полученной методом символьной регрессии. В качестве основной далее используется самостоятельная формула для $\widehat{\Psi}$, качество обоих вариантов сопоставляется при верификации конечных формул.

Как было отмечено в предыдущем разделе, непосредственная аппроксимация начальной синодической фазы затруднительна из-за её разрывов при приведении к основному диапазону. Поэтому для построения конечной формулы используется нормированная непрерывная фаза Ψ , представляющая собой развёртку синодической фазы по витковой дальности. Для кривой локальных оптимумов она записывается в виде

$$\widehat{\Psi}(\lambda^*, \kappa) = \mathcal{A}_0^{(\Psi)}(\kappa) + \mathcal{A}_1^{(\Psi)}(\kappa) \lambda^*. \quad (2.10)$$

Коэффициент-функции этой линейной зависимости имеют вид

$$\mathcal{A}_0^{(\Psi)}(\kappa) = -C_0^{(\Psi)} e^{-\kappa} \ln^2 \kappa, \quad (2.11)$$

$$\mathcal{A}_1^{(\Psi)}(\kappa) = C_0^{(\Psi)} (e^{\kappa} + 1) e^{-\kappa} \ln \kappa, \quad (2.12)$$

где

$$C_0^{(\Psi)} = 5.433280 \times 10^{-1}. \quad (2.13)$$

Таким образом, при фиксированном значении κ непрерывная фаза описывается линейной функцией локально оптимальной витковой дальности, а зависимость от отношения радиусов полностью сосредоточена в коэффициент-функциях $\mathcal{A}_0^{(\Psi)}(\kappa)$ и $\mathcal{A}_1^{(\Psi)}(\kappa)$.

На рис. 2.8 показана структура нормированной непрерывной фазы в координатах λ^* и κ . Использование развёртки позволяет заменить разрывную

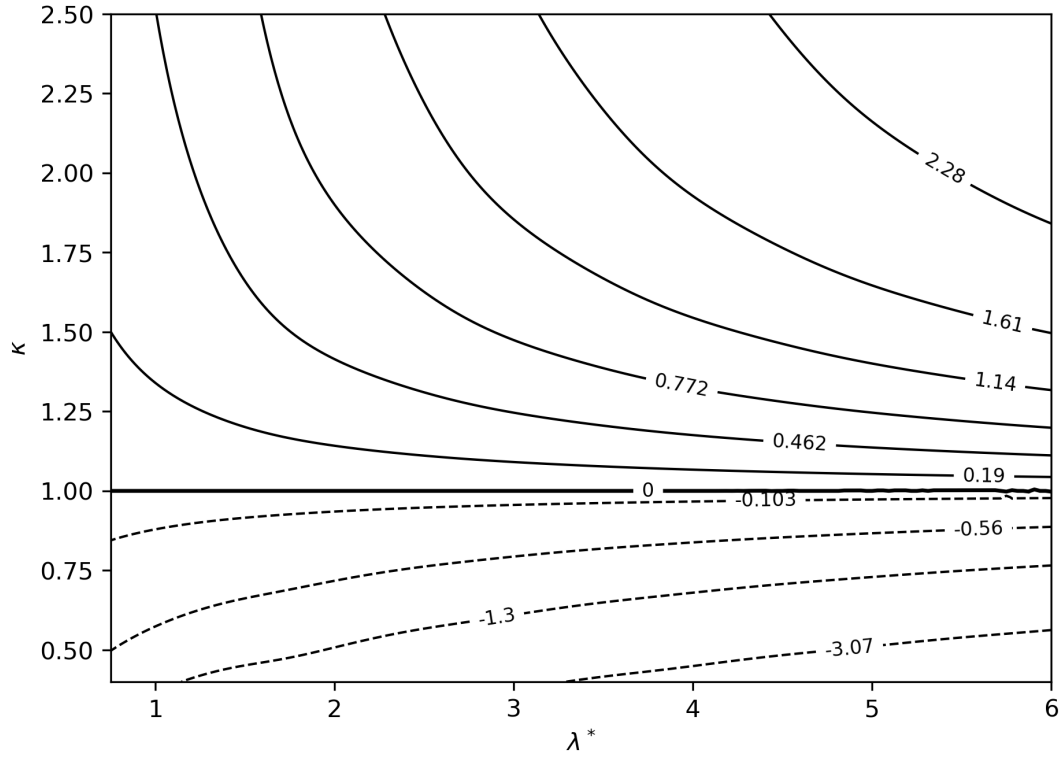


Рисунок 2.8 — Изолинии нормированной непрерывной фазы на основной области

зависимость начальной синодической фазы гладкой функцией, пригодной для построения конечной формулы.

Эта формула позволяет перейти от заданной даты старта к точкам оптимальной дальности. Пусть для даты старта t_0 вычислена начальная синодическая фаза $\Phi(t_0)$. Тогда соответствующее нормированное значение фазы равно

$$\Psi_0 = \frac{\Phi(t_0)}{2\pi}. \quad (2.14)$$

Поскольку непрерывная фаза разворачивает синодическую фазу по целому числу оборотов, точки оптимальной дальности находятся из условия

$$\widehat{\Psi}(\widehat{\lambda}_k^*, \kappa) = \Psi_0 + k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.15)$$

Отсюда следует обратная формула для локально оптимальной витковой дальности:

$$\widehat{\lambda}_k^* = \frac{\Psi_0 - \mathcal{A}_0^{(\Psi)}(\kappa) + k}{\mathcal{A}_1^{(\Psi)}(\kappa)}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.16)$$

Из полученного счётного множества далее рассматриваются только те значения $\widehat{\lambda}_k^*$, которые попадают в физически допустимую область и область применимости конечных формул.

После определения $\hat{\lambda}_k^*$ продолжительность соответствующего перелёта вычисляется подстановкой этого значения в конечную формулу для продолжительности:

$$\hat{T}_k = \hat{T}(\hat{\lambda}_k^*, \kappa). \quad (2.17)$$

Тем самым заданная дата старта порождает набор точек оптимальной дальности и соответствующий набор продолжительностей перелёта.

Для оценки энергетической цены перелёта используется конечная формула для квадратичного функционала:

$$\hat{J}(\lambda^*, \kappa) = \frac{\left(C_0^{(J)} + \frac{C_1^{(J)}}{\kappa} + \frac{C_2^{(J)}}{\kappa^2} \right) \ln \kappa}{\lambda^* + C_3^{(J)} \left(\sin \left(2\pi\lambda^* + C_4^{(J)} - \frac{1}{\lambda^*} \right) - \lambda^* \right) e^{-\lambda^*}}. \quad (2.18)$$

Численные значения коэффициентов $C_0^{(J)}, \dots, C_4^{(J)}$ приведены в приложении Б. В отличие от конечных формул для продолжительности перелёта и непрерывной фазы, выражение для функционала явно содержит осциллирующую составляющую. Её сохранение необходимо для описания колебательной структуры функционала вдоль кривой локальных оптимумов.

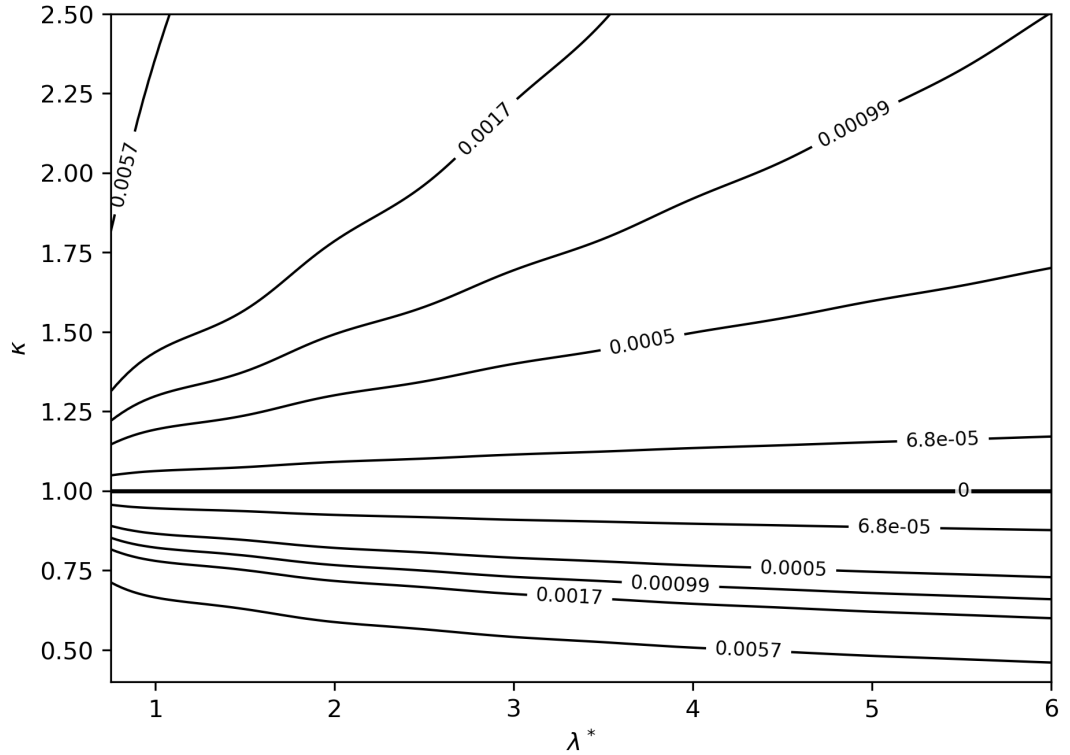


Рисунок 2.9 — Изолинии квадратичного функционала на основной области

На рис. 2.9 показана структура квадратичного функционала в координатах λ^* и κ . Рационально-тригонометрическая структура конечной формулы позволяет воспроизводить как общий спад функционала при росте витковой дальности, так и остаточные колебания вдоль кривой локальных оптимумов.

Полученные конечные формулы допускают как прямое, так и обратное использование. В прямой постановке по заданной дате старта вычисляется начальная синодическая фаза, затем определяются допустимые значения $\hat{\lambda}_k^*$, после чего находятся продолжительность перелёта и значение функционала. В обратной постановке заданные ограничения на продолжительность перелёта, функционал или витковую дальность могут использоваться для восстановления допустимых значений начальной синодической фазы и соответствующих дат старта. В настоящей главе это свойство рассматривается как следствие структуры кривой локальных оптимумов, его алгоритмическое применение связано с построением начального приближения.

2.6 Конечные формулы для параметров оптимального управления

Помимо продолжительности перелёта, непрерывной фазы и квадратичного функционала, для построения начального приближения необходимо аппроксимировать параметры оптимального управления. В соответствии с обозначениями, введёнными в главе 1, такими параметрами являются начальные значения сопряжённых переменных. В плоской задаче они образуют вектор

$$\mathbf{z}_0^{\text{pl}} = (p_{rx}(t_0), p_{ry}(t_0), p_{vx}(t_0), p_{vy}(t_0)). \quad (2.19)$$

Далее рассматриваются конечные формулы для этих величин на кривой локальных оптимумов.

Решение двухточечной краевой задачи чувствительно к выбору начальных значений сопряжённых переменных, поэтому их аппроксимация имеет не только описательный, но и прикладной смысл. Зная параметры оптимального управления, можно построить начальное приближение для последующей численной оптимизации в более сложной постановке.

На рис. 2.10 показано поведение начальных значений сопряжённых переменных вдоль кривой локальных оптимумов. Видно, что зависимости имеют

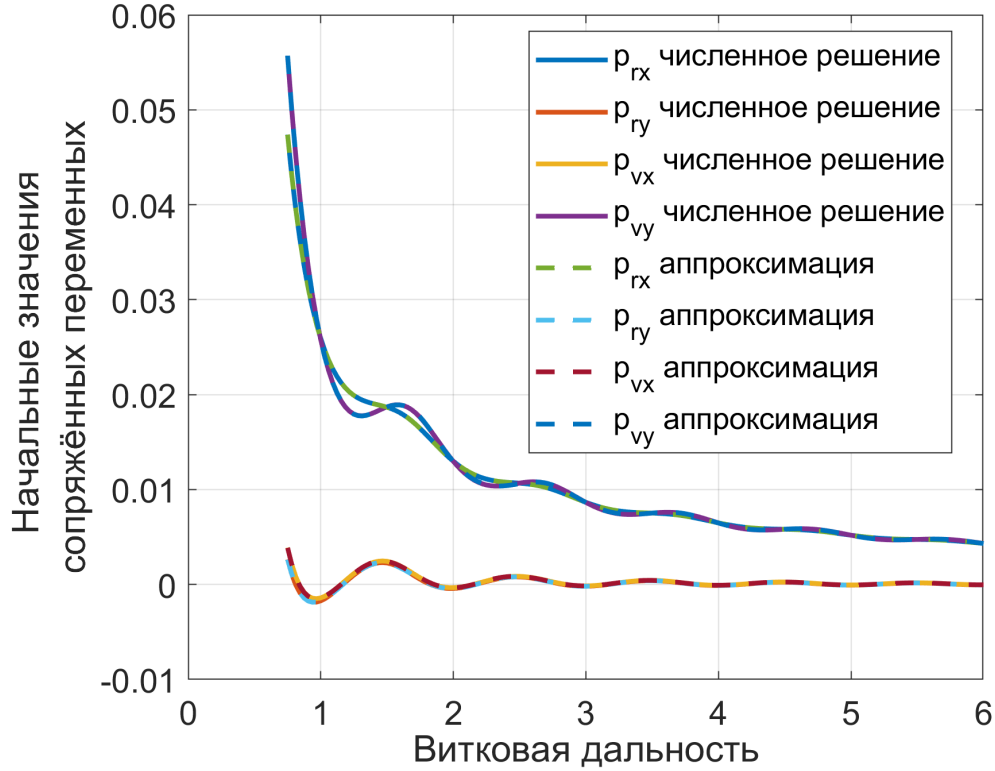


Рисунок 2.10 — Поведение параметров оптимального управления вдоль кривой локальных оптимумов

выраженную попарную структуру. Первая пара образуется компонентами $p_{rx}(t_0)$ и $p_{vy}(t_0)$, вторая — компонентами $p_{ry}(t_0)$ и $p_{vx}(t_0)$. Внутри каждой пары компоненты имеют близкий характер изменения и допускают запись в симметричном виде.

Для компактной записи конечных формул введём обозначение

$$\hat{\mathbf{z}}_0^{\text{pl}} = (\hat{p}_{rx}, \hat{p}_{ry}, \hat{p}_{vx}, \hat{p}_{vy}). \quad (2.20)$$

В формулах ниже коэффициенты $C_i^{(X)}$ и функции $\mathcal{D}$ записываются как константы. При фиксированном значении $\mathbf{k}$ это именно числовые коэффициенты, в общем случае они являются функциями отношения радиусов. Громоздкие зависимости этих коэффициентов от $\mathbf{k}$ вынесены в приложение Б.

Для первой пары компонент используется дробно-тригонометрическая структура

$$\hat{p}_{rx}(\lambda^*) = \frac{C_0^{(p_{rx})}}{C_1^{(p_{rx})}\lambda^* + C_2^{(p_{rx})} + \sin\left(2\pi\lambda^* + C_3^{(p_{rx})} + \mathcal{D}_1^{(p_{rx})}(\lambda^*)\right) + \mathcal{D}_0^{(p_{rx})}(\lambda^*)}, \quad (2.21)$$

$$\widehat{p}_{vy}(\lambda^*) = \frac{C_0^{(p_{vy})}}{C_1^{(p_{vy})}\lambda^* + C_2^{(p_{vy})} + \sin\left(2\pi\lambda^* + C_3^{(p_{vy})} + \mathcal{D}_1^{(p_{vy})}(\lambda^*)\right) + \mathcal{D}_0^{(p_{vy})}(\lambda^*)}. \quad (2.22)$$

Для второй пары компонент используется другая, но также попарно симметричная структура:

$$\widehat{p}_{ry}(\lambda^*) = \frac{C_0^{(p_{ry})} + C_1^{(p_{ry})} \cos\left(2\pi\lambda^* + \mathcal{D}_0^{(p_{ry})}(\lambda^*)\right)}{(\lambda^*)^2 + C_2^{(p_{ry})}\lambda^* + C_3^{(p_{ry})}}, \quad (2.23)$$

$$\widehat{p}_{vx}(\lambda^*) = \frac{C_0^{(p_{vx})} + C_1^{(p_{vx})} \cos\left(2\pi\lambda^* + \mathcal{D}_0^{(p_{vx})}(\lambda^*)\right)}{(\lambda^*)^2 + C_2^{(p_{vx})}\lambda^* + C_3^{(p_{vx})}}. \quad (2.24)$$

Коэффициенты $C_i^{(X)}$ задают основную часть зависимости и определяются по результатам символьной регрессии. Однако одних $C_i^{(X)}$ -коэффициентов оказывается недостаточно для равномерного описания всей области значений λ^* . В области малой витковой дальности существенную роль играют дополнительные поправочные функции $\mathcal{D}$.

Для компонент $p_{rx}(t_0)$ и $p_{vy}(t_0)$ используются по две поправочные функции:

$$\mathcal{D}_0^{(p_{rx})}(\lambda^*) = \left(C_0^{(D_0, p_{rx})} + C_1^{(D_0, p_{rx})}\lambda^* + C_2^{(D_0, p_{rx})}(\lambda^*)^2\right) \exp\left(C_3^{(D_0, p_{rx})}\lambda^*\right), \quad (2.25)$$

$$\mathcal{D}_1^{(p_{rx})}(\lambda^*) = \frac{C_0^{(D_1, p_{rx})}}{(\lambda^*)^2 + C_1^{(D_1, p_{rx})}\lambda^* + C_2^{(D_1, p_{rx})}}, \quad (2.26)$$

$$\mathcal{D}_0^{(p_{vy})}(\lambda^*) = \left(C_0^{(D_0, p_{vy})}(\lambda^*)^2 + C_1^{(D_0, p_{vy})}\lambda^* + C_2^{(D_0, p_{vy})}\right) \exp\left(C_3^{(D_0, p_{vy})}\lambda^*\right), \quad (2.27)$$

$$\mathcal{D}_1^{(p_{vy})}(\lambda^*) = \frac{C_0^{(D_1, p_{vy})}}{(\lambda^*)^2 + C_1^{(D_1, p_{vy})}\lambda^* + C_2^{(D_1, p_{vy})}}. \quad (2.28)$$

Для компонент $p_{ry}(t_0)$ и $p_{vx}(t_0)$ поправочные функции входят в фазу косинуса:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0^{(p_{ry})}(\lambda^*) &= \left(C_0^{(D_0, p_{ry})}(\lambda^*)^2 + C_1^{(D_0, p_{ry})}\lambda^* + C_2^{(D_0, p_{ry})}\right) \\ &\times \exp\left(C_3^{(D_0, p_{ry})}\lambda^* + C_4^{(D_0, p_{ry})}(\lambda^*)^2\right), \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0^{(p_{vx})}(\lambda^*) &= \left(C_0^{(D_0, p_{vx})}(\lambda^*)^2 + C_1^{(D_0, p_{vx})}\lambda^* + C_2^{(D_0, p_{vx})}\right) \\ &\times \exp\left(C_3^{(D_0, p_{vx})}\lambda^* + C_4^{(D_0, p_{vx})}(\lambda^*)^2\right). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Функции $\mathcal{D}$ быстро убывают при росте витковой дальности и становятся пренебрежимо малыми в многовитковой области. Поэтому они описывают прежде всего переходную область малой витковой дальности. Их введение позволяет сшить мало- и многовитковые решения одной конечной формулой, а также повысить точность определения $C_i^{(X)}$ -коэффициентов за счёт раздельного описания основной зависимости и локальной поправки.

При построении этих выражений дополнительно проверялось отсутствие нулей в знаменателях на рассматриваемой области определения. Это важно, поскольку конечные формулы должны использоваться не только для описания уже построенных точек, но и для последующего вычисления начальных приближений.

Итоговая двумерная аппроксимация начальных значений сопряжённых переменных в основной области строится согласованием одномерных конечных формул, полученных для двух характерных значений отношения радиусов $\kappa_1 = 0.72$ и $\kappa_2 = 1.52$. Такой способ позволяет сохранить компактную структуру записи: зависимость от витковой дальности λ^* задаётся одномерными формулами на двух эталонных сечениях, а зависимость от κ восстанавливается с помощью простых степенных выражений. Для каждой компоненты начального вектора сопряжённых переменных сначала задаются значения на двух эталонных сечениях:

$$p_{rx}^{(1)}(\lambda^*) = \widehat{p}_{rx}(\lambda^*, \kappa_1), \quad p_{rx}^{(2)}(\lambda^*) = \widehat{p}_{rx}(\lambda^*, \kappa_2), \quad (2.31)$$

$$p_{ry}^{(1)}(\lambda^*) = \widehat{p}_{ry}(\lambda^*, \kappa_1), \quad p_{ry}^{(2)}(\lambda^*) = \widehat{p}_{ry}(\lambda^*, \kappa_2), \quad (2.32)$$

$$p_{vx}^{(1)}(\lambda^*) = \widehat{p}_{vx}(\lambda^*, \kappa_1), \quad p_{vx}^{(2)}(\lambda^*) = \widehat{p}_{vx}(\lambda^*, \kappa_2), \quad (2.33)$$

$$p_{vy}^{(1)}(\lambda^*) = \widehat{p}_{vy}(\lambda^*, \kappa_1), \quad p_{vy}^{(2)}(\lambda^*) = \widehat{p}_{vy}(\lambda^*, \kappa_2). \quad (2.34)$$

Одномерные конечные формулы на эталонных сечениях, а также вспомогательные функции $\mathcal{P}_0^{(\kappa)}, \dots, \mathcal{P}_7^{(\kappa)}$, используемые для восстановления зависимости от κ , приведены в приложении В.

Для компоненты p_{rx} восстановление по κ задаётся формулой

$$\widehat{p}_{rx}(\lambda^*, \kappa) = \ln \kappa \left(\frac{\mathcal{P}_0^{(\kappa)}(\lambda^*, \kappa_1, \kappa_2)}{\kappa} + \frac{\mathcal{P}_1^{(\kappa)}(\lambda^*, \kappa_1, \kappa_2)}{\kappa^{1/4}} \right). \quad (2.35)$$

Для компоненты p_{vy} используется та же степенная структура:

$$\widehat{p}_{vy}(\lambda^*, \kappa) = \ln \kappa \left(\frac{\mathcal{P}_6^{(\kappa)}(\lambda^*, \kappa_1, \kappa_2)}{\kappa} + \frac{\mathcal{P}_7^{(\kappa)}(\lambda^*, \kappa_1, \kappa_2)}{\kappa^{1/4}} \right). \quad (2.36)$$

Для компоненты p_{ry} используется другая степенная зависимость:

$$\widehat{p}_{ry}(\lambda^*, \kappa) = \ln \kappa \left(\frac{\mathcal{P}_2^{(\kappa)}(\lambda^*, \kappa_1, \kappa_2)}{\kappa} + \frac{\mathcal{P}_3^{(\kappa)}(\lambda^*, \kappa_1, \kappa_2)}{\kappa^{3/2}} \right). \quad (2.37)$$

Для компоненты p_{vx} используется та же форма восстановления:

$$\widehat{p}_{vx}(\lambda^*, \kappa) = \ln \kappa \left(\frac{\mathcal{P}_4^{(\kappa)}(\lambda^*, \kappa_1, \kappa_2)}{\kappa} + \frac{\mathcal{P}_5^{(\kappa)}(\lambda^*, \kappa_1, \kappa_2)}{\kappa^{3/2}} \right). \quad (2.38)$$

Таким образом, двумерная конечная формула для плоских начальных значений сопряжённых переменных имеет вид

$$\widehat{\mathbf{z}}_0^{\text{pl}}(\lambda^*, \kappa) = (\widehat{p}_{rx}(\lambda^*, \kappa), \widehat{p}_{ry}(\lambda^*, \kappa), 0, \widehat{p}_{vx}(\lambda^*, \kappa), \widehat{p}_{vy}(\lambda^*, \kappa), 0)^T. \quad (2.39)$$

Нулевые третьи компоненты соответствуют плоской круговой постановке. Полученный вектор $\widehat{\mathbf{z}}_0^{\text{pl}}$ далее используется как плоское начальное приближение при построении пространственных и эллиптических решений с помощью R -преобразований.

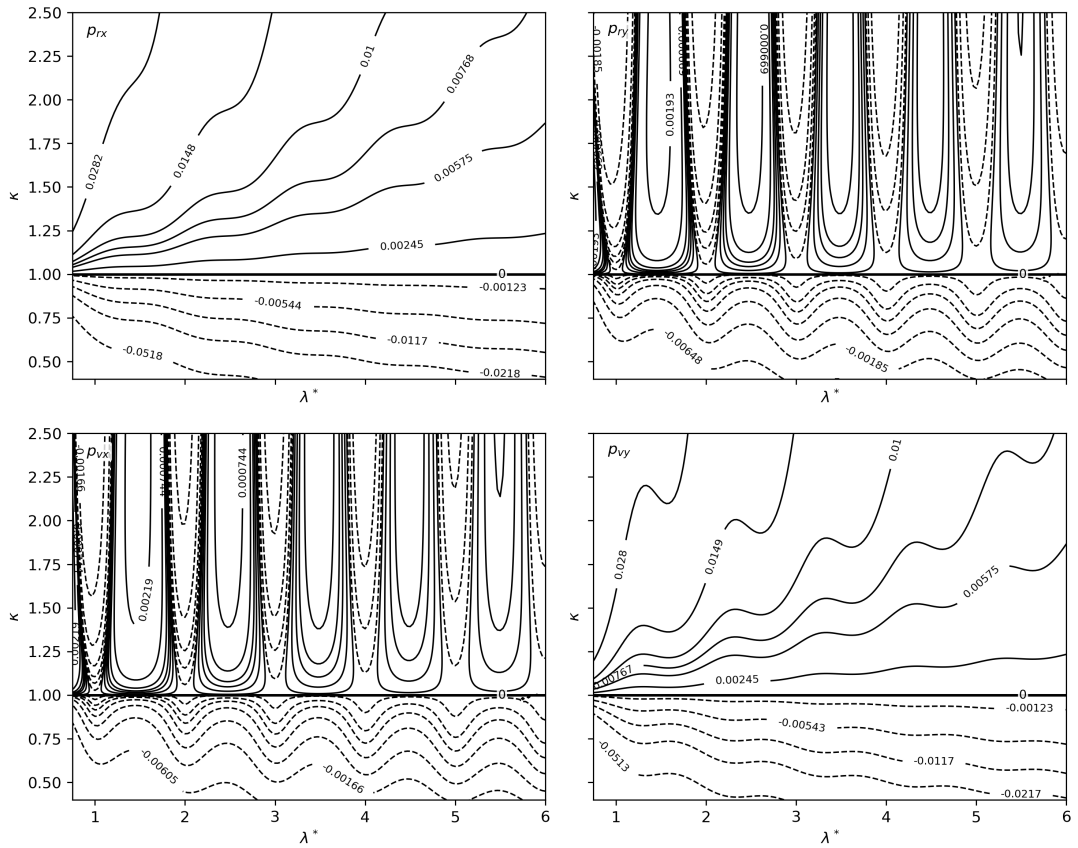


Рисунок 2.11 — Изолинии параметров оптимального управления на основной области

На рис. 2.11 показаны структуры компонент параметров оптимального управления при изменении λ^* и κ . Этот рисунок подтверждает, что попарная структура сохраняется не только при фиксированном отношении радиусов, но и на диапазоне значений κ . Громоздкие выражения для двумерных коэффициентов вынесены в приложение Б.

Наблюдаемая разделяемость на основную часть с $C_i^{(X)}$ -коэффициентами и быстро затухающие $\mathcal{D}$ -функции рассматривается как устойчивая численная структура. Она позволяет получить компактные конечные формулы для параметров оптимального управления.

Таким образом, конечные формулы для начальных значений сопряжённых переменных дополняют зависимости для продолжительности перелёта, непрерывной фазы и квадратичного функционала. Вместе они позволяют восстановить полный набор характеристик решения на кривой локальных оптимумов. В следующем разделе будет рассмотрен дополнительный набор конечных формул для области малой витковой дальности.

2.7 Дополнительные конечные формулы для продолжительности перелёта, непрерывной фазы и квадратичного функционала в области малой витковой дальности

Основные конечные формулы, рассмотренные выше, строились для рабочей области кривой локальных оптимумов. Однако при дальнейшем использовании этих зависимостей в задаче построения начального приближения возможно прохождение через область малой витковой дальности. Поэтому для устойчивости вычислительной процедуры дополнительно были построены конечные формулы в области

$$\lambda^* < 0.75. \quad (2.40)$$

Эта область не является основной для баллистического проектирования, однако она важна как переходная зона, в которой сохраняется возможность непрерывного продолжения решения.

В маловитковой области зависимости имеют менее регулярный вид, а качество аппроксимаций оказывается ниже, чем в основной области. Тем не менее

общая логика построения сохраняется: конечные формулы задаются как функции локально оптимальной витковой дальности λ^* и отношения радиусов κ . В данном разделе рассматриваются формулы для продолжительности перелёта, нормированной непрерывной фазы и квадратичного функционала.

Для продолжительности перелёта используется конечная формула

$$\hat{T}_s(\lambda^*, \kappa) = \frac{(C_1^{(T_s)} \kappa + C_0^{(T_s)}) (\lambda^*)^{-\kappa}}{\lambda^* + C_4^{(T_s)}} \left[(\lambda^*)^{\kappa+1} (\lambda^* + C_4^{(T_s)}) - \kappa \left((C_2^{(T_s)})^\kappa \ln(\kappa + \lambda^*) - C_3^{(T_s)} \right) \right]. \quad (2.41)$$

Эта запись является упрощённой формой выражения, полученного методом символьной регрессии. Коэффициенты $C_i^{(T_s)}$ приведены в табл. 2.1.

Для нормированной непрерывной фазы используется выражение

$$\hat{\Psi}_s(\lambda^*, \kappa) = C_0^{(\Psi_s)} \frac{\kappa - C_1^{(\Psi_s)}}{\kappa} \left[\lambda^* + C_2^{(\Psi_s)} \frac{(\kappa \lambda^* - \kappa) \cos(\lambda^*/C_3^{(\Psi_s)})}{\kappa (\lambda^*)^2 + C_4^{(\Psi_s)}} \right]. \quad (2.42)$$

Эта формула аппроксимирует именно непрерывную развёртку фазы, а не разрывную начальную синодическую фазу.

Для квадратичного функционала используется конечная формула

$$\hat{J}_s(\lambda^*, \kappa) = \left[\kappa (C_0^{(J_s)} \lambda^* - C_1^{(J_s)}) \right]^{-C_2^{(J_s)}} \ln \kappa \arctan \left(C_3^{(J_s)} \frac{\ln \kappa \cos \lambda^*}{(\lambda^*)^2} \right). \quad (2.43)$$

В отличие от основной области, здесь формула носит более выраженный эмпирический характер. Она используется для сохранения работоспособности приближённого описания в переходной области, а не как основной инструмент анализа энергетической структуры решений.

Таблица 2.1 — Коэффициенты конечных формул для скалярных характеристик в области малой витковой дальности

i	$C_i^{(T_s)}$	$C_i^{(\Psi_s)}$	$C_i^{(J_s)}$
0	2.471759×10^{-1}	7.580183×10^{-1}	3.356164×10^0
1	7.521363×10^{-1}	9.992080×10^{-1}	1.733732×10^{-2}
2	1.492537×10^{-3}	1.105874×10^{-2}	1.255216×10^0
3	3.217671×10^{-4}	3.947063×10^{-1}	6.523414×10^{-2}
4	9.116870×10^{-2}	9.082422×10^{-3}	—

Таким образом, для области малой витковой дальности построен отдельный набор конечных формул для скалярных характеристик. Эти зависимости дополняют основные формулы главы и обеспечивают непрерывность приближённого описания при проходе через маловитковую область. Конечные формулы для параметров оптимального управления в этой же области рассматриваются в следующем разделе.

2.8 Дополнительные конечные формулы для параметров оптимального управления в области малой витковой дальности

В области малой витковой дальности дополнительно аппроксимируются параметры оптимального управления. Как и в основной области, речь идёт о начальных значениях сопряжённых переменных

$$\mathbf{z}_{0,s}^{\text{pl}} = (p_{rx,s}, p_{ry,s}, p_{vx,s}, p_{vy,s}). \quad (2.44)$$

Эти формулы используются как техническое расширение основного набора конечных формул и обеспечивают возможность прохода вычислительной процедуры через область $\lambda^* < 0.75$.

В отличие от основной области, здесь не удаётся сохранить столь же регулярную попарную структуру. Зависимости начальных значений сопряжённых переменных имеют более выраженный эмпирический характер, поэтому для каждой компоненты используется отдельная конечная формула. При этом все формулы задаются как функции локально оптимальной витковой дальности λ^* и отношения радиусов κ .

Для первой компоненты используется выражение

$$\hat{p}_{rx,s} = \frac{\sin\left(C_0^{(p_{rx,s})} \left(C_1^{(p_{rx,s})}\right)^\kappa (\lambda^*)^{C_2^{(p_{rx,s})}} \ln \kappa\right)}{\left(C_3^{(p_{rx,s})} \lambda^* - C_4^{(p_{rx,s})}\right) \arctan\left(\kappa \lambda^* + C_5^{(p_{rx,s})} \kappa + C_5^{(p_{rx,s})} \lambda^*\right)}. \quad (2.45)$$

Для второй компоненты конечная формула имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{p}_{ry,s} = C_0^{(p_{ry,s})} & \left((\lambda^*)^{C_1^{(p_{ry,s})}} \left[\left(C_2^{(p_{ry,s})} \right)^\kappa - C_3^{(p_{ry,s})} \right] + \frac{\lambda^*}{\ln(\exp(\arctan \kappa) \cos \lambda^*)} + C_4^{(p_{ry,s})} \right) \\ & \times \arctan \left(\frac{C_5^{(p_{ry,s})} \ln \kappa}{\kappa \left[\left(C_6^{(p_{ry,s})} \right)^{\lambda^*} - \cos \lambda^* \right]} \right). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Для третьей компоненты используется выражение

$$\begin{aligned} \hat{p}_{vx,s} = & \left(\sin \left(\left[\frac{C_0^{(p_{vx,s})} \kappa C_1^{(p_{vx,s})}}{\lambda^*} + C_2^{(p_{vx,s})} \right] \ln \kappa + C_3^{(p_{vx,s})} \right) - C_4^{(p_{vx,s})} \right) \\ & \times \left(\arctan \left(\arctan \left(\sin \left(C_5^{(p_{vx,s})} \kappa \lambda^* \right) \right) \right) - C_6^{(p_{vx,s})} - \frac{C_7^{(p_{vx,s})}}{\lambda^*} \right). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Для четвёртой компоненты конечная формула записывается следующим образом:

$$\hat{p}_{vy,s} = C_0^{(p_{vy,s})} \frac{\sin \left(\left(C_1^{(p_{vy,s})} + \frac{\kappa - C_2^{(p_{vy,s})}}{\lambda^*} \right) \left(C_3^{(p_{vy,s})} \lambda^* + \frac{C_4^{(p_{vy,s})}}{\kappa} \right) \right)}{\lambda^* + C_5^{(p_{vy,s})}} - \frac{C_6^{(p_{vy,s})}}{\kappa \left(\lambda^* + C_7^{(p_{vy,s})} \right)}. \quad (2.48)$$

Численные значения коэффициентов приведены в табл. 2.2.

Таблица 2.2 — Коэффициенты конечных формул для параметров оптимального управления в области малой витковой дальности

i	$C_i^{(p_{rx,s})}$	$C_i^{(p_{ry,s})}$	$C_i^{(p_{vx,s})}$	$C_i^{(p_{vy,s})}$
0	3.672486×10^{-1}	3.761297×10^{-1}	-6.314482×10^{-1}	2.726534×10^{-1}
1	8.698383×10^{-1}	-2.675998×10^0	-1.016633×10^{-1}	1.362426×10^0
2	-1.331958×10^0	2.020348×10^{-2}	7.831392×10^{-1}	9.528189×10^{-1}
3	4.267445×10^0	1.544355×10^{-2}	2.694440×10^{-2}	-1.458830×10^{-1}
4	1.545107×10^{-1}	2.721447×10^0	2.947545×10^{-2}	7.468672×10^{-1}
5	4.400075×10^{-1}	1.223626×10^1	1.375256×10^0	1.002664×10^{-1}
6	—	7.431963×10^3	5.874708×10^{-1}	2.021448×10^{-1}
7	—	—	2.069705×10^{-1}	4.505406×10^{-2}

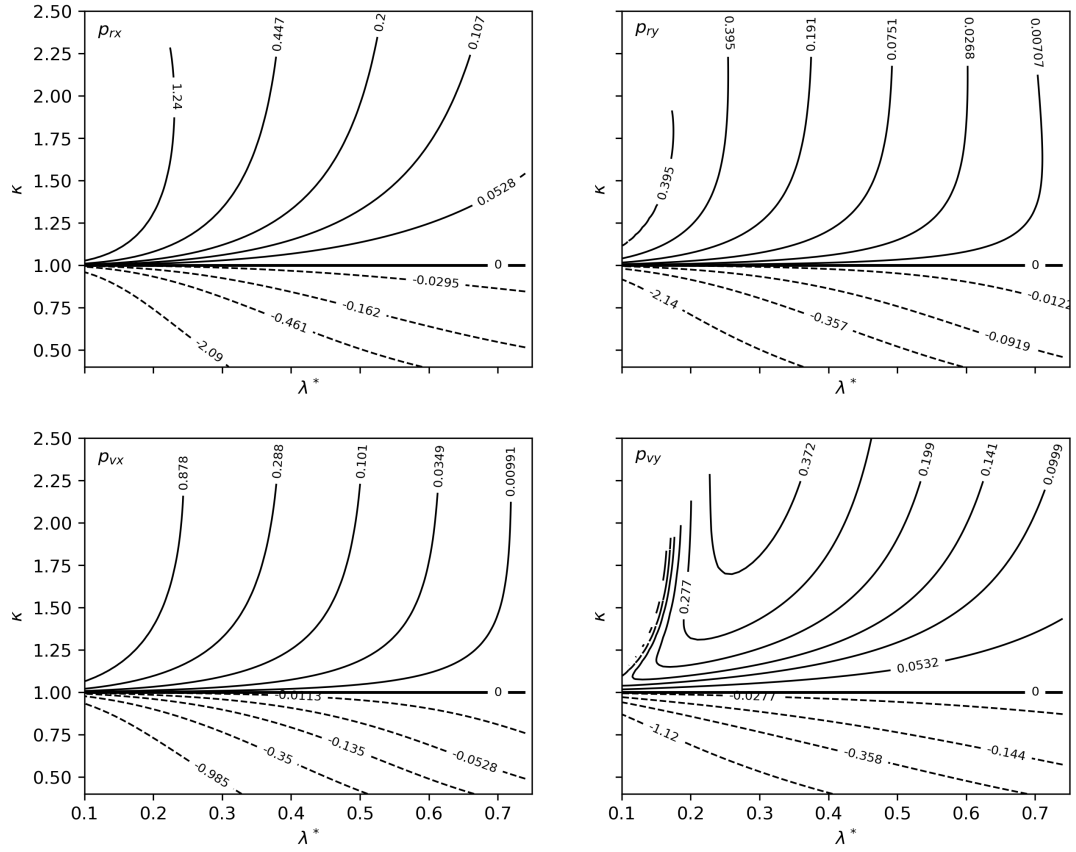


Рисунок 2.12 — Изолинии параметров оптимального управления в области малой витковой дальности

На рис. 2.12 показана структура параметров оптимального управления в области малой витковой дальности. В отличие от основной области, здесь зависимости менее регулярны, что объясняет более сложный вид конечных формул и более низкое качество аппроксимации. Тем не менее полученный набор зависимостей позволяет восстановить начальные значения сопряжённых переменных в переходной области и тем самым дополняет основной набор конечных формул.

Таким образом, для области малой витковой дальности построены конечные формулы как для скалярных характеристик, так и для параметров оптимального управления. Вместе с формулами основной области они задают приближённое описание решений на рассматриваемом диапазоне λ^* и κ . В следующем разделе будет приведена количественная верификация качества построенных конечных формул.

2.9 Верификация качества конечных формул

В предыдущих разделах были построены конечные формулы для основной области и для области малой витковой дальности. Для оценки их качества использовались одни и те же метрики: характерный масштаб величины, среднеквадратическая ошибка, средняя абсолютная ошибка и максимальная абсолютная ошибка. Для скалярной величины x с аппроксимацией $\hat{x}$ ошибка в узле сетки определяется как

$$\Delta_i = \hat{x}_i - x_i. \quad (2.49)$$

Характерный масштаб величины задаётся среднеквадратическим значением самой величины:

$$S(x) = \sqrt{\frac{1}{N_{\text{samp}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{samp}}} x_i^2}. \quad (2.50)$$

Далее используются метрики

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{N_{\text{samp}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{samp}}} \Delta_i^2}, \quad \text{MAE} = \frac{1}{N_{\text{samp}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{samp}}} |\Delta_i|, \quad \max |\Delta| = \max_i |\Delta_i|. \quad (2.51)$$

Для параметров оптимального управления дополнительно рассматривается агрегированная ошибка вектора

$$\Delta_{\mathbf{z},i} = \left\| \hat{\mathbf{z}}_{0,i}^{\text{pl}} - \mathbf{z}_{0,i}^{\text{pl}} \right\|_2. \quad (2.52)$$

Соответствующий масштаб задаётся выражением

$$S(\mathbf{z}_0^{\text{pl}}) = \sqrt{\frac{1}{N_{\text{samp}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{samp}}} \left\| \mathbf{z}_{0,i}^{\text{pl}} \right\|_2^2}. \quad (2.53)$$

В табл. 2.3 приведены значения метрик для основной области. Видно, что для продолжительности перелёта и непрерывной фазы ошибки малы по сравнению с характерным масштабом соответствующих величин. Для параметров оптимального управления наибольшая локальная ошибка наблюдается у компоненты p_{rx} , однако агрегированная среднеквадратическая ошибка вектора $\mathbf{z}_0^{\text{pl}}$ остаётся существенно меньше его характерного масштаба.

Таблица 2.3 — Качество конечных формул в основной области

Величина	Масштаб S	RMSE (σ)	MAE	$\max \Delta $
$\hat{T}$	4.96×10^0	2.32×10^{-2}	1.46×10^{-2}	1.44×10^{-1}
$\hat{\Psi}_T$	1.41×10^0	4.02×10^{-2}	1.63×10^{-2}	3.55×10^{-1}
$\hat{\Psi}$	1.41×10^0	1.88×10^{-2}	1.27×10^{-2}	1.04×10^{-1}
$\hat{J}$	5.28×10^{-3}	1.24×10^{-4}	3.39×10^{-5}	2.69×10^{-3}
$\hat{p}_{rx}$	2.22×10^{-2}	7.90×10^{-4}	1.24×10^{-4}	3.15×10^{-2}
$\hat{p}_{ry}$	4.89×10^{-3}	1.43×10^{-4}	3.67×10^{-5}	5.31×10^{-3}
$\hat{p}_{vx}$	4.05×10^{-3}	1.65×10^{-4}	3.80×10^{-5}	6.26×10^{-3}
$\hat{p}_{vy}$	2.24×10^{-2}	2.97×10^{-4}	7.51×10^{-5}	8.40×10^{-3}
$\hat{\mathbf{z}}_0^{\text{pl}}$	3.22×10^{-2}	8.71×10^{-4}	1.75×10^{-4}	3.36×10^{-2}

Локальное распределение ошибок в основной области показано на рис. 2.13. Наибольшие ошибки сосредоточены в отдельных областях параметров, тогда как на большей части области значения ошибок остаются малыми. Такая картина дополняет табл. 2.3, поскольку таблица даёт интегральные характеристики, а карты ошибок показывают их распределение по параметрам λ^* и κ .

Аналогичные метрики для области малой витковой дальности приведены в табл. 2.4. В этой области качество аппроксимаций в среднем ниже, что связано с менее регулярной структурой зависимостей. Тем не менее ошибки остаются достаточными для использования этих формул как технического расширения основного набора конечных формул.

Распределение ошибок в маловитковой области показано на рис. 2.14. В отличие от основной области, локальные зоны увеличенной ошибки занимают большую часть области параметров, что подтверждает вспомогательный характер соответствующих конечных формул.

Отдельно сопоставим два способа задания нормированной непрерывной фазы. Первый способ использует кинематическую связь с продолжительностью перелёта и конечную формулу для $\hat{T}$. Второй способ использует самостоятельную конечную формулу для $\hat{\Psi}$. Как видно из табл. 2.5, во всех рассмотренных областях самостоятельная формула для непрерывной фазы даёт меньшую среднеквадратическую ошибку. В таблице RMSE (root mean square error) обозначает

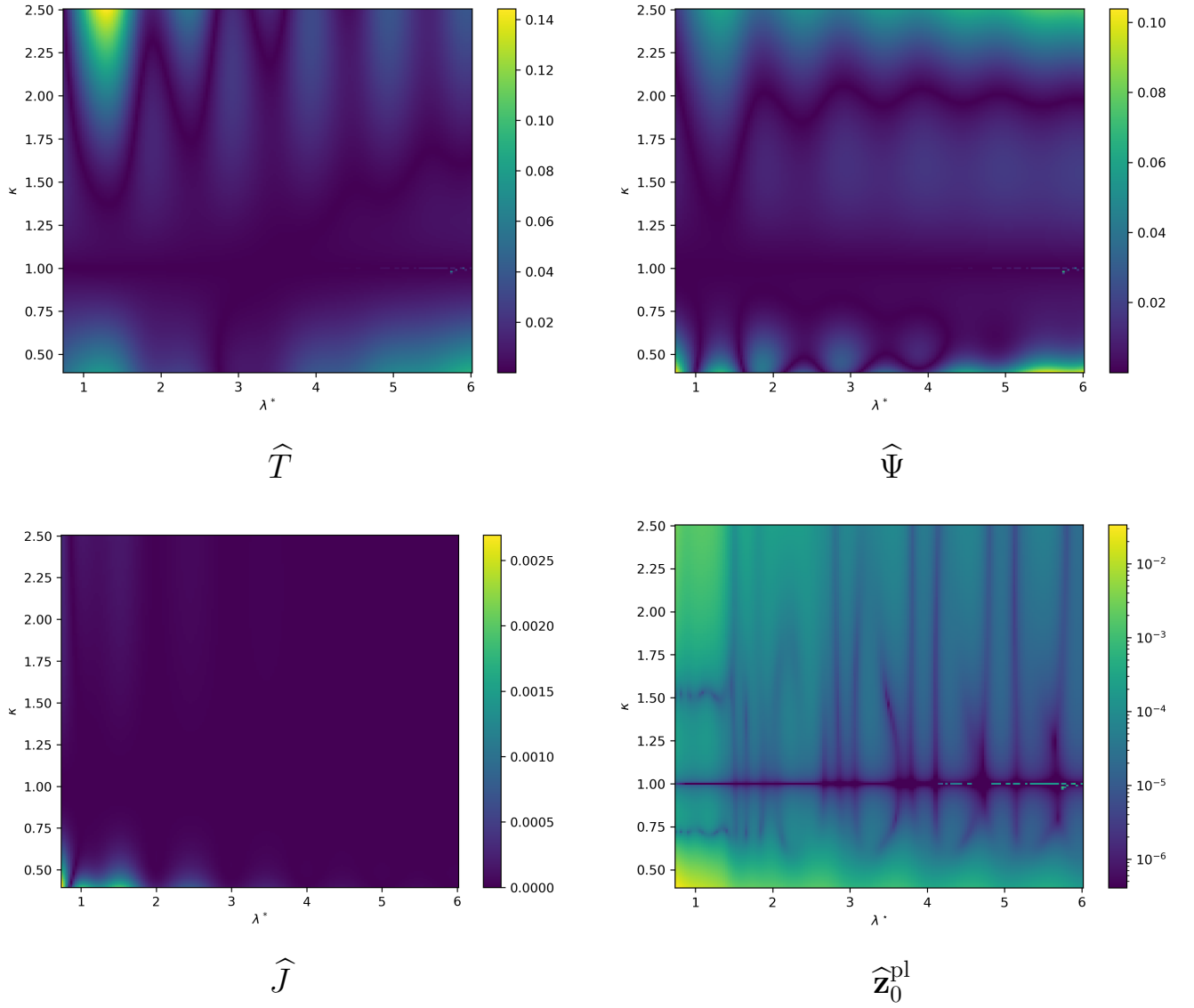


Рисунок 2.13 — Распределение ошибок конечных формул в основной области

Таблица 2.4 — Качество конечных формул в области малой витковой дальности

Величина	Масштаб S	RMSE (σ)	MAE	$\max \Delta $
$\hat{T}_s$	6.85×10^{-1}	2.60×10^{-3}	2.02×10^{-3}	1.80×10^{-2}
$\hat{\Psi}_{T,s}$	1.85×10^{-1}	3.20×10^{-3}	1.86×10^{-3}	2.65×10^{-2}
$\hat{\Psi}_s$	1.85×10^{-1}	1.23×10^{-3}	8.64×10^{-4}	2.31×10^{-2}
$\hat{J}_s$	2.48×10^{-1}	3.19×10^{-3}	1.39×10^{-3}	4.24×10^{-2}
$\hat{p}_{rx,s}$	9.98×10^{-1}	1.40×10^{-2}	7.98×10^{-3}	2.59×10^{-1}
$\hat{p}_{ry,s}$	7.14×10^{-1}	2.15×10^{-2}	1.35×10^{-2}	2.24×10^{-1}
$\hat{p}_{vx,s}$	5.16×10^{-1}	5.87×10^{-3}	3.53×10^{-3}	5.59×10^{-2}
$\hat{p}_{vy,s}$	3.95×10^{-1}	1.46×10^{-2}	9.55×10^{-3}	2.03×10^{-1}
$\hat{\mathbf{z}}_{0,s}^{\text{pl}}$	1.39×10^0	3.01×10^{-2}	2.13×10^{-2}	2.66×10^{-1}

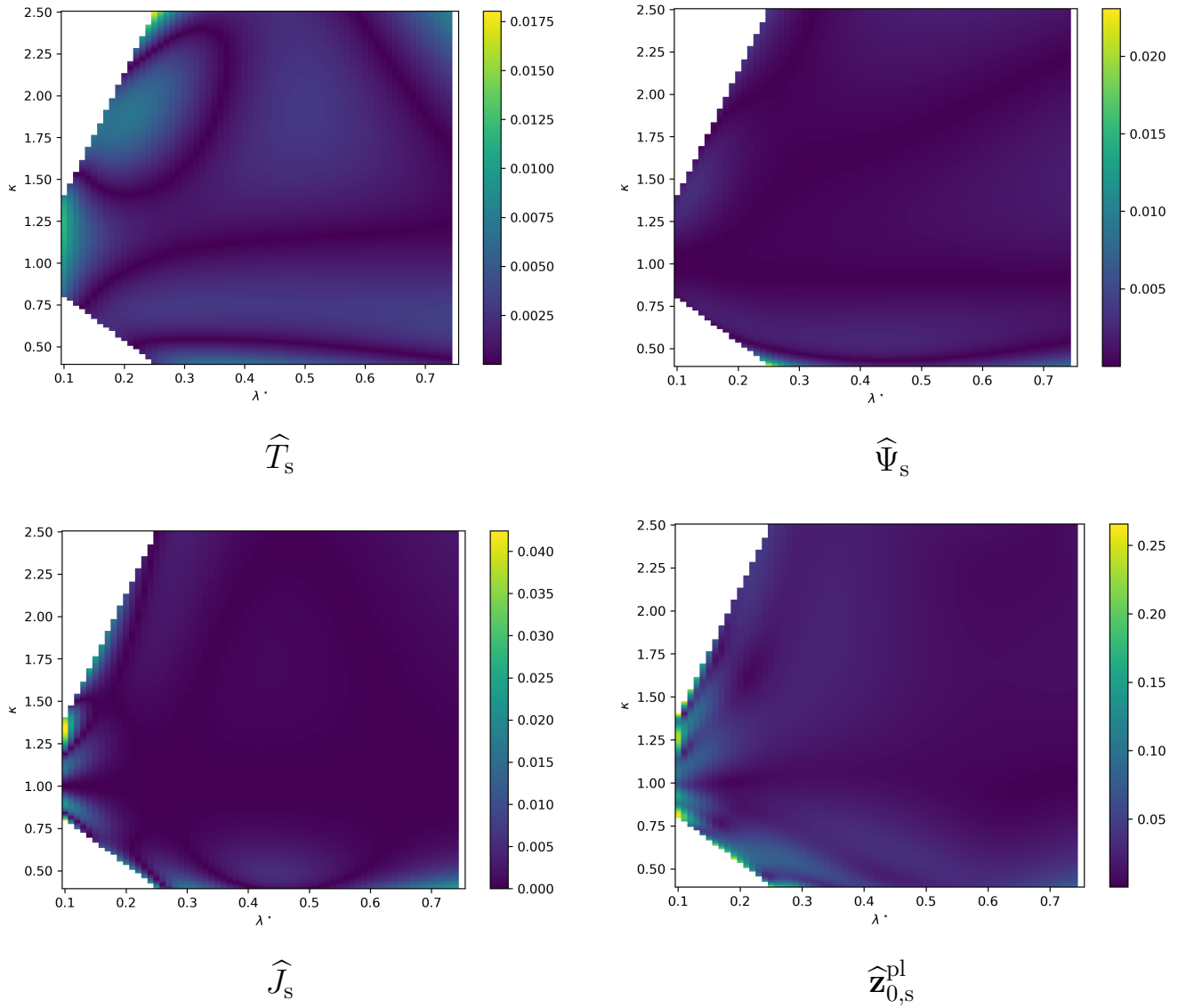


Рисунок 2.14 — Распределение ошибок конечных формул в области малой витковой дальности

среднеквадратическую ошибку, а MAE (mean absolute error) — среднюю абсолютную ошибку.

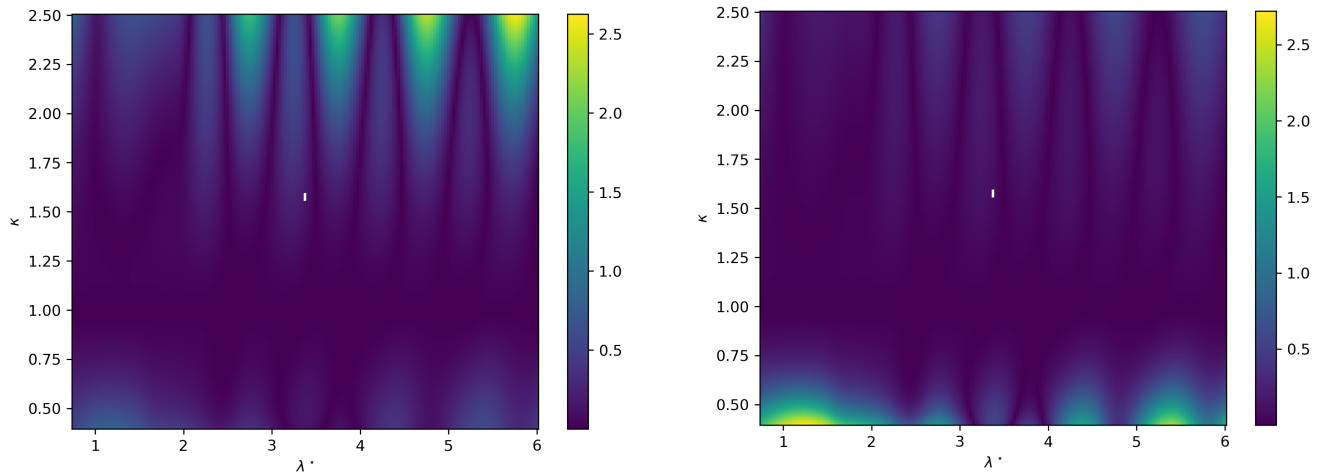
Таблица 2.5 — Сравнение способов задания нормированной непрерывной фазы

Область	Способ	Масштаб S	RMSE (σ)	MAE
Основная	$\hat{\Psi}_T$	1.41×10^0	4.02×10^{-2}	1.63×10^{-2}
Основная	$\hat{\Psi}$	1.41×10^0	1.88×10^{-2}	1.27×10^{-2}
Малая витковая дальность	$\hat{\Psi}_{T,s}$	1.85×10^{-1}	3.20×10^{-3}	1.86×10^{-3}
Малая витковая дальность	$\hat{\Psi}_s$	1.85×10^{-1}	1.23×10^{-3}	8.64×10^{-4}

Помимо сравнения с численно рассчитанными значениями, была выполнена дополнительная проверка согласованности конечных формул с краевыми

условиями. Для этого по конечным формулам восстанавливались продолжительность перелёта и параметры оптимального управления, после чего выполнялось интегрирование уравнений движения. В конечный момент времени вычислялись невязки положения и скорости относительно целевой круговой орбиты.

На рис. 2.15 показаны невязки правого конца для основной области. Эти карты характеризуют не отдельную ошибку аппроксимации одной величины, а совокупное качество восстановленного начального приближения.



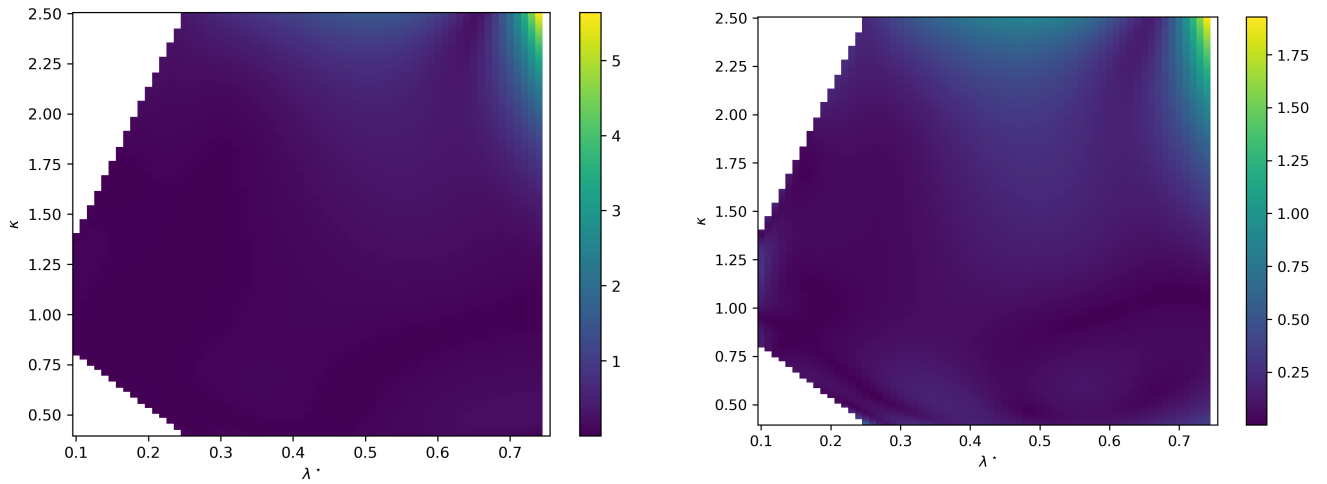
Невязка положения

Невязка скорости

Рисунок 2.15 — Невязки правого конца при использовании конечных формул в основной области

Аналогичная проверка для области малой витковой дальности приведена на рис. 2.16. В этой области невязки выше, что согласуется с результатами табл. 2.4. Однако полученные значения остаются приемлемыми для роли маловиткового блока как вспомогательного участка при построении начального приближения.

Таким образом, построенные конечные формулы дают компактное приближённое описание кривых локальных оптимумов на рассматриваемой области параметров. Основная область описывается более точно и используется как главный рабочий диапазон. Область малой витковой дальности имеет более низкое качество аппроксимации, но обеспечивает устойчивость приближённого описания при переходе через малые значения λ^* . Полученные оценки точности позволяют использовать конечные формулы как источник начального приближения для последующих задач оптимизации.



Невязка положения

Невязка скорости

Рисунок 2.16 — Невязки правого конца при использовании конечных формул в области малой витковой дальности

2.10 Выводы к главе 2

В настоящей главе исследована структура энергетически оптимальных решений в плоской круговой модели движения небесных тел. Полученные результаты показывают, что переход от эфемеридной постановки к модельной задаче позволяет выделить регулярную геометрическую структуру решений и построить для неё компактные конечные формулы, пригодные для дальнейшего использования при формировании начальных приближений.

1. На примере перелётов Земля–Марс в эфемеридной постановке показано, что множество энергетически оптимальных решений демонстрирует расслоение изолиний по числу витков. Это расслоение служит исходной мотивацией для перехода к упрощённой плоской круговой модели, в которой дата старта заменяется начальной синодической фазой, а реальные планеты — виртуальными небесными телами.
2. Показано, что после устранения эфемеридной зависимости наблюдаемое расслоение изолиний переходит в односвязное модельное многообразие. В отдельных координатных представлениях это многообразие может визуальнo распадаться на ветви или самопересекаться, однако такой распад является свойством выбранного представления, а не самостоятельной структурой модельной задачи.

3. Для модельного многообразия введена кривая локальных оптимумов. Она строится не отбором точек на заранее рассчитанной сетке, а как отдельная ветвь решений при дополнительном условии на свободный правый конец согласно принципу максимума. Для описания этой кривой используется локально оптимальная витковая дальность λ^* .
4. Введены точки оптимальной дальности как счётное множество точек пересечения кривой локальных оптимумов с изолиниями фиксированной начальной синодической фазы. Для последующего построения конечных формул вместо разрывной синодической фазы используется нормированная непрерывная фаза Ψ , представляющая собой её развёртку по витковой дальности.
5. Для основной области построены конечные формулы для продолжительности перелёта $\hat{T}$, нормированной непрерывной фазы $\hat{\Psi}$, квадратичного функционала $\hat{J}$ и параметров оптимального управления $\hat{\mathbf{z}}_0^{\text{pl}}$. Для непрерывной фазы также рассмотрено восстановление через кинематическую связь с продолжительностью перелёта, последующее сравнение показало преимущество самостоятельной конечной формулы для $\hat{\Psi}$.
6. Для параметров оптимального управления выявлена устойчивая попарная структура компонент начальных значений сопряжённых переменных. Конечные формулы включают основную часть с $C_i^{(X)}$ -коэффициентами и быстро затухающие $\mathcal{D}$ -функции, которые описывают переходную область малой витковой дальности и позволяют сшить мало- и многовитковые решения в рамках одной записи.
7. Для области малой витковой дальности построен отдельный набор конечных формул для скалярных характеристик и параметров оптимального управления. Эта область имеет более сложную структуру и более низкое качество аппроксимаций, однако её учёт необходим для устойчивого прохождения вычислительной процедуры через малые значения λ^* .
8. Выполнена верификация качества конечных формул в основной и мало-витковой областях. Сравнение с численно рассчитанными значениями выполнено по характерному масштабу величины, среднеквадратической ошибке, средней абсолютной ошибке и максимальной абсолютной ошибке. Дополнительно проверены невязки правого конца после инте-

гирования уравнений движения с восстановленными продолжительностью перелёта и параметрами оптимального управления.

9. Полученные конечные формулы задают компактное приближённое описание решений на кривых локальных оптимумов в координатах λ^* и κ . Эти зависимости служат основой для переноса результатов на более общие постановки и для построения начального приближения в прикладных задачах баллистического проектирования.

Глава 3. Линейные преобразования начальных значений сопряжённых переменных

В предыдущей главе было построено аппроксимированное модельное многообразие для плоской круговой задачи встречи и получены конечные формулы для продолжительности перелёта, непрерывной фазы, квадратичного функционала и начальных значений сопряжённых переменных. Однако при переходе к пространственным и эллиптическим орбитам одного выбора точки этого многообразия недостаточно: требуется согласованно изменить начальный фазовый вектор, а также задать наклонение, долготу восходящего узла, эксцентриситет и долготу перицентра конечной орбиты. В настоящей главе для этой цели вводятся линейные преобразования начальных значений сопряжённых переменных. Рассматриваются три типа таких преобразований: преобразование при изменении начального фазового вектора, плоское преобразование для задания эксцентриситета и долготы перицентра, а также пространственное преобразование для задания наклонения и долготы восходящего узла. В заключительной части главы эти преобразования объединяются в композицию, используемую при построении начального приближения для полной задачи встречи.

3.1 Общий вид R -преобразования и классификация типов

Далее рассматриваются специальные линейные преобразования, действующие на векторы трёхмерного пространства и сопряжённые им ковекторы. Пусть заданы два вектора

$$\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^3. \quad (3.1)$$

Третий вектор определяется их векторным произведением:

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{\nu}. \quad (3.2)$$

Матрица R -преобразования строится по этим трём векторам:

$$R(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\nu}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\rho} & \boldsymbol{\nu} & \boldsymbol{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_x & \nu_x & \eta_x \\ \rho_y & \nu_y & \eta_y \\ \rho_z & \nu_z & \eta_z \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Условие невырожденности этой матрицы имеет вид

$$\eta^2 > 0, \quad \eta^2 = \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\eta} = \|\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{v}\|^2. \quad (3.4)$$

Действительно,

$$\det R = \boldsymbol{\rho} \cdot (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\eta} = \eta^2. \quad (3.5)$$

Следовательно, матрица R невырождена тогда и только тогда, когда векторы $\boldsymbol{\rho}$ и $\mathbf{v}$ неколлинеарны.

Если матрица R применяется к вектору $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, то преобразованный вектор имеет вид

$$\mathbf{y}' = R\mathbf{y}. \quad (3.6)$$

Для сопряжённого ковектора $\mathbf{p}$ используется согласованное преобразование

$$\mathbf{p}' = (R^T)^{-1}\mathbf{p}. \quad (3.7)$$

Такая форма соответствует стандартному правилу преобразования ковекторов при линейной замене переменных [35]. В задачах оптимизации траекторий близкие идеи возникают при использовании канонических преобразований фазовых и сопряжённых переменных [33; 34]. В данной работе эта аналогия используется для выбора формы преобразования сопряжённых переменных, R -преобразование рассматривается как операция над начальным вектором расширенной системы, после которой исходная система дифференциальных уравнений интегрируется заново.

Начальный фазовый вектор имеет вид

$$\mathbf{x}_0 = (\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0), \quad (3.8)$$

а начальный вектор сопряжённых переменных —

$$\mathbf{p}_0 = (\mathbf{p}_{r0}, \mathbf{p}_{v0}). \quad (3.9)$$

В зависимости от задачи матрица R может применяться либо одновременно к фазовой и сопряжённой частям начального вектора расширенной системы, либо только к начальным значениям сопряжённых переменных при фиксированном начальном фазовом векторе. Именно это различие приводит к трём типам R -преобразований.

Связь замены фазовых переменных с точечными каноническими преобразованиями и первоначальная версия подхода к преобразованиям сопряжённых переменных рассматривались в работах [106; 117]. В настоящей главе используется уточнённая терминология: рассматриваются линейные R -преобразования, задаваемые матрицами специального вида.

R -преобразование I типа используется при изменении начального фазового вектора. В этом случае матрица R строится по векторам, связанным с заданным начальным фазовым вектором, а преобразование применяется согласованно к фазовым и сопряжённым переменным.

R -преобразование II типа действует только на начальные значения сопряжённых переменных при фиксированном начальном фазовом векторе. Оно используется для плоской деформации траектории и задания эксцентриситета e и аргумента перицентра ω конечной орбиты.

R -преобразование III типа также действует только на начальные значения сопряжённых переменных при фиксированном начальном фазовом векторе, но используется для пространственной деформации траектории. Оно предназначено для задания наклона i и долготы восходящего узла Ω конечной орбиты.

Таким образом, R -преобразование I типа обеспечивает переход к другому начальному фазовому вектору, R -преобразование II типа изменяет форму конечной орбиты в плоскости исходной траектории, а R -преобразование III типа задаёт пространственную ориентацию конечной орбиты. Такое разделение позволяет последовательно построить и исследовать действие каждого класса преобразований, а затем использовать их композицию.

3.2 Инварианты расширенной системы и ограничения на матрицу R

В предыдущем разделе R -преобразование было введено как линейное преобразование, действующее на векторы трёхмерного пространства и сопряжённые им ковекторы. Однако в задаче оптимального перелёта важна не только алгебраическая форма такого преобразования, но и его действие на величины, сохраняющиеся вдоль экстремали. Связь симметрий и первых интегралов в задачах оптимального управления обычно рассматривается как обобщение

классической теоремы Нётер на экстремали Понтрягина [36]. В настоящей главе эта связь используется для выбора специальных ограничений на матрицу R . Первоначальный вариант такого анализа для преобразований сопряжённых переменных был приведён в работе [106].

Под первыми интегралами понимаются величины, сохраняющиеся вдоль решения расширенной системы дифференциальных уравнений. Само R -преобразование не является динамической системой, поэтому далее рассматривается не сохранение величин вдоль преобразования, а изменение значений первых интегралов расширенной системы при преобразовании начального вектора сопряжённых переменных. Это позволяет сформулировать ограничения на матрицу R , при которых соответствующие значения сохраняются или изменяются контролируемым образом.

В центральной задаче одним из таких инвариантов является векторная величина

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}_r + \mathbf{v} \times \mathbf{p}_v. \quad (3.10)$$

Для плоской модельной траектории начальный фазовый вектор выбран в виде

$$\mathbf{r}_0 = (1, 0, 0)^T, \quad \mathbf{v}_0 = (0, 1, 0)^T. \quad (3.11)$$

Тогда нормаль к исходной плоскости равна

$$\mathbf{c}_0 = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0 = (0, 0, 1)^T. \quad (3.12)$$

С помощью этой нормали удобно выделить скалярную и векторную части инварианта:

$$I_0 = \mathbf{c}_0 \cdot \mathbf{M}, \quad \mathbf{I}_1 = \mathbf{c}_0 \times \mathbf{M}. \quad (3.13)$$

Если

$$\mathbf{p}_{r0} = (p_{rx}, p_{ry}, p_{rz})^T, \quad \mathbf{p}_{v0} = (p_{vx}, p_{vy}, p_{vz})^T, \quad (3.14)$$

то в начальный момент

$$\mathbf{M}_0 = \begin{pmatrix} p_{vz} \\ -p_{rz} \\ p_{ry} - p_{vx} \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Следовательно,

$$I_0 = p_{ry} - p_{vx}, \quad \mathbf{I}_1 = \begin{pmatrix} p_{rz} \\ p_{vz} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Для исходной плоской траектории начальный вектор сопряжённых переменных также лежит в плоскости Oxy :

$$p_{rz} = 0, \quad p_{vz} = 0. \quad (3.17)$$

В этом случае

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{0}, \quad (3.18)$$

а единственной ненулевой частью указанного инварианта остаётся скалярная величина I_0 .

Далее рассмотрим преобразование только начального вектора сопряжённых переменных при фиксированном начальном фазовом векторе:

$$\mathbf{p}'_{r0} = (R^T)^{-1} \mathbf{p}_{r0}, \quad \mathbf{p}'_{v0} = (R^T)^{-1} \mathbf{p}_{v0}. \quad (3.19)$$

Обозначим

$$A = (R^T)^{-1}. \quad (3.20)$$

Тогда

$$\mathbf{p}'_{r0} = A \mathbf{p}_{r0}, \quad \mathbf{p}'_{v0} = A \mathbf{p}_{v0}. \quad (3.21)$$

В зависимости от того, какие значения I_0 и $\mathbf{I}_1$ требуется сохранить, возникают разные ограничения на матрицу A , а значит и на матрицу R .

Первое требование состоит в сохранении плоской структуры начального вектора сопряжённых переменных:

$$\mathbf{I}'_1 = \mathbf{0}. \quad (3.22)$$

Для произвольных плоских векторов $\mathbf{p}_{r0}$ и $\mathbf{p}_{v0}$ это означает, что преобразование не должно порождать третью компоненту:

$$p'_{rz} = 0, \quad p'_{vz} = 0. \quad (3.23)$$

Следовательно, третья строка матрицы A не должна содержать слагаемых, зависящих от первых двух компонент:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Эквивалентно этому, матрица R имеет блочно-плоский вид

$$R_e = \begin{pmatrix} \rho_x & \mathbf{v}_x & 0 \\ \rho_y & \mathbf{v}_y & 0 \\ 0 & 0 & \eta_z \end{pmatrix}, \quad \eta_z = \rho_x \mathbf{v}_y - \rho_y \mathbf{v}_x. \quad (3.25)$$

Такая матрица не выводит начальный вектор сопряжённых переменных из плоскости Oxy , но в общем случае изменяет скалярную часть I_0 . Поэтому этот класс матриц используется далее как основа R -преобразования II типа, предназначенного для задания эксцентриситета и аргумента перицентра конечной орбиты.

Второе требование состоит в сохранении скалярной части инварианта:

$$I'_0 = I_0. \quad (3.26)$$

Так как

$$I'_0 = p'_{ry} - p'_{vx}, \quad (3.27)$$

для произвольных плоских начальных значений сопряжённых переменных необходимо, чтобы преобразование сохраняло вторую компоненту $\mathbf{p}_r$ и первую компоненту $\mathbf{p}_v$ в той комбинации, которая входит в I_0 . Один удобный однопараметрический класс матриц, удовлетворяющий этому условию, задаётся через

$$A_i(j) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -j \\ 0 & j & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Для плоских векторов, у которых третья компонента равна нулю, получаем

$$p'_{ry} = p_{ry}, \quad p'_{vx} = p_{vx}, \quad (3.29)$$

и поэтому

$$I'_0 = p'_{ry} - p'_{vx} = p_{ry} - p_{vx} = I_0. \quad (3.30)$$

При этом третьи компоненты после преобразования в общем случае становятся ненулевыми:

$$p'_{rz} = jp_{ry}, \quad p'_{vz} = jp_{vy}. \quad (3.31)$$

Следовательно, векторная часть $\mathbf{I}_1$ перестаёт быть нулевой, что соответствует выходу траектории из исходной плоскости.

Переходя от $A_i(j)$ к матрице $R_i(j)$, получаем

$$R_i(j) = (A_i(j)^{-1})^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+j^2} & -\frac{j}{1+j^2} \\ 0 & \frac{j}{1+j^2} & \frac{1}{1+j^2} \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

Именно эта матрица далее используется как базовая матрица R -преобразования III типа, предназначенного для задания наклона и долготы восходящего узла конечной орбиты.

Таким образом, требования к значениям инвариантов расширенной системы приводят к двум различным классам матриц. Если сохраняется условие

$$\mathbf{I}'_1 = \mathbf{0}, \quad (3.33)$$

то получается плоский класс матриц R_e , используемый для R -преобразования II типа. Если сохраняется условие

$$I'_0 = I_0, \quad (3.34)$$

то получается пространственный класс матриц $R_i(j)$, используемый для R -преобразования III типа. Эти два ограничения в общем случае не совпадают и поэтому порождают разные типы R -преобразований.

Для задания ориентации аргумента перицентра и долготы восходящего узла далее используются ортогонально подобные матрицы:

$$R_{e\omega} = Q_\chi R_e Q_\chi^T, \quad R_{i\Omega} = Q_\Omega R_i Q_\Omega^T, \quad (3.35)$$

где Q_χ и Q_Ω являются матрицами поворота вокруг оси Oz . Для рассматриваемых классов матриц действие на значения I_0 и $\mathbf{I}_1$ проверяется непосредственно: для плоского класса сохраняется условие $\mathbf{I}'_1 = \mathbf{0}$, а для пространственного класса сохраняется выбранное условие $I'_0 = I_0$. Поэтому ортогонально подобные матрицы используются не как произвольное расширение класса преобразований, а как способ задать ориентацию уже выбранного типа R -преобразования.

3.3 Методика численного исследования и построения конечных формул

Методика построения конечных формул для R -преобразований отличается от подхода, использованного во второй главе. Во второй главе аппроксимировались характеристики множества траекторий плоской круговой задачи на области параметров (λ^*, κ) . В настоящей главе исследуется действие специальных матриц R на одну эталонную многовитковую траекторию. Такой выбор позволяет отделить собственное действие преобразования от выбора точки модельного многообразия и изучать отклик конечной орбиты на изменение параметров матрицы R .

В качестве эталонной была выбрана плоская траектория с угловой дальностью, соответствующей ровно сорока виткам. Использование большой угловой дальности связано с тем, что действие R -преобразований становится более устойчивым при росте числа витков: уменьшается влияние маловитковых особенностей, а зависимости характеристик конечной орбиты от параметров преобразования становятся более регулярными. Для каждого набора параметров матрицы R начальный вектор расширенной системы преобразовывался согласно выбранному типу R -преобразования, после чего исходная система дифференциальных уравнений интегрировалась заново.

Для наглядной иллюстрации на рис. 3.1 показано действие простого однопараметрического изменения матрицы R . Рассмотрим семейство

$$R(u) = \begin{pmatrix} 1+u & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+u \end{pmatrix}. \quad (3.36)$$

При $u = 0$ получаем единичную матрицу

$$R(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.37)$$

а при $u = 0.08$ получаем

$$R(0.08) = \begin{pmatrix} 1.08 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1.08 \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

Это изменение не содержит специальной настройки под заданные элементы конечной орбиты и используется для демонстрации чувствительности траектории к параметрам матрицы R . Видно, что изменение одного параметра сохраняет общий характер многовитковой движения, но приводит к заметному смещению конечной точки и изменению конечной орбиты.

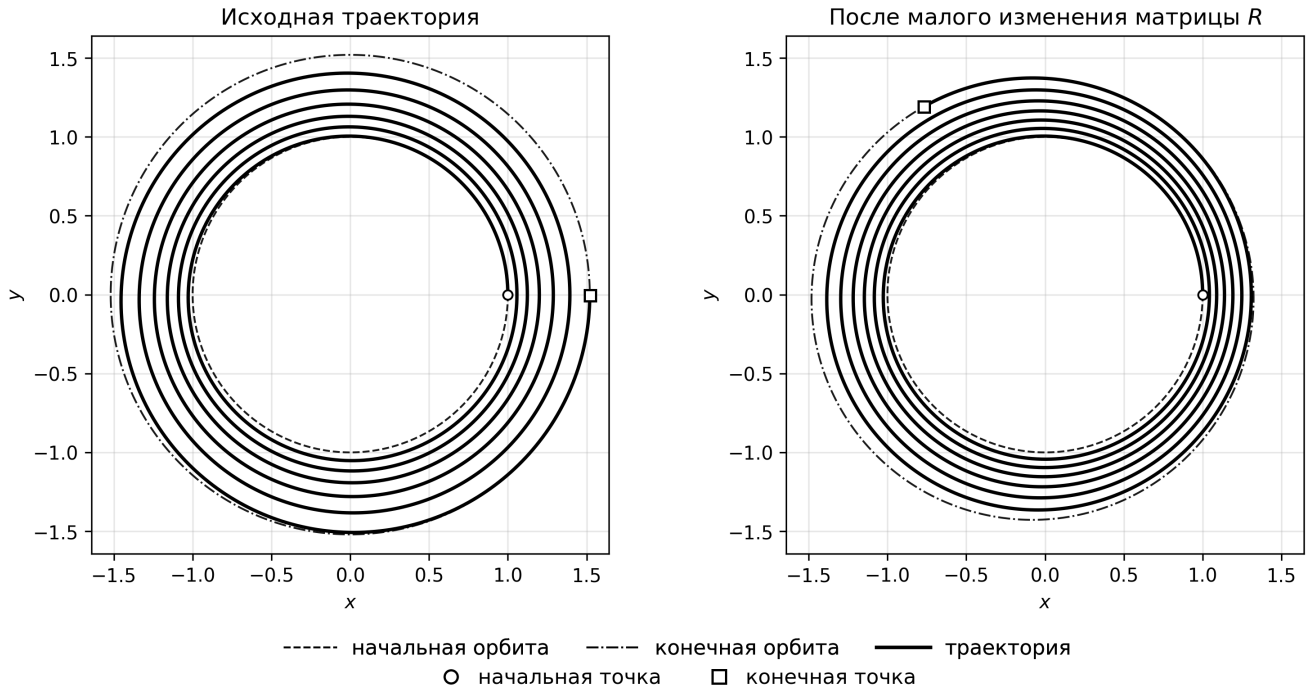


Рисунок 3.1 — Иллюстрация действия малого однопараметрического изменения матрицы R на эталонную многовитковую траекторию. Слева показана исходная траектория, соответствующая $u = 0$, справа — траектория после замены $R(0)$ на $R(0.08)$. Пунктиром изображена начальная орбита, штрихпунктирной линией — конечная орбита, сплошной линией — траектория перелёта.

После интегрирования по конечному фазовому вектору вычислялись элементы полученной орбиты и сопутствующие характеристики траектории. Тем самым численно строилось отображение от параметров матрицы R к характеристикам конечной орбиты. Прямое построение конечной формулы для такого отображения как функции нескольких переменных оказалось нецелесообразным: двумерные и тем более многомерные зависимости аппроксимируются менее устойчиво, сильнее подвержены локальным нерегулярностям и дают менее компактные выражения.

Поэтому в работе использовался иерархический подход. Сначала по численным данным выделялась простая локальная структура зависимости. Если целевая характеристика конечной орбиты в исследуемой области изменялась

почти линейно по одному из параметров преобразования, то этот параметр рассматривался как управляющий. После этого задача сводилась не к аппроксимации всей исходной зависимости, а к построению конечной формулы для коэффициента чувствительности:

$$y \approx C(\xi)u, \quad (3.39)$$

где y — целевая характеристика конечной орбиты, u — управляющий параметр преобразования, а ξ — остальные параметры задачи. Тогда обратная зависимость для управляющего параметра записывалась в виде

$$u \approx \frac{y}{C(\xi)}. \quad (3.40)$$

Такой приём уменьшает размерность задачи аппроксимации и позволяет строить более устойчивые конечные формулы.

Использование линеаризации вокруг опорного решения связано со стандартными методами теоретической механики и астродинамики, где влияние малых изменений параметров исследуется через вариационные уравнения, методы возмущений и вариацию параметров [7]. В настоящей работе применяется прикладной вариант этой идеи: вместо вывода полной вариационной системы численно выделяются направления, в которых действие R -преобразования имеет наиболее регулярный и близкий к линейному характер.

После выделения управляющего параметра оставшаяся зависимость коэффициента чувствительности от других переменных дополнительно упрощалась. Для угловых параметров использовались симметрии и гармоническая структура, а для зависимости от $\mathbf{k}$ строились отдельные одномерные конечные формулы. Таким образом, вместо прямой аппроксимации многомерного массива получалась последовательность более простых задач: выделение управляющего параметра, построение коэффициента чувствительности, разложение угловой зависимости и аппроксимация одномерных коэффициентов.

Отдельная техническая трудность связана с угловыми величинами. Перед построением конечных формул такие зависимости разворачивались по фазе, чтобы исключить искусственные скачки на 2π . Это особенно важно для величин, задающих ориентацию орбиты: формально близкие направления могут иметь численные значения, отличающиеся почти на 2π , если не учитывать периодичность угла.

Помимо задания целевых элементов конечной орбиты, для каждого типа R -преобразования исследовались побочные деформации. К ним относятся изменение угловой дальности, большой полуоси и параметра κ . Эти величины не всегда требуется компенсировать, однако их необходимо учитывать при оценке области применимости преобразований. Если деформация имеет выраженный локально линейный характер по управляющему параметру, для неё строится отдельная корректирующая формула.

Итоговые конечные формулы отбирались по двум критериям: они должны сохранять выявленную структуру зависимости и обеспечивать малую ошибку задания целевых параметров конечной орбиты на проверочной сетке. Полные выражения для коэффициентов конечных формул вынесены в приложение, а в основной части главы приводятся их структура, смысл входящих параметров и результаты численной верификации.

3.4 R -преобразование I типа при изменении начального фазового вектора

R -преобразование I типа используется в том случае, когда требуется перейти от одного начального фазового вектора к другому. Такая ситуация возникает при переносе начального приближения из нормированной модельной постановки в более общую задачу, где начальные положение и скорость уже заданы. Близкие идеи согласованного преобразования фазовых и сопряжённых переменных используются в работах по каноническим преобразованиям в задачах оптимизации траекторий [33; 34]. Связь замены фазовых переменных с точечными каноническими преобразованиями и преобразованиями сопряжённых переменных рассматривалась в работах [106; 117].

Пусть имеются два начальных фазовых вектора:

$$\mathbf{x}_a = (\mathbf{r}_a, \mathbf{v}_a), \quad \mathbf{x}_b = (\mathbf{r}_b, \mathbf{v}_b). \quad (3.41)$$

Каждому из них соответствует матрица R -преобразования, построенная по правилу предыдущего раздела:

$$R_a = R(\mathbf{r}_a, \mathbf{v}_a), \quad R_b = R(\mathbf{r}_b, \mathbf{v}_b). \quad (3.42)$$

Матрица R_a переводит опорную пару векторов

$$\mathbf{e}_r = (1, 0, 0)^T, \quad \mathbf{e}_v = (0, 1, 0)^T \quad (3.43)$$

в пару $(\mathbf{r}_a, \mathbf{v}_a)$, а матрица R_b — в пару $(\mathbf{r}_b, \mathbf{v}_b)$:

$$R_a \mathbf{e}_r = \mathbf{r}_a, \quad R_a \mathbf{e}_v = \mathbf{v}_a, \quad (3.44)$$

$$R_b \mathbf{e}_r = \mathbf{r}_b, \quad R_b \mathbf{e}_v = \mathbf{v}_b. \quad (3.45)$$

Поэтому переход от фазового вектора $\mathbf{x}_a$ к фазовому вектору $\mathbf{x}_b$ задаётся композицией

$$R_{a \rightarrow b} = R_b R_a^{-1}. \quad (3.46)$$

Действительно,

$$R_{a \rightarrow b} \mathbf{r}_a = R_b R_a^{-1} \mathbf{r}_a = R_b \mathbf{e}_r = \mathbf{r}_b, \quad (3.47)$$

$$R_{a \rightarrow b} \mathbf{v}_a = R_b R_a^{-1} \mathbf{v}_a = R_b \mathbf{e}_v = \mathbf{v}_b. \quad (3.48)$$

Таким образом, R -преобразование I типа задаёт линейный переход между двумя начальными фазовыми векторами через опорную пару $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_v$.

Согласованное преобразование начального вектора сопряжённых переменных имеет вид

$$\mathbf{p}_{r,b} = (R_{a \rightarrow b}^T)^{-1} \mathbf{p}_{r,a}, \quad \mathbf{p}_{v,b} = (R_{a \rightarrow b}^T)^{-1} \mathbf{p}_{v,a}. \quad (3.49)$$

Следовательно, R -преобразование I типа действует на весь начальный вектор расширенной системы:

$$\mathbf{r}_b = R_{a \rightarrow b} \mathbf{r}_a, \quad \mathbf{v}_b = R_{a \rightarrow b} \mathbf{v}_a, \quad (3.50)$$

$$\mathbf{p}_{r,b} = (R_{a \rightarrow b}^T)^{-1} \mathbf{p}_{r,a}, \quad \mathbf{p}_{v,b} = (R_{a \rightarrow b}^T)^{-1} \mathbf{p}_{v,a}. \quad (3.51)$$

После этого исходная система дифференциальных уравнений интегрируется заново уже с преобразованным начальным вектором расширенной системы.

Важная особенность R -преобразования I типа состоит в том, что оно в общем случае не сводится к простому повороту системы координат. Матрица $R_{a \rightarrow b}$ учитывает не только изменение направления, но и изменение масштаба и взаимного расположения начальных векторов положения и скорости. Поэтому такое преобразование является более общим инструментом переноса начального приближения, чем простой поворот.

Наглядная иллюстрация действия R -преобразования I типа приведена на рис. 3.2. В этом примере используется то же однопараметрическое семейство матриц $R(u)$, что и в предыдущем разделе, но теперь матрица применяется не только к начальному вектору сопряжённых переменных, но и к начальному фазовому вектору. При $u = 0.08$

$$R(0.08) = \begin{pmatrix} 1.08 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1.08 \end{pmatrix}. \quad (3.52)$$

При таком преобразовании изменяются начальная точка траектории, положение конечной точки и параметры конечной орбиты. Видно, что общий многовитковый характер движения сохраняется, однако сама траектория и соответствующая ей конечная орбита заметно деформируются.

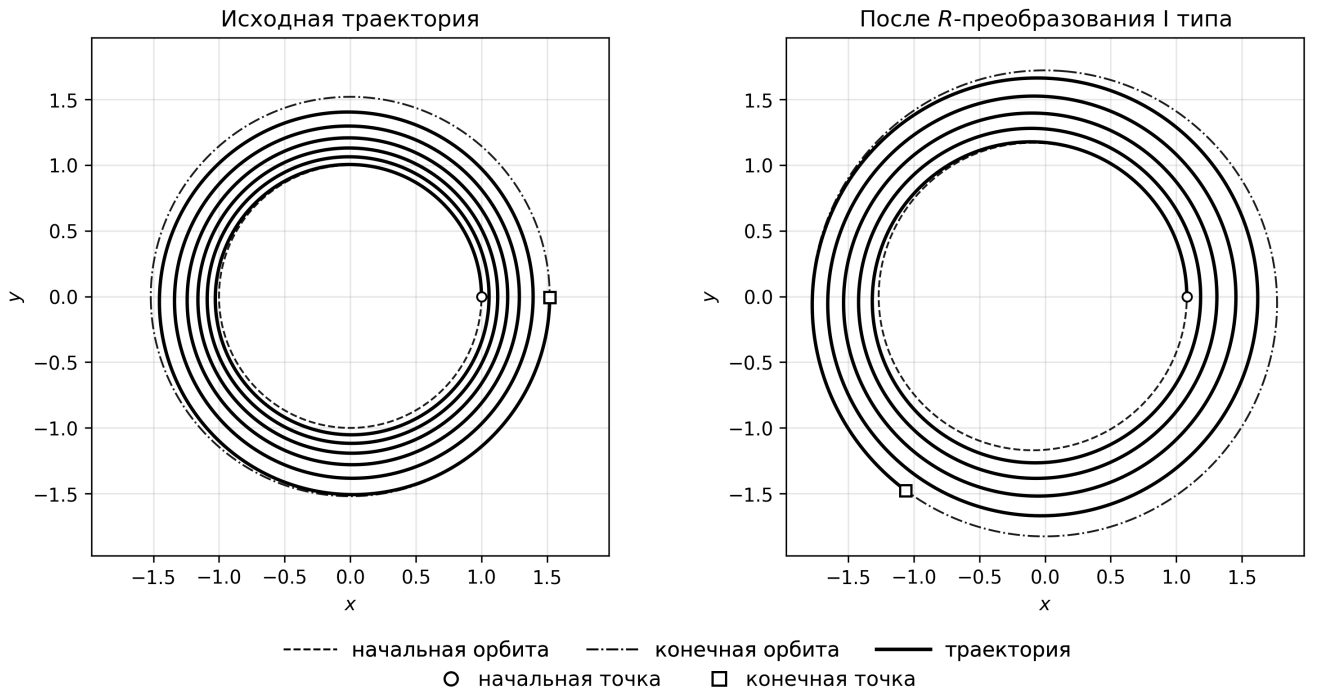


Рисунок 3.2 — Иллюстрация действия R -преобразования I типа. Слева показана исходная траектория, соответствующая $u = 0$, справа — траектория после применения матрицы $R(0.08)$ одновременно к начальному фазовому вектору и начальному вектору сопряжённых переменных. Пунктиром изображена начальная орбита, штрихпунктирной линией — конечная орбита, сплошной линией — траектория перелёта. Кругом обозначена начальная точка, квадратом — конечная точка.

Таким образом, R -преобразование I типа задаёт согласованный способ перехода между начальными фазовыми векторами с одновременным преобразованием начальных значений сопряжённых переменных. Далее этот подход сравнивается с более простым вариантом — поворотом системы координат.

3.5 Сравнение R -преобразования I типа с простым поворотом

Естественной альтернативой R -преобразованию I типа является более простое преобразование начального вектора сопряжённых переменных с помощью матрицы поворота. Поэтому для проверки эффективности R -преобразования был рассмотрен специальный тестовый случай, в котором новый начальный фазовый вектор задаётся поворотом начальной скорости при фиксированном начальном положении:

$$\mathbf{r}_0 = (1, 0, 0)^T, \quad \mathbf{v}_0(\varphi) = Q_z(\varphi)(0, 1, 0)^T, \quad (3.53)$$

где

$$Q_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.54)$$

В явном виде

$$\mathbf{v}_0(\varphi) = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.55)$$

Такой пример удобен тем, что модуль начальной скорости сохраняется, но направление скорости изменяется относительно фиксированного начального положения. Тем самым получается простое однопараметрическое семейство начальных фазовых векторов.

Важно подчеркнуть, что в обоих сравниваемых вариантах фазовая часть начального вектора расширенной системы была одинаковой:

$$(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0(\varphi)). \quad (3.56)$$

Различие состояло только в способе преобразования начального вектора сопряжённых переменных.

В первом варианте использовалось R -преобразование I типа. Для заданного начального фазового вектора строилась матрица

$$R_\varphi = R(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0(\varphi)), \quad (3.57)$$

и начальные значения сопряжённых переменных преобразовывались по правилу

$$\mathbf{p}'_{r0} = (R_\varphi^T)^{-1} \mathbf{p}_{r0}, \quad \mathbf{p}'_{v0} = (R_\varphi^T)^{-1} \mathbf{p}_{v0}. \quad (3.58)$$

Во втором варианте для начального вектора сопряжённых переменных использовалась матрица простого поворота на тот же угол:

$$\mathbf{p}'_{r0} = (Q_z(\varphi)^T)^{-1} \mathbf{p}_{r0}, \quad \mathbf{p}'_{v0} = (Q_z(\varphi)^T)^{-1} \mathbf{p}_{v0}. \quad (3.59)$$

Именно этот вариант далее называется простым поворотом. При этом речь не идёт о полноценном повороте всей начальной конфигурации, поскольку полный поворот $Q_z(\varphi)$ изменил бы и начальное положение:

$$Q_z(\varphi)(1,0,0)^T \neq (1,0,0)^T. \quad (3.60)$$

В рассматриваемом сравнении начальный фазовый вектор одинаков для обоих методов, а различается только правило преобразования начальных значений сопряжённых переменных.

После задания начального вектора расширенной системы исходная система дифференциальных уравнений интегрировалась заново, а качество приближения оценивалось по невязкам положения и скорости на правом конце траектории:

$$\Delta r_f = \|\tilde{\mathbf{r}}_f - \mathbf{r}_f\|, \quad \Delta v_f = \|\tilde{\mathbf{v}}_f - \mathbf{v}_f\|. \quad (3.61)$$

Здесь $\mathbf{r}_f, \mathbf{v}_f$ обозначают требуемые положение и скорость на конечной орбите, а $\tilde{\mathbf{r}}_f, \tilde{\mathbf{v}}_f$ — значения, полученные после повторного интегрирования.

Результаты сравнения приведены на рис. 3.3. Оба графика построены в двойном логарифмическом масштабе: слева показана невязка положения, справа — невязка скорости. Видно, что при одинаковом начальном фазовом векторе R -преобразование I типа даёт существенно меньшие невязки на правом конце, чем простой поворот начального вектора сопряжённых переменных. При очень малых значениях φ ошибка выходит на уровень численного шума, а при больших значениях начинают проявляться нелинейные эффекты. Поэтому основной

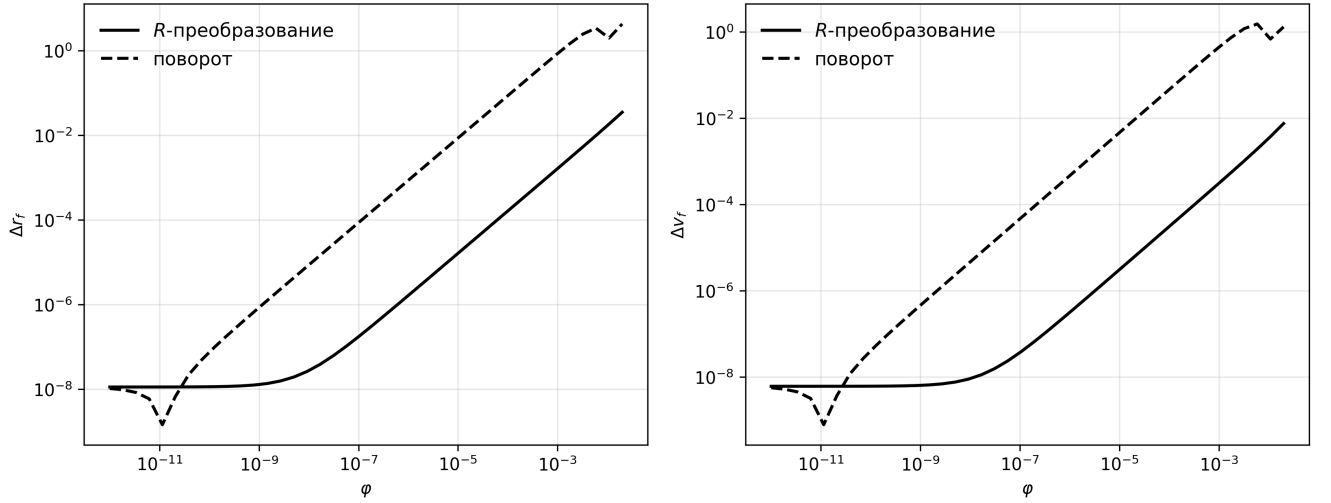


Рисунок 3.3 — Сравнение R -преобразования I типа с простым поворотом начального вектора сопряжённых переменных при малом изменении направления начальной скорости. Слева показана невязка положения Δr_f , справа — невязка скорости Δv_f на правом конце после повторного интегрирования.

интерес представляет промежуточная область, где сохраняется регулярная зависимость невязки от величины возмущения.

Полученные результаты показывают, что преимущество R -преобразования I типа связано с согласованным преобразованием фазовой и сопряжённой частей начального вектора расширенной системы. Простой поворот начального вектора сопряжённых переменных задаёт лишь геометрически очевидное изменение направления, но не учитывает специальную структуру матрицы R_φ , построенной по новому начальному фазовому вектору. Напротив, R -преобразование I типа переводит начальный фазовый вектор в заданный и одновременно преобразует начальные значения сопряжённых переменных как ковекторы. Поэтому этот вариант используется как основной способ изменения начального фазового вектора.

3.6 R -преобразование II типа для задания эксцентриситета и аргумента перигеллия

R -преобразование II типа используется для плоской деформации траектории при фиксированном начальном фазовом векторе. В отличие от R -преобразования I типа, здесь положение и скорость в начальный момент

не изменяются:

$$\mathbf{r}'_0 = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{v}'_0 = \mathbf{v}_0. \quad (3.62)$$

Преобразуется только начальный вектор сопряжённых переменных:

$$\mathbf{p}'_{r0} = (R_{e\omega}^T)^{-1} \mathbf{p}_{r0}, \quad \mathbf{p}'_{v0} = (R_{e\omega}^T)^{-1} \mathbf{p}_{v0}. \quad (3.63)$$

Целевыми параметрами в этом случае являются эксцентриситет e и аргумент перицентра ω конечной орбиты. При $e = 0$ аргумент перицентра вырожден, поэтому ошибки задания ω далее оцениваются только вне окрестности круговой орбиты.

Базовая матрица плоского преобразования строится через два параметра матрицы α и ε . Эти величины не являются большой полуосью и эксцентриситетом конечной орбиты, они задают элементы матрицы R -преобразования. Для выбранной параметризации используется матрица

$$R_e(\alpha, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \alpha(1 - \varepsilon) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1 + \varepsilon}{\sqrt{\alpha(1 - \varepsilon^2)}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha(1 - \varepsilon)(1 + \varepsilon)}{\sqrt{\alpha(1 - \varepsilon^2)}} \end{pmatrix}. \quad (3.64)$$

Область допустимых значений параметров выбирается так, чтобы знаменатель был вещественным и отличным от нуля:

$$\alpha(1 - \varepsilon^2) > 0. \quad (3.65)$$

Для выделения направления, наиболее удобно связанного с изменением эксцентриситета, была выполнена репараметризация плоскости (ε, α) . Численно найденный угол репараметризации обозначается β . В настоящей работе используется значение

$$\beta = 0.642. \quad (3.66)$$

Пусть ζ обозначает управляющий параметр R -преобразования II типа. Тогда промежуточные величины задаются формулами

$$w_1 = -\sin \beta + \zeta, \quad w_2 = \cos \beta, \quad (3.67)$$

после чего параметры матрицы выражаются как

$$\varepsilon = w_1 \cos \beta + w_2 \sin \beta, \quad (3.68)$$

$$\alpha = -w_1 \sin \beta + w_2 \cos \beta. \quad (3.69)$$

При $\zeta = 0$ получается невозмущённая матрица, а изменение ζ соответствует смещению вдоль выбранного направления в плоскости параметров матрицы.

Геометрический смысл этой репараметризации показан на рис. 3.4. Изолинии эксцентриситета в плоскости (ϵ, α) позволяют выделить направление, вдоль которого изменение эксцентриситета наиболее регулярно. Именно вдоль этого направления вводится управляющий параметр ζ .

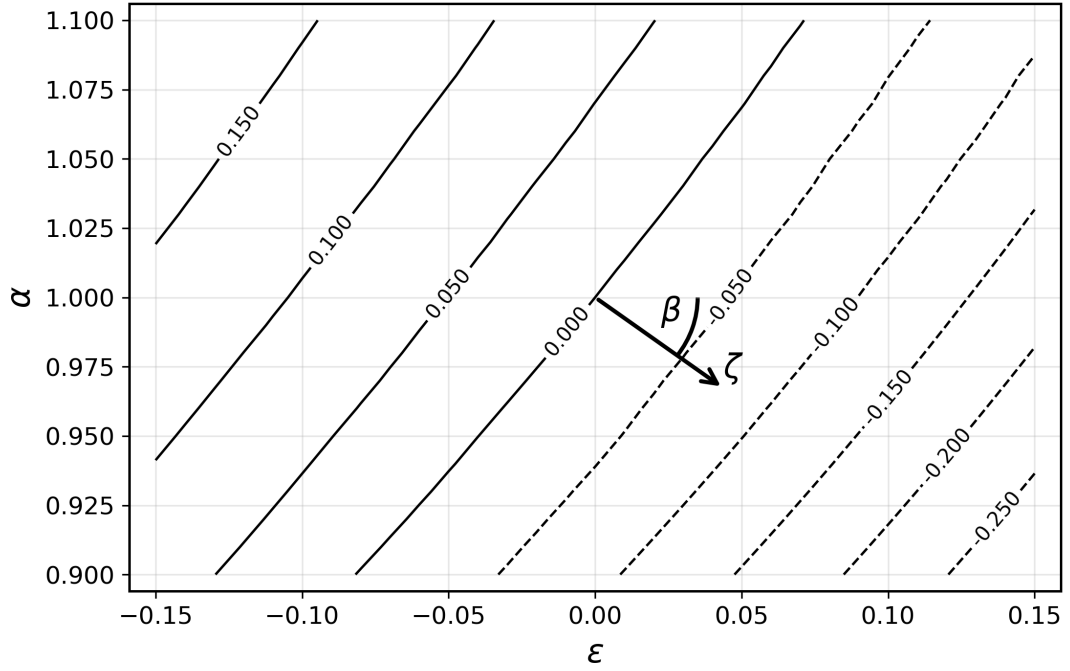


Рисунок 3.4 — Изолинии эксцентриситета в плоскости параметров матрицы R -преобразования II типа. Угол β задаёт направление репараметризации, вдоль которого вводится управляющий параметр ζ .

Для задания аргумента перицентра используется дополнительный поворот базовой матрицы R_e . Обозначим через Q_χ матрицу поворота вокруг оси Oz :

$$Q_\chi = \begin{pmatrix} \cos \chi & -\sin \chi & 0 \\ \sin \chi & \cos \chi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.70)$$

Тогда итоговая матрица R -преобразования II типа записывается в виде

$$R_{e\omega} = Q_\chi R_e Q_\chi^T. \quad (3.71)$$

Угол χ не совпадает с аргументом перицентра ω . Он является углом поворота матрицы $R_{e\omega}$, соответствующим заданному значению ω . По результатам

численного исследования связь между ними хорошо описывается конечной формулой

$$\chi(\omega) = \frac{\omega}{2} + \frac{1}{6} \sin 2\omega + \frac{1}{32} \sin 4\omega. \quad (3.72)$$

График этой зависимости и ошибка её аппроксимации приведены на рис. 3.5 и рис. 3.6.

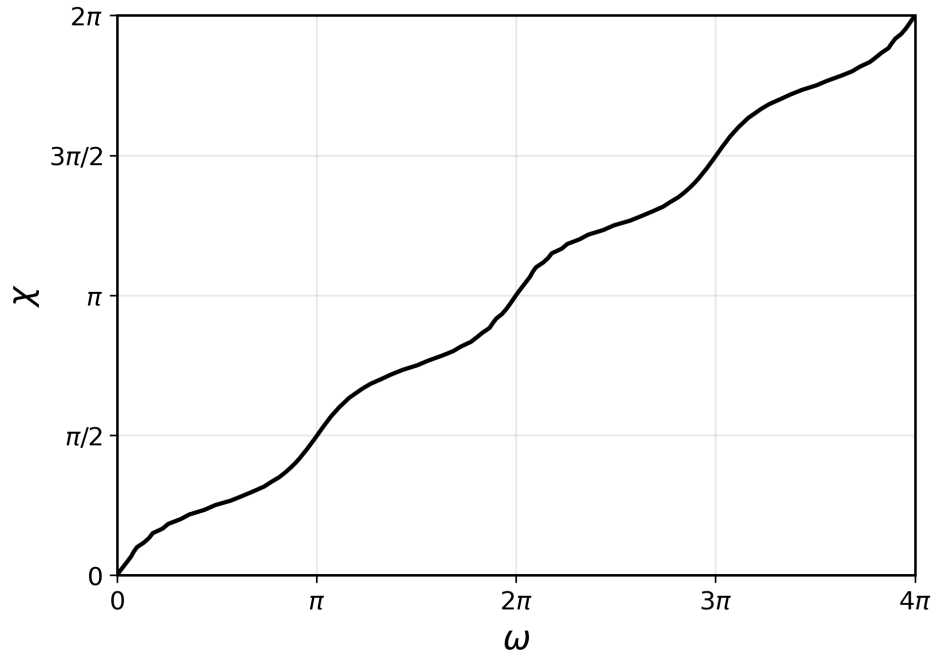


Рисунок 3.5 — Связь угла поворота матрицы χ с целевым аргументом перицентра ω .

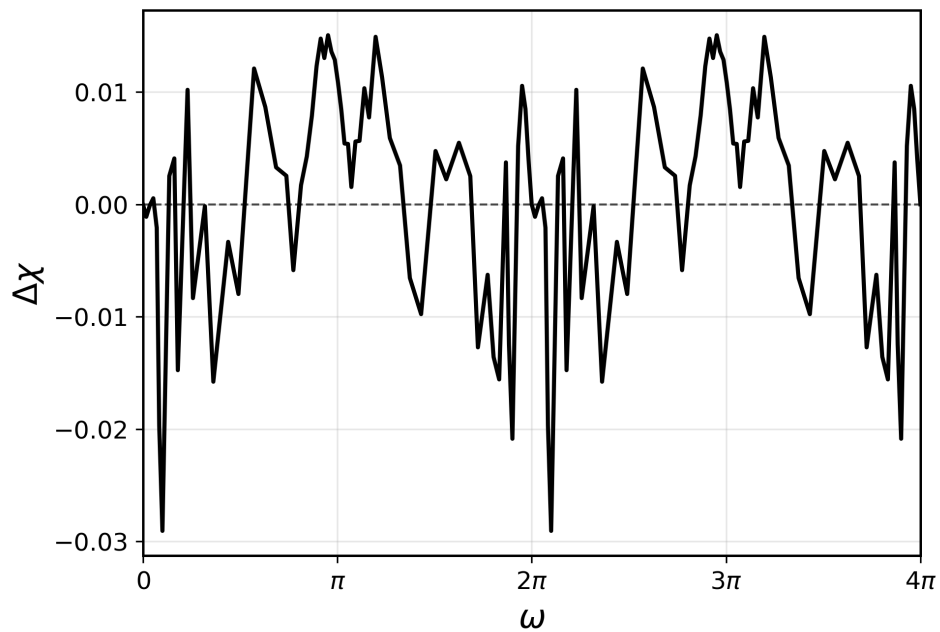


Рисунок 3.6 — Ошибка конечной формулы для угла поворота матрицы $\chi(\omega)$.

После выбора угла χ эксцентриситет задаётся через управляющий параметр ζ . В исследуемой области зависимость эксцентриситета от ζ имеет локально линейный характер:

$$e \approx -\mathcal{A}^{(e)}(\kappa, \omega) \zeta. \quad (3.73)$$

Поэтому управляющий параметр выбирается по формуле

$$\zeta = -\frac{e}{\mathcal{A}^{(e)}(\kappa, \omega)}. \quad (3.74)$$

Изолинии $\mathcal{A}^{(e)}$ показаны на рис. 3.7. Коэффициент-функция чувствительности $\mathcal{A}^{(e)}(\kappa, \omega)$ имеет гармоническую структуру по аргументу перицентра:

$$\mathcal{A}^{(e)}(\kappa, \omega) = \mathcal{A}_0^{(e)}(\kappa) + \sin \omega \left(\mathcal{A}_1^{(e)}(\kappa) \sin \omega + \mathcal{A}_2^{(e)}(\kappa) \sin 3\omega \right). \quad (3.75)$$

Компоненты коэффициент-функции $\mathcal{A}^{(e)}$ в используемой области аппроксимируются линейными выражениями по $\kappa - 1$:

$$\mathcal{A}_0^{(e)}(\kappa) = C_0^{(e)}(\kappa - 1), \quad (3.76)$$

$$\mathcal{A}_1^{(e)}(\kappa) = C_1^{(e)}(\kappa - 1), \quad (3.77)$$

$$\mathcal{A}_2^{(e)}(\kappa) = C_2^{(e)}(\kappa - 1). \quad (3.78)$$

Коэффициенты $C_0^{(e)}$, $C_1^{(e)}$ и $C_2^{(e)}$ приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1 — Коэффициенты компонент коэффициент-функции $\mathcal{A}^{(e)}(\kappa, \omega)$.

Коэффициент	Значение
$C_0^{(e)}$	3.272585×10^0
$C_1^{(e)}$	-1.931513×10^0
$C_2^{(e)}$	-4.543650×10^{-1}

Наглядный пример действия R -преобразования II типа приведён на рис. 3.8. Начальный фазовый вектор в этом примере фиксирован, а изменение формы конечной орбиты достигается только за счёт преобразования начального вектора сопряжённых переменных. Видно, что траектория остаётся плоской, однако конечная орбита становится эллиптической, а её ориентация меняется в соответствии с заданным аргументом перицентра.

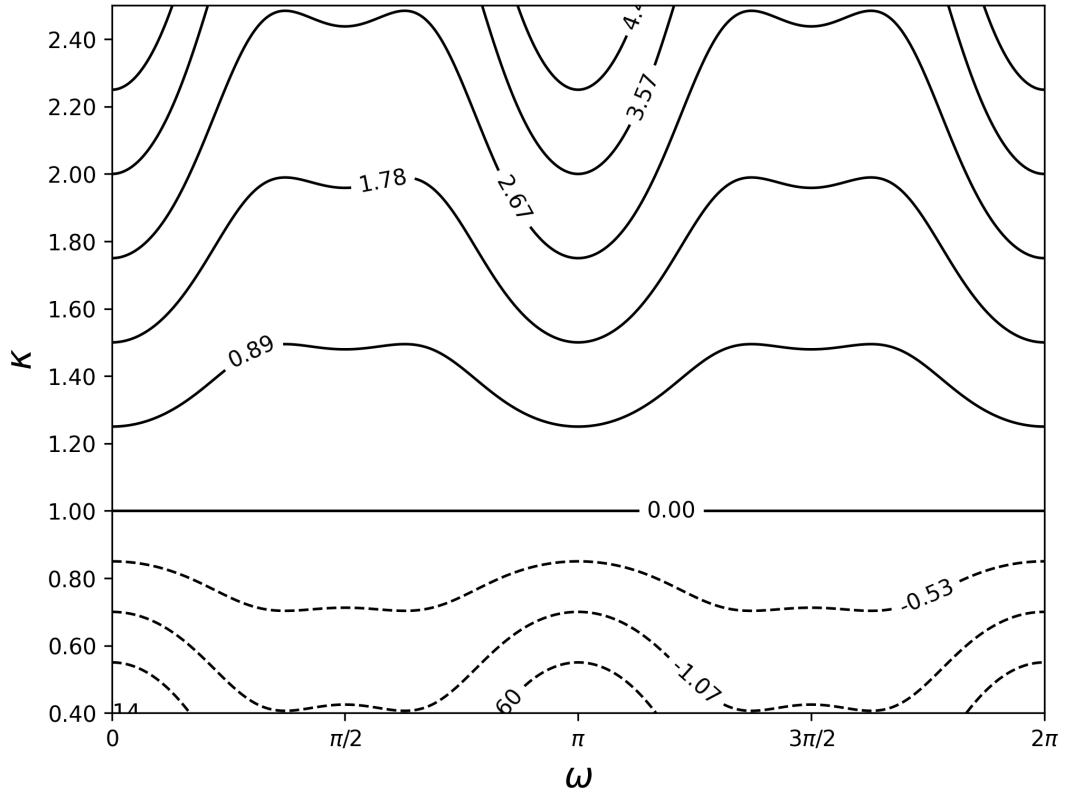


Рисунок 3.7 — Изолинии коэффициент-функции чувствительности $\mathcal{A}^{(e)}(\kappa, \omega)$, связывающей управляющий параметр ζ с эксцентриситетом конечной орбиты.

Качество задания целевых параметров проверялось повторным интегрированием траекторий после применения матрицы $R_{e\omega}$. Для эксцентриситета рассматривалась ошибка

$$\Delta e = e_{\text{num}} - e, \quad (3.79)$$

а для аргумента перицентра использовалась угловая ошибка на окружности:

$$\Delta \omega = \text{wrap}(\omega_{\text{num}} - \omega). \quad (3.80)$$

Поскольку при малом эксцентриситете аргумент перицентра плохо обусловлен, окрестность $e = 0$ исключалась из оценки ошибки ω .

На рис. 3.9 показано распределение ошибки задания эксцентриситета в плоскости (ω, e) . Этот рисунок показывает, как точность формулы меняется при изменении целевого эксцентриситета. Дополнительная проверка на плоскости (ω, κ) приведена на рис. 3.10, она показывает зависимость ошибки задания эксцентриситета от параметра κ . Ошибка задания аргумента перицентра приведена на рис. 3.11.

Помимо целевых параметров, R -преобразование II типа вызывает побочные деформации траектории. Наиболее важными из них являются изменение

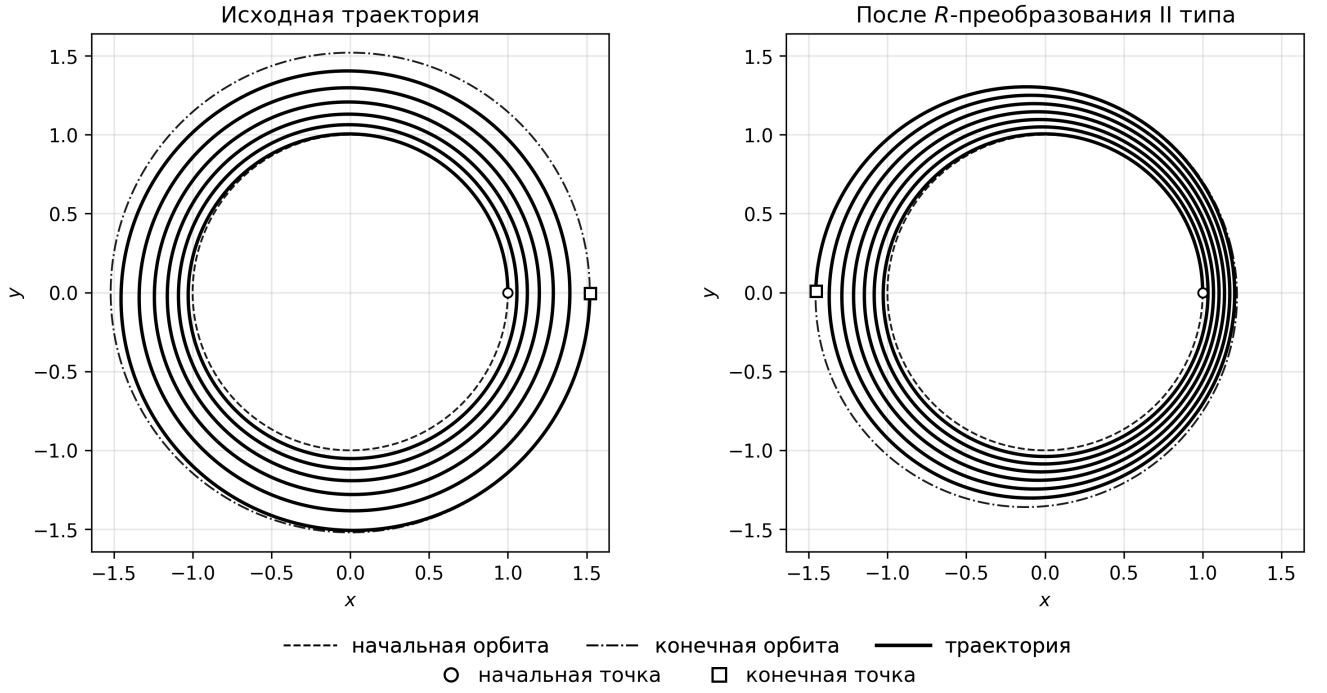


Рисунок 3.8 — Иллюстрация действия R -преобразования II типа. Слева показана исходная траектория, справа — траектория после преобразования начального вектора сопряжённых переменных. Начальный фазовый вектор фиксирован.

угловой дальности и большой полуоси конечной орбиты:

$$\Delta\lambda = \lambda_{\text{num}} - \lambda, \quad \Delta a = a_{\text{num}} - a. \quad (3.81)$$

Эти величины не входят в целевую пару (e, ω) , однако они важны для дальнейшей композиции преобразований и для построения начального приближения в полной задаче. Распределения побочных деформаций показаны на рис. 3.12 и рис. 3.13. Деформация угловой дальности рассматривается отдельно, поскольку для неё строится линейная коррекция.

Сводные численные характеристики ошибок задания целевых параметров и побочных деформаций приведены в табл. 3.2. Рисунки 3.9 и 3.10 показывают, что ошибка задания эксцентриситета остаётся малой как при изменении целевого e , так и при изменении параметра κ . Наибольшими по масштабу оказываются побочные деформации λ и a , что обосновывает необходимость отдельного анализа деформации угловой дальности.

Таким образом, R -преобразование II типа позволяет задавать эксцентриситет и аргумент перигентра конечной орбиты при фиксированном начальном

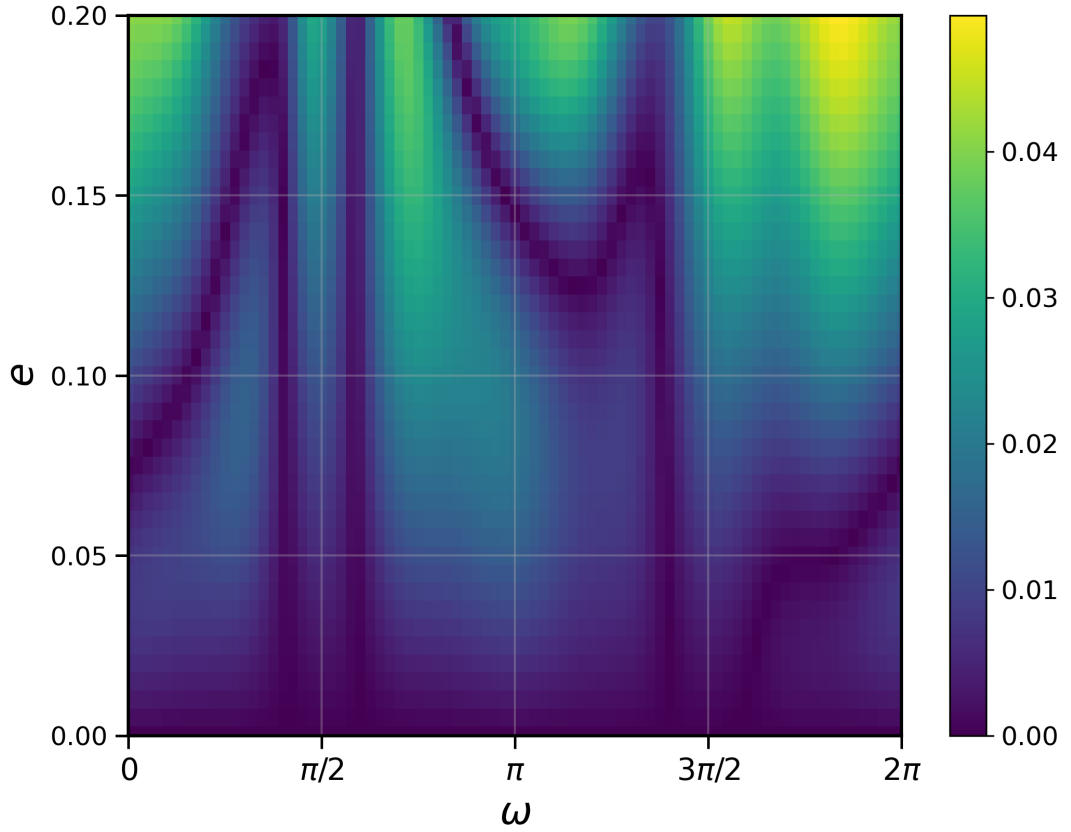


Рисунок 3.9 — Ошибка задания эксцентриситета при использовании конечной формулы для управляющего параметра ζ в плоскости (ω, e) .

Таблица 3.2 — Качество конечных формул и побочных деформаций для R -преобразования II типа

Величина	Масштаб S	RMSE (σ)	MAE	$\max \Delta $
$\hat{\chi}$	3.64×10^0	9.95×10^{-3}	8.08×10^{-3}	2.91×10^{-2}
$\Delta\omega$	3.64×10^0	1.58×10^{-1}	1.36×10^{-1}	3.29×10^{-1}
Δe	1.16×10^{-1}	1.74×10^{-2}	1.32×10^{-2}	4.93×10^{-2}
$\Delta\lambda$	6.00×10^0	3.52×10^{-1}	2.74×10^{-1}	1.01×10^0
Δa	1.52×10^0	1.46×10^{-1}	1.16×10^{-1}	3.39×10^{-1}

фазовом векторе. Управляющий параметр ζ отвечает за величину эксцентриситета, а угол χ задаёт ориентацию матрицы $R_{e\omega}$, соответствующую требуемому аргументу перицентра. При этом преобразование порождает побочные деформации угловой дальности и большой полуоси, которые необходимо учитывать при последующей композиции R -преобразований.

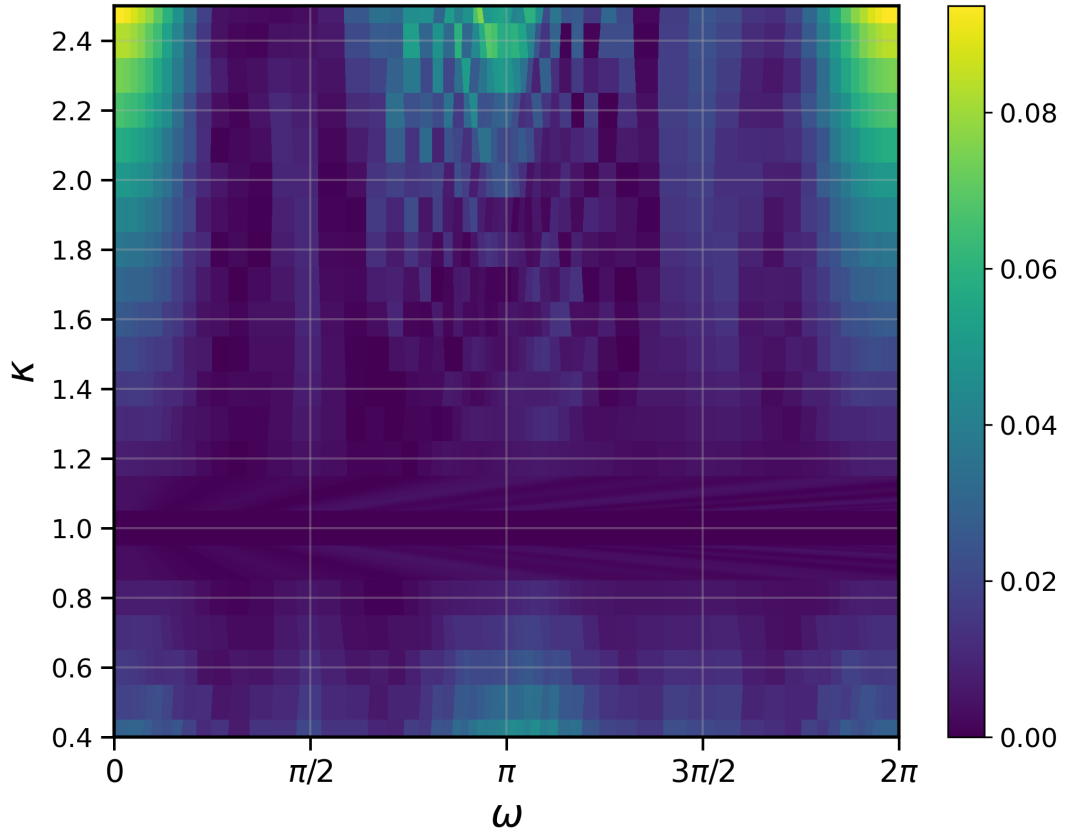


Рисунок 3.10 — Ошибка задания эксцентриситета при использовании конечной формулы для управляющего параметра ζ в плоскости (ω, κ) .

3.7 Коррекция витковой дальности при R -преобразовании II типа

В предыдущем разделе было показано, что R -преобразование II типа позволяет задать эксцентриситет e и аргумент перицентра ω конечной орбиты. Однако это преобразование одновременно вызывает побочные деформации других характеристик траектории. В частности, после повторного интегрирования изменяется фактическая витковая дальность траектории. Для уменьшения этой побочной деформации вводится предварительная коррекция параметра λ .

Пусть для фиксированных значений $(\lambda, \kappa, \omega)$ задан управляющий параметр ζ R -преобразования II типа. После применения преобразования и повторного интегрирования получаем изменение витковой дальности

$$\Delta\lambda = \lambda_{\text{def}} - \lambda_{\text{ref}}, \quad (3.82)$$

где λ_{ref} соответствует исходной траектории, а λ_{def} — траектории после R -преобразования. Для вычисления этой величины используется накопленный угол, а не орбитальный угол.

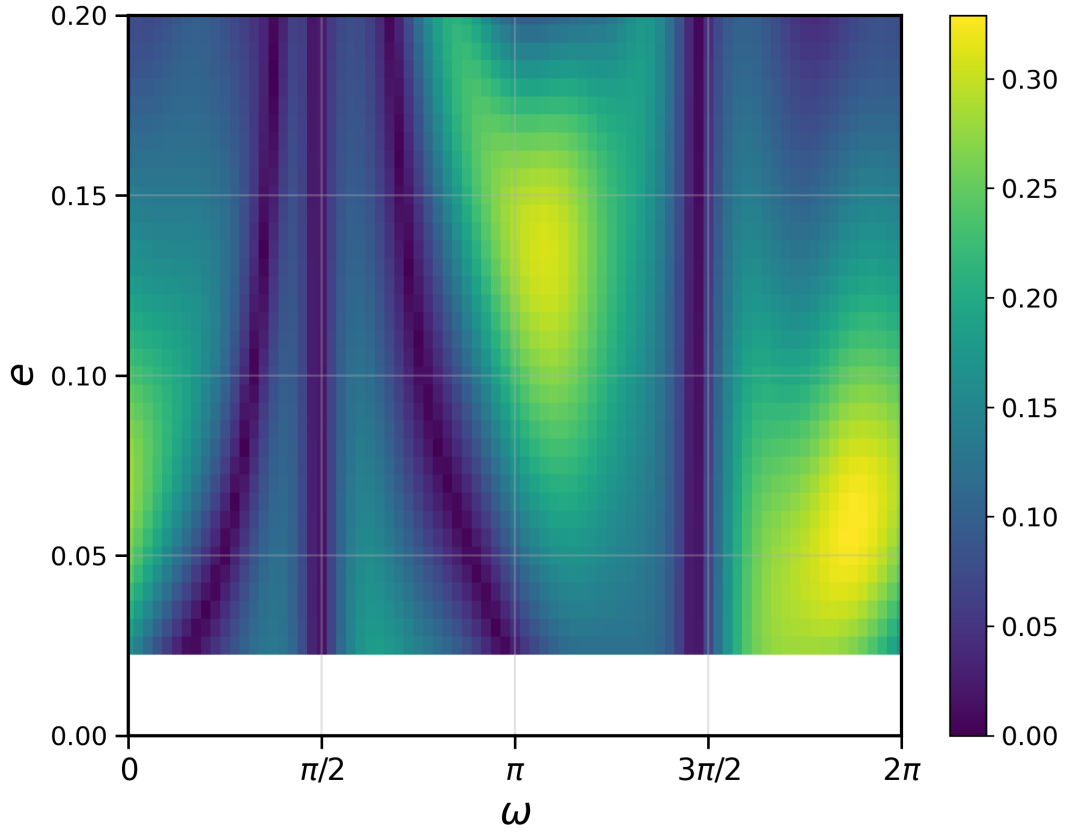


Рисунок 3.11 — Ошибка задания аргумента перицентра при использовании угла поворота матрицы $\chi(\omega)$. Окрестность малых эксцентриситетов исключена, поскольку при $e = 0$ аргумент перицентра вырожден.

Численный анализ показывает, что в малой окрестности $\zeta = 0$ зависимость $\Delta\lambda$ от управляющего параметра близка к линейной. Примеры такой зависимости для нескольких характерных наборов параметров приведены на рис. 3.14. Поэтому деформация витковой дальности аппроксимируется в виде

$$\Delta\lambda \approx \frac{1}{2\pi} \mathcal{B}_\lambda(\omega, \lambda, \kappa) \zeta, \quad (3.83)$$

где $\mathcal{B}_\lambda$ имеет смысл функции чувствительности полного угла к изменению управляющего параметра ζ . Множитель $1/(2\pi)$ появляется потому, что $\mathcal{B}_\lambda$ задаёт изменение полного угла в радианах, а λ измеряется в витках.

После выделения локального наклона по ζ была исследована зависимость $\mathcal{B}_\lambda$ от аргумента перицентра ω . Эта зависимость имеет выраженную гармоническую структуру. В качестве конечной формы был выбран базис, содержащий постоянную часть, первую и третью гармоники:

$$\mathcal{B}_\lambda(\omega, \lambda, \kappa) = \mathcal{B}_0^{(\lambda)}(\lambda, \kappa) + \mathcal{B}_1^{(\lambda)}(\lambda, \kappa) \cos \omega + \mathcal{B}_2^{(\lambda)}(\lambda, \kappa) \sin \omega + \mathcal{B}_3^{(\lambda)}(\lambda, \kappa) \cos 3\omega + \mathcal{B}_4^{(\lambda)}(\lambda, \kappa) \sin 3\omega \quad (3.84)$$

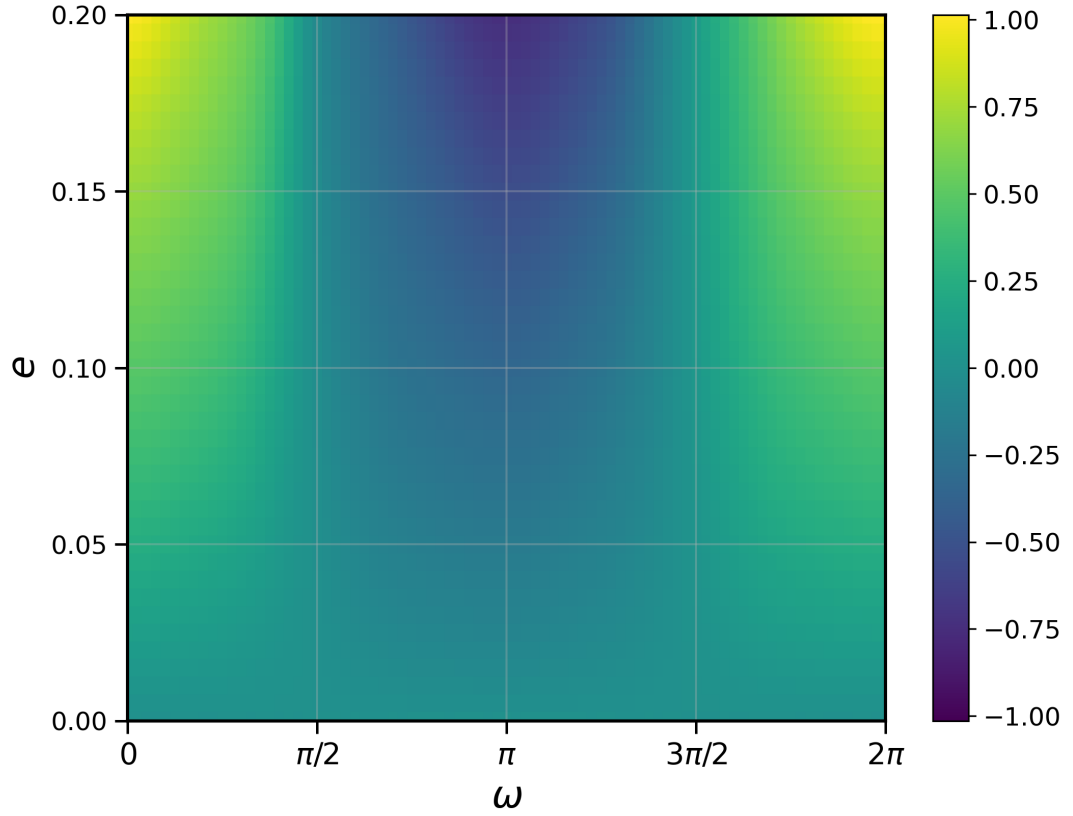


Рисунок 3.12 — Побочная деформация угловой дальности при R -преобразовании II типа.

Такой вид отделяет угловую зависимость от зависимости по параметрам (λ, κ) . Компоненты $\mathcal{B}_0^{(\lambda)}, \mathcal{B}_1^{(\lambda)}, \mathcal{B}_2^{(\lambda)}, \mathcal{B}_3^{(\lambda)}, \mathcal{B}_4^{(\lambda)}$ далее аппроксимируются как функции (λ, κ) с помощью символьной регрессии. Качество этих аппроксимаций приведено в табл. 3.3. Полные выражения для коэффициентов вынесены в приложение.

Таблица 3.3 — Качество аппроксимации компонент функции $\mathcal{B}_\lambda$.

Величина	Масштаб S	RMSE (σ)	MAE	$\max \Delta $
$\mathcal{B}_0^{(\lambda)}$	1.46×10^0	2.63×10^{-2}	1.91×10^{-2}	1.28×10^{-1}
$\mathcal{B}_1^{(\lambda)}$	1.85×10^1	1.09×10^0	7.15×10^{-1}	7.84×10^0
$\mathcal{B}_2^{(\lambda)}$	1.06×10^1	6.94×10^{-1}	4.50×10^{-1}	4.65×10^0
$\mathcal{B}_3^{(\lambda)}$	3.28×10^0	2.25×10^{-1}	1.41×10^{-1}	1.48×10^0
$\mathcal{B}_4^{(\lambda)}$	1.64×10^0	1.13×10^{-1}	7.81×10^{-2}	7.06×10^{-1}

Зная приближённое значение деформации, можно заранее сдвинуть входную витковую дальность в противоположную сторону. Поэтому вводится скорректированное значение

$$\lambda_{\text{corr}} = \lambda - \Delta\lambda. \quad (3.85)$$

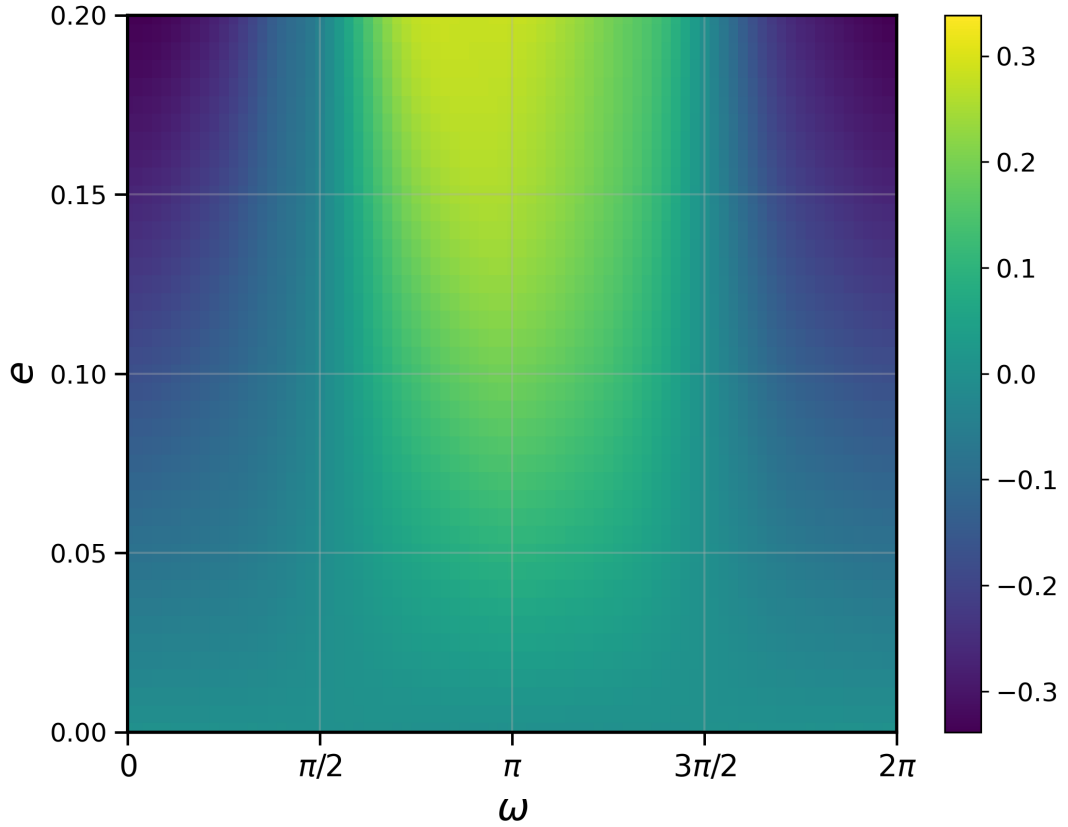


Рисунок 3.13 — Побочная деформация большой полуоси конечной орбиты при R -преобразовании II типа.

С учётом линейной модели получаем итоговую формулу

$$\lambda_{\text{corr}} = \lambda - \frac{1}{2\pi} \mathcal{B}_\lambda(\omega, \lambda, \kappa) \zeta. \quad (3.86)$$

Эта коррекция не изменяет R -преобразование II типа, а заменяет исходное значение λ , по которому выбирается аппроксимированный начальный вектор сопряжённых переменных, на значение λ_{corr} . Тем самым ожидаемая деформация витковой дальности частично компенсируется до повторного интегрирования.

Результат применения коррекции показан на рис. 3.15. На левой панели приведён модуль ошибки витковой дальности без коррекции, на правой — остаточная ошибка после применения формулы для λ_{corr} . Обе панели построены в одинаковой цветовой шкале, что позволяет непосредственно сравнить величину исходной и остаточной деформации.

Сводные значения ошибки до и после коррекции приведены в табл. 3.4. Видно, что линейная коррекция существенно уменьшает среднеквадратичную и среднюю абсолютную ошибку витковой дальности. При этом коррекция остаётся локальной: она строится по чувствительности в окрестности $\zeta = 0$, поэтому

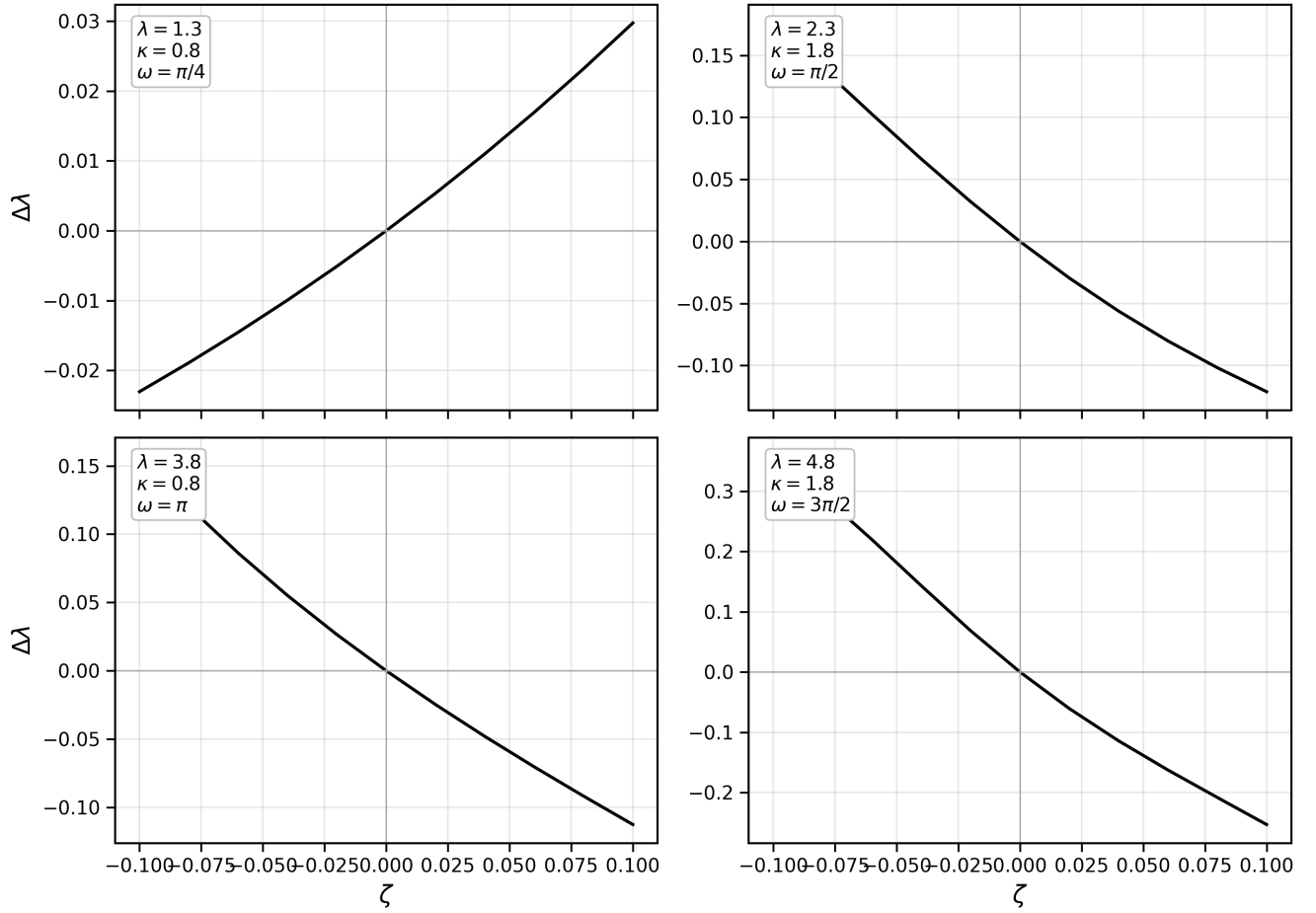


Рисунок 3.14 — Локальная зависимость деформации витковой дальности $\Delta\lambda$ от управляющего параметра ζ для нескольких наборов параметров $(\lambda, \kappa, \omega)$.

не должна рассматриваться как точное глобальное описание деформации для произвольных больших значений управляющего параметра.

Таблица 3.4 — Сравнение ошибки витковой дальности до и после линейной коррекции.

Величина	Масштаб S	RMSE (σ)	MAE	$\max \Delta $
$\Delta\lambda$, без коррекции	3.66×10^0	7.31×10^{-2}	4.11×10^{-2}	6.17×10^{-1}
$\Delta\lambda$, с коррекцией	3.66×10^0	1.66×10^{-2}	6.64×10^{-3}	2.36×10^{-1}

Таким образом, R -преобразование II типа дополняется простой предварительной коррекцией витковой дальности. Основная задача самого преобразования остаётся прежней — задание ϵ и ω , однако поправка λ_{corr} уменьшает побочное смещение конечной точки по полному углу. Эта коррекция используется как часть процедуры построения начального приближения для траекторий с эллиптической конечной орбитой.

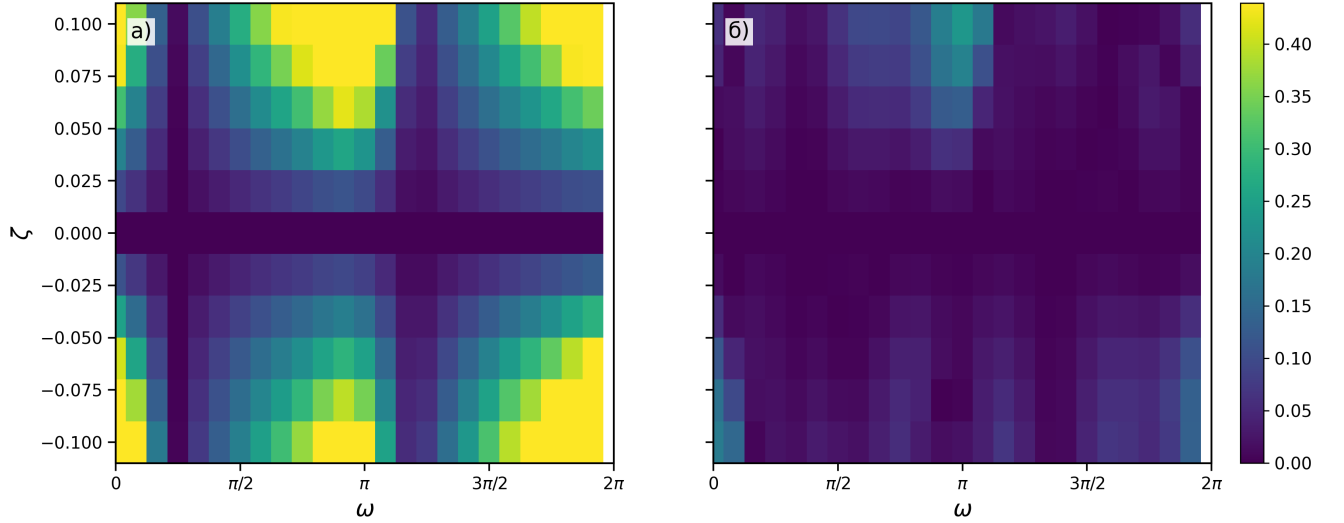


Рисунок 3.15 — Ошибка витковой дальности до и после линейной коррекции. Слева показан модуль исходной деформации $|\Delta\lambda|$, справа — модуль остаточной ошибки после замены λ на λ_{corr} .

3.8 R -преобразование III типа для задания наклона и долготы восходящего узла

R -преобразование III типа используется для пространственной деформации траектории при фиксированном начальном фазовом векторе. В отличие от R -преобразования II типа, которое изменяет форму конечной орбиты в исходной плоскости и позволяет задавать e и ω , преобразование III типа выводит конечную орбиту из плоскости исходного движения. Целевыми параметрами в этом случае являются наклонение i и долгота восходящего узла Ω .

Базовая матрица пространственного преобразования имеет вид

$$R_i(j) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+j^2} & -\frac{j}{1+j^2} \\ 0 & \frac{j}{1+j^2} & \frac{1}{1+j^2} \end{pmatrix}, \quad (3.87)$$

где j является управляющим параметром R -преобразования III типа. Этот параметр не равен наклонению конечной орбиты, а задаёт величину пространственного отклонения начального вектора сопряжённых переменных.

Для задания ориентации линии узлов применяется поворот вокруг оси Oz :

$$Q_\Omega = \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.88)$$

Итоговая матрица R -преобразования III типа записывается в виде

$$R_{i\Omega}(j, \Omega) = Q_\Omega R_i(j) Q_\Omega^T. \quad (3.89)$$

Управляющий параметр j выбирается из условия приближённого задания наклона конечной орбиты. Численное исследование показывает, что в рассматриваемой области зависимость наклона от j имеет локально линейный характер:

$$i \approx -\mathcal{A}^{(i)}(\kappa, \Omega)j. \quad (3.90)$$

Следовательно,

$$j = -\frac{i}{\mathcal{A}^{(i)}(\kappa, \Omega)}. \quad (3.91)$$

При $i = 0$ полагается $j = 0$, поскольку пространственное преобразование в этом случае не требуется.

Коэффициент-функция чувствительности $\mathcal{A}^{(i)}(\kappa, \Omega)$ аппроксимируется выражением

$$\mathcal{A}^{(i)}(\kappa, \Omega) = \mathcal{A}_0^{(i)}(\kappa) + \mathcal{A}_1^{(i)}(\kappa) \cos 2\Omega, \quad (3.92)$$

где

$$\mathcal{A}_0^{(i)}(\kappa) = \kappa \left(C_0^{(i)} + C_1^{(i)} \kappa \right) \left(\kappa + C_2^{(i)} \right) + C_3^{(i)}, \quad (3.93)$$

$$\mathcal{A}_1^{(i)}(\kappa) = C_4^{(i)} \left(\kappa - C_5^{(i)} \right) \left(\kappa^3 - C_6^{(i)} \right). \quad (3.94)$$

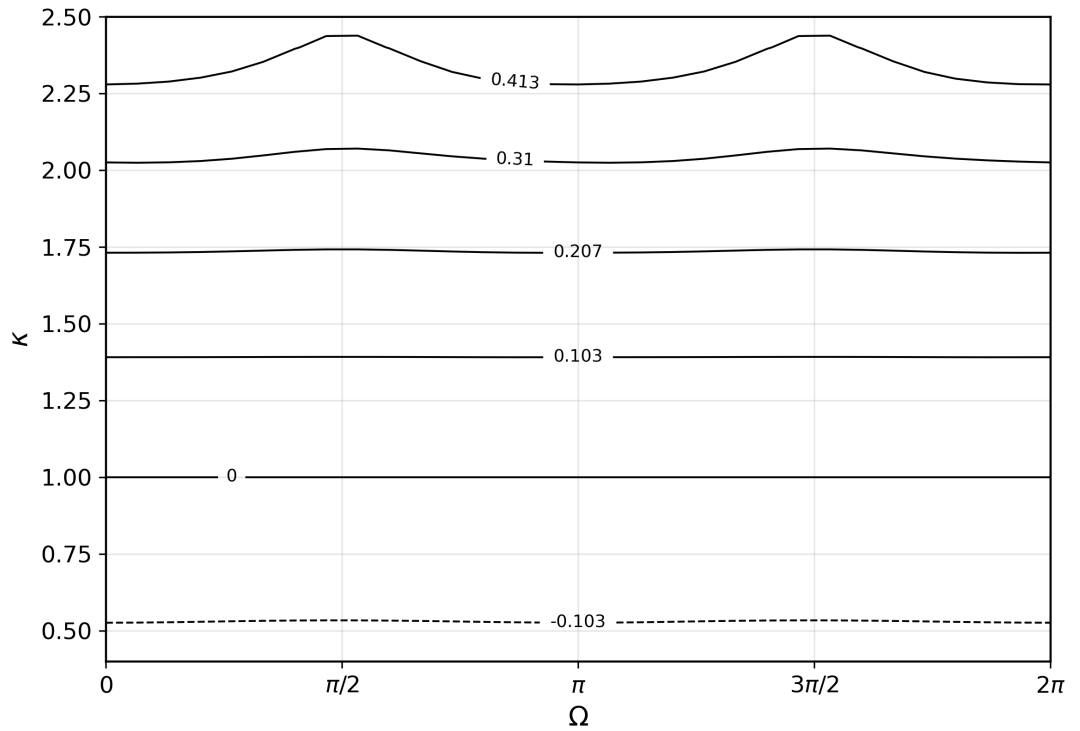
Коэффициенты конечной формулы приведены в табл. 3.5.

Изолинии коэффициент-функции чувствительности $\mathcal{A}^{(i)}$ показаны на рис. 3.16. Основная зависимость определяется параметром κ : при приближении к $\kappa = 1$ эта функция обращается в малую величину, что соответствует вырождению эффекта пространственного преобразования для почти совпадающих круговых орбит. Зависимость от Ω выражена слабее и имеет период π , что соответствует присутствию гармоники $\cos 2\Omega$ в конечной формуле.

Наглядный пример действия R -преобразования III типа приведён на рис. 3.17. Начальный фазовый вектор остаётся фиксированным, а пространственная ориентация конечной орбиты изменяется за счёт преобразования

Таблица 3.5 — Коэффициенты компонент коэффициент-функции $\mathcal{A}^{(i)}(\kappa, \Omega)$.

Коэффициент	Значение
$C_0^{(i)}$	1.265374×10^{-1}
$C_1^{(i)}$	-2.255162×10^{-2}
$C_2^{(i)}$	8.123615×10^{-1}
$C_3^{(i)}$	-1.875564×10^{-1}
$C_4^{(i)}$	1.208435×10^{-3}
$C_5^{(i)}$	1.425563×10^0
$C_6^{(i)}$	9.998528×10^{-1}

Рисунок 3.16 — Изолинии коэффициент-функции чувствительности $\mathcal{A}^{(i)}(\kappa, \Omega)$, связывающей управляющий параметр j с наклонением конечной орбиты.

начального вектора сопряжённых переменных. В результате конечная орбита получает ненулевое наклонение и заданную ориентацию линии узлов.

Качество задания целевых параметров проверялось повторным интегрированием траекторий после применения матрицы $R_{i\Omega}$. Для наклонения рассматривалась ошибка

$$\Delta i = i_{\text{num}} - i, \quad (3.95)$$

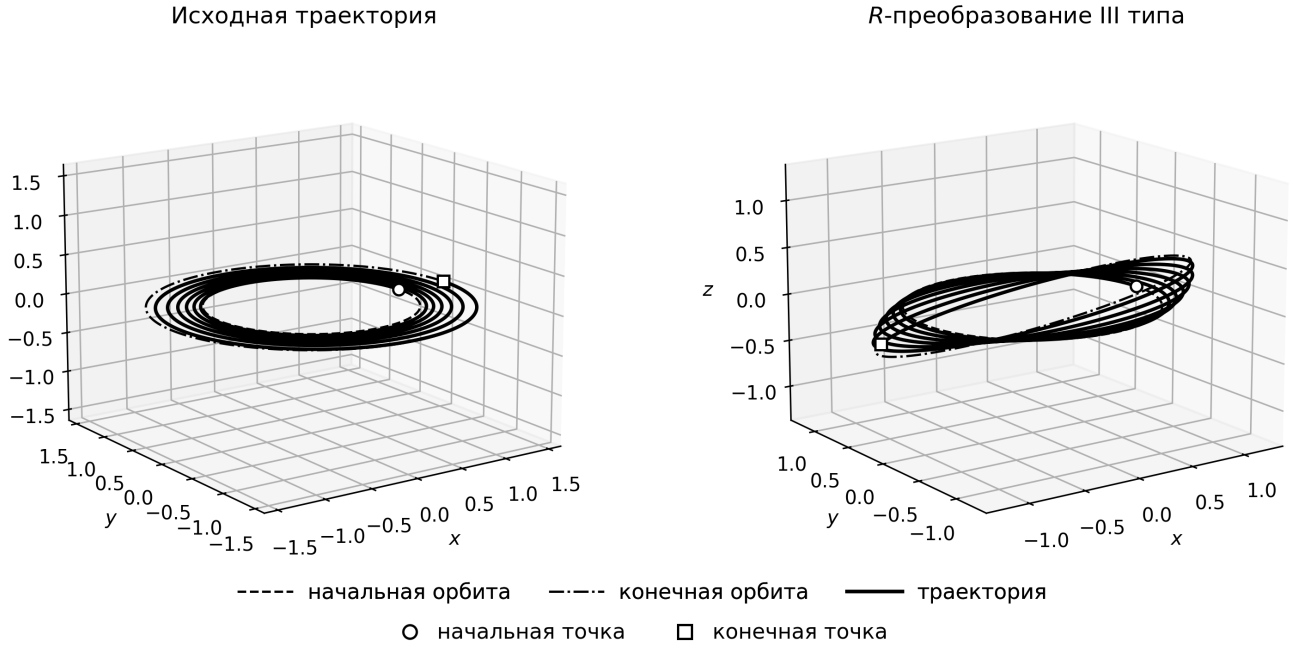


Рисунок 3.17 — Иллюстрация действия R -преобразования III типа. Слева показана исходная траектория, справа — траектория после преобразования начального вектора сопряжённых переменных. Начальный фазовый вектор фиксирован.

а для долготы восходящего узла использовалась угловая ошибка на окружности:

$$\Delta\Omega = \text{wrap}(\Omega_{\text{num}} - \Omega). \quad (3.96)$$

При $i = 0$ долгота восходящего узла вырождена, поэтому малая окрестность нулевого наклонения исключалась из оценки ошибки Ω .

Распределение ошибки задания наклонения показано на рис. 3.18. Ошибка возрастает при увеличении целевого наклонения и имеет выраженную зависимость от ориентации линии узлов. Наибольшие значения наблюдаются вблизи верхней границы исследованной области по i , что согласуется с локальным характером формулы для управляющего параметра j .

Ошибка задания долготы восходящего узла приведена на рис. 3.19. Белая область соответствует исключённой окрестности малых наклонений, где долгота восходящего узла плохо обусловлена. В остальной части области ошибка имеет периодическую структуру по Ω , но остаётся ограниченной.

Как и R -преобразование II типа, пространственное преобразование вызывает побочные деформации характеристик траектории. В первую очередь рассматривались изменение витковой дальности и большой полуоси конечной

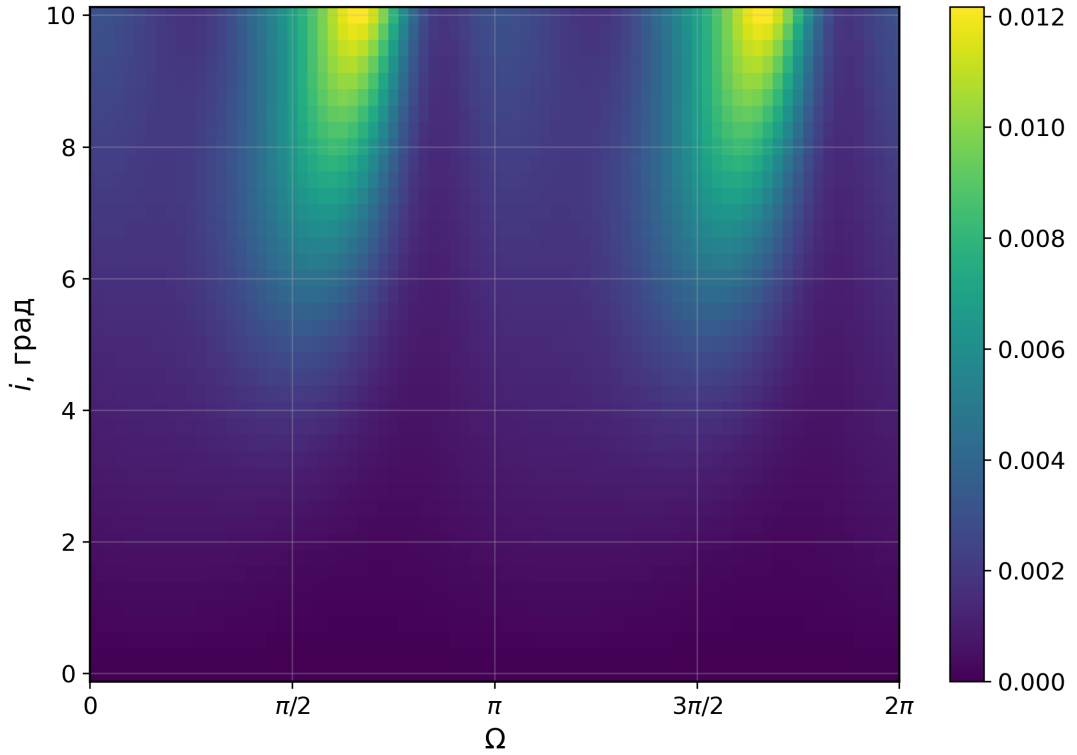


Рисунок 3.18 — Ошибка задания наклона конечной орбиты при использовании конечной формулы для управляющего параметра j .

орбиты:

$$\Delta\lambda = \lambda_{\text{num}} - \lambda, \quad \Delta a = a_{\text{num}} - a. \quad (3.97)$$

Эти величины не являются целевыми для R -преобразования III типа, однако они важны при последующей композиции преобразований.

На рис. 3.20 показана побочная деформация витковой дальности. В рассматриваемом примере используется эталонная траектория с $\lambda = 6$ и $\kappa = 1.52$, а варьируются целевые значения i и Ω . Деформация усиливается при увеличении наклона и имеет два характерных максимума по модулю на периоде 2π .

Побочная деформация большой полуоси конечной орбиты приведена на рис. 3.21. Она также возрастает с увеличением наклона, но имеет иную угловую структуру по Ω . Это показывает, что пространственное R -преобразование, несмотря на хорошее задание целевых параметров i и Ω , не является изолированным изменением только ориентации конечной орбиты.

Сводные численные оценки приведены в табл. 3.6. Для i и Ω таблица характеризует точность задания целевых параметров. Для λ и a она показывает масштаб побочных деформаций относительно исходной эталонной траектории. Видно, что ошибки задания i и Ω существенно меньше характерного масштаба самих величин. В то же время побочные изменения λ и a заметны и должны

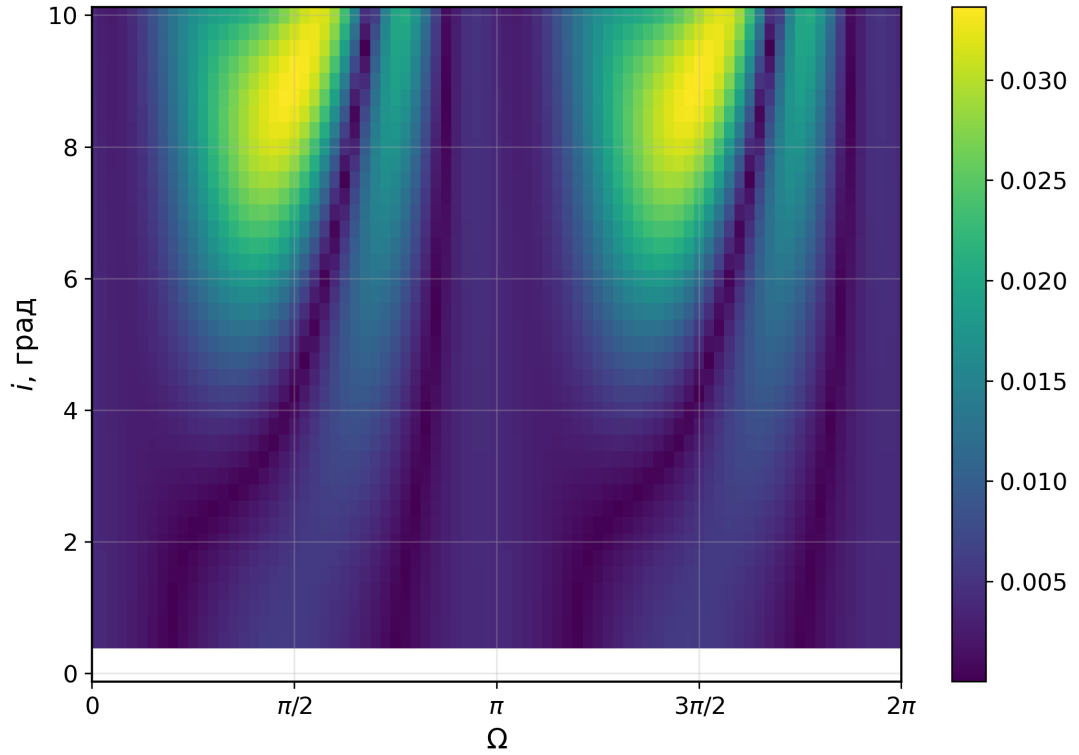


Рисунок 3.19 — Ошибка задания долготы восходящего узла при R -преобразовании III типа. Окрестность малых наклонений исключена, поскольку при $i = 0$ долгота восходящего узла вырождена.

учитываться при использовании пространственного преобразования совместно с другими R -преобразованиями.

Таблица 3.6 — Качество задания целевых параметров и побочные деформации при R -преобразовании III типа.

Величина	Масштаб S	RMSE (σ)	MAE	$\max \Delta $
i	1.01×10^{-1}	3.01×10^{-3}	2.06×10^{-3}	1.22×10^{-2}
Ω	3.64×10^0	1.12×10^{-2}	7.92×10^{-3}	3.36×10^{-2}
λ	6.05×10^0	8.00×10^{-2}	4.68×10^{-2}	3.00×10^{-1}
a	1.49×10^0	4.79×10^{-2}	2.89×10^{-2}	1.68×10^{-1}

Таким образом, R -преобразование III типа позволяет задавать наклонение и долготу восходящего узла конечной орбиты при фиксированном начальном фазовом векторе. Управляющий параметр j определяет величину выхода траектории из исходной плоскости, а угол Ω задаёт ориентацию линии узлов через ортогонально подобное преобразование матрицы $R_i(j)$. Численные результаты показывают, что конечная формула для j обеспечивает регулярное задание

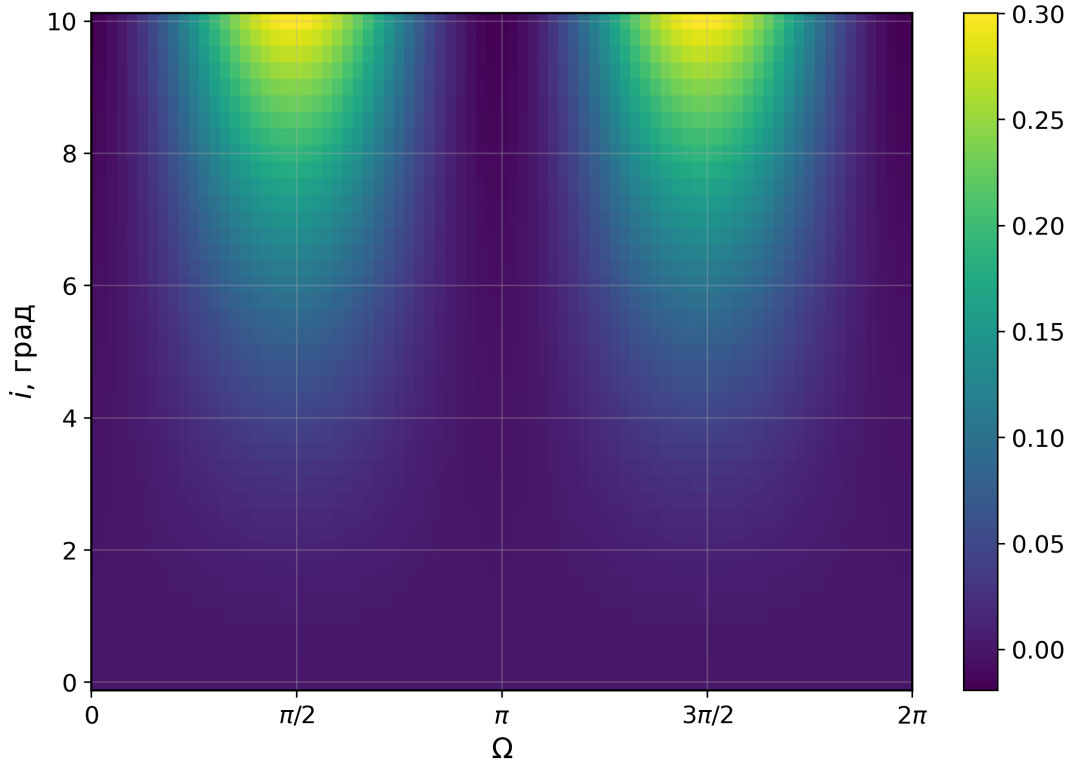


Рисунок 3.20 — Побочная деформация витковой дальности при R -преобразовании III типа для эталонной траектории с $\lambda = 6$ и $\kappa = 1.52$.

целевых пространственных параметров в рассматриваемой области, однако одновременно возникают побочные деформации витковой дальности и большой полуоси. Эти деформации следует учитывать при последующей композиции R -преобразований и при построении начального приближения для полной пространственной задачи.

3.9 Композиция R -преобразований

В предыдущих разделах R -преобразования I, II и III типов рассматривались по отдельности. Такое разделение используется при построении и проверке конечных формул: R -преобразование I типа задаёт переход к выбранному начальному фазовому вектору, R -преобразование II типа задаёт эксцентриситет и аргумент перицентра в плоскости траектории, а R -преобразование III типа задаёт наклонение и долготу восходящего узла. В полной задаче встречи эти преобразования должны применяться совместно, поскольку конечная орбита в общем случае является одновременно эллиптической и пространственной.

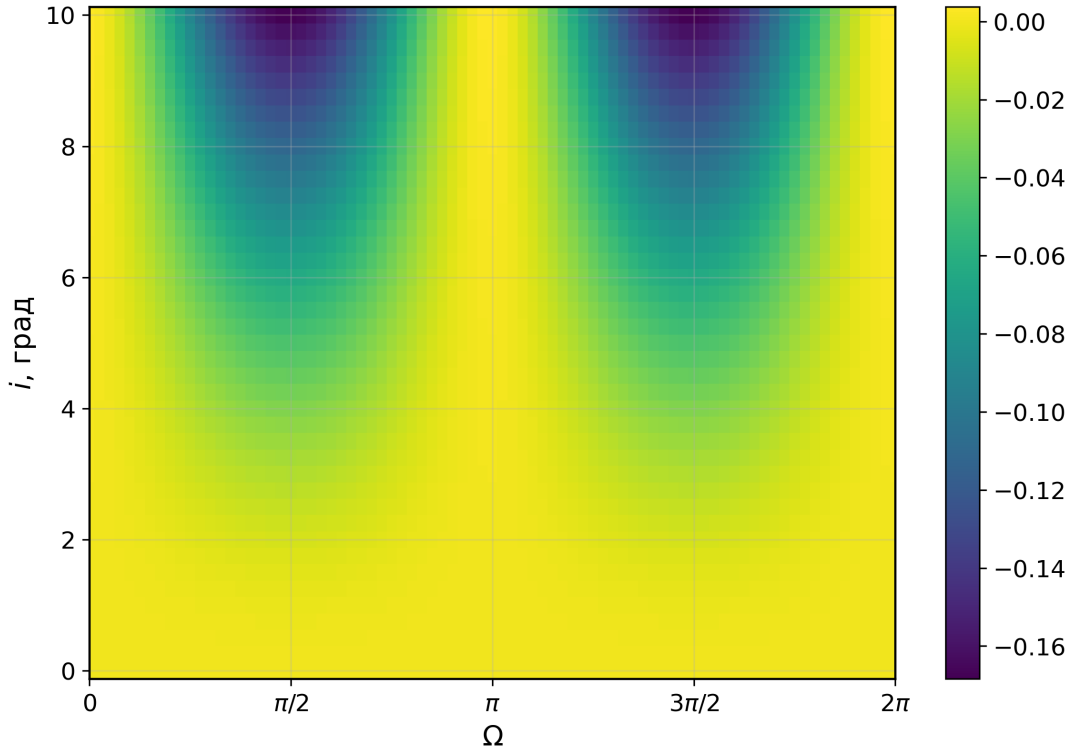


Рисунок 3.21 — Побочная деформация большой полуоси конечной орбиты при R -преобразовании III типа для эталонной траектории с $\lambda = 6$ и $\kappa = 1.52$.

Пусть из аппроксимированного многообразия главы 2 выбрана опорная точка с параметрами (λ, κ) . По конечным формулам для этой точки вычисляются начальные значения сопряжённых переменных

$$\hat{\mathbf{p}}_{r0}(\lambda, \kappa), \quad \hat{\mathbf{p}}_{v0}(\lambda, \kappa). \quad (3.98)$$

Если используется компенсация деформации витковой дальности, то вместо исходного значения λ берётся скорректированная величина

$$\lambda_{\text{corr}} = \lambda - \frac{1}{2\pi} \mathcal{B}_\lambda(\bar{\omega}_{\text{rel}}, \lambda, \kappa) \zeta. \quad (3.99)$$

Здесь $\mathcal{B}_\lambda$ — функция чувствительности, построенная в разделе о коррекции витковой дальности, а $\bar{\omega}_{\text{rel}}$ — относительная долгота перицентра, определённая ниже. Тогда начальный вектор сопряжённых переменных берётся уже в точке

$$\hat{\mathbf{p}}_{r0}^{\text{corr}} = \hat{\mathbf{p}}_{r0}(\lambda_{\text{corr}}, \kappa), \quad \hat{\mathbf{p}}_{v0}^{\text{corr}} = \hat{\mathbf{p}}_{v0}(\lambda_{\text{corr}}, \kappa). \quad (3.100)$$

Эта операция не является новым типом R -преобразования: она меняет точку аппроксимированного плоского многообразия, из которой берётся начальный вектор сопряжённых переменных.

Далее зададим начальный фазовый вектор полной задачи

$$\mathbf{x}_0 = (\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0). \quad (3.101)$$

Матрицу R -преобразования I типа, связанную с этим фазовым вектором, обозначим

$$R_0 = R(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0). \quad (3.102)$$

Пусть L_0 — истинная долгота начального радиус-вектора. Она вычисляется по начальному фазовому вектору $(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$ и задаёт начальное направление, относительно которого должны быть записаны углы плоского и пространственного преобразований.

В изолированном R -преобразовании II типа угол ω является аргументом перицентра в плоскости траектории. При композиции с пространственным преобразованием удобнее сначала перейти к долготе перицентра

$$\bar{\omega} = \Omega + \omega, \quad (3.103)$$

где Ω — долгота восходящего узла. Угол $\bar{\omega}$ задаёт направление перицентра в общей системе отсчёта. Поэтому в формулы R -преобразования II типа при композиции входит не сам аргумент перицентра, а относительная долгота перицентра

$$\bar{\omega}_{\text{rel}} = \bar{\omega} - L_0. \quad (3.104)$$

Аналогично для пространственного R -преобразования используется относительная долгота восходящего узла

$$\Omega_{\text{rel}} = \Omega - L_0. \quad (3.105)$$

В качестве управляющего угла пространственного преобразования принимается

$$\gamma = \Omega_{\text{rel}}. \quad (3.106)$$

Все угловые разности далее понимаются с приведением по модулю 2π .

Управляющий параметр плоского преобразования определяется через эксцентриситет конечной орбиты и относительную долготу перицентра:

$$\zeta = -\frac{e}{\mathcal{A}^{(e)}(\kappa, \bar{\omega}_{\text{rel}})}. \quad (3.107)$$

Управляющий параметр пространственного преобразования определяется через наклонение и относительную долготу восходящего узла:

$$j = -\frac{i}{\mathcal{A}^{(i)}(\kappa, \gamma)}. \quad (3.108)$$

Если $e = 0$, то плоское преобразование не требуется и полагается $\zeta = 0$. Если $i = 0$, то пространственное преобразование не требуется и полагается $j = 0$.

В принятом теоретическом соглашении матрица R записывается столбцами, а начальные значения сопряжённых переменных преобразуются как ковекторы. Поэтому композиция матриц имеет вид

$$R_{\Sigma} = R_{i\Omega}(j, \gamma) R_{e\omega}(\zeta, \bar{\omega}_{\text{rel}}) R_0. \quad (3.109)$$

После этого начальный вектор сопряжённых переменных для полной задачи задаётся формулами

$$\mathbf{p}'_{r0} = R_{\Sigma}^{-T} \hat{\mathbf{p}}_{r0}^{\text{corr}}, \quad \mathbf{p}'_{v0} = R_{\Sigma}^{-T} \hat{\mathbf{p}}_{v0}^{\text{corr}}. \quad (3.110)$$

Первым на сопряжённый вектор действует преобразование I типа, потом II типа и затем III типа. Начальный фазовый вектор при этом не восстанавливается из аппроксимированного многообразия, а задаётся непосредственно:

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0. \quad (3.111)$$

Таким образом, композиция R -преобразований используется как правило построения начального вектора сопряжённых переменных, после чего исходная расширенная система дифференциальных уравнений интегрируется заново. Последовательное применение преобразований продемонстрировано на рис. 3.22.

Композиция R -преобразований не является точным аналитическим решением полной пространственной задачи встречи. Преобразования II и III типов задают требуемые элементы конечной орбиты приближённо и одновременно вызывают побочные деформации, прежде всего изменение витковой дальности и большой полуоси. Деформация витковой дальности частично компенсируется предварительным переходом от λ к λ_{corr} , тогда как изменение большой полуоси учитывается как ограничение области применимости и как фактор последующей численной коррекции.

С практической точки зрения итоговая схема заменяет прямой подбор шести начальных значений сопряжённых переменных последовательным использованием параметров

$$\lambda, \quad \kappa, \quad e, \quad \omega, \quad i, \quad \Omega. \quad (3.112)$$

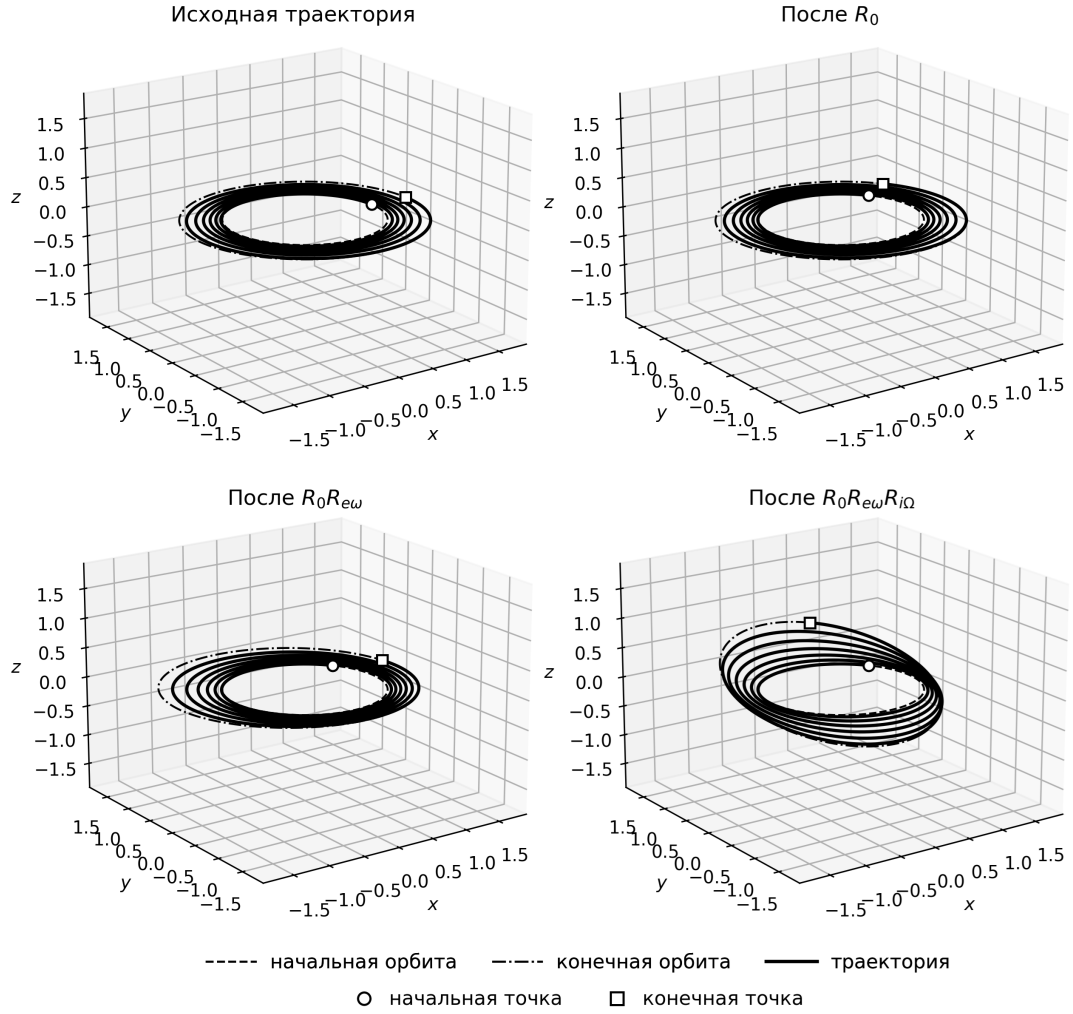


Рисунок 3.22 — Изменение исходной траектории по мере воздействия преобразований на начальный сопряжённый вектор.

Первые два параметра задают точку аппроксимированного модельного многообразия, а остальные четыре определяют эллиптичность и пространственную ориентацию конечной орбиты. Полученный начальный вектор

$$(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{p}'_{r0}, \mathbf{p}'_{v0}) \quad (3.113)$$

используется далее как начальное приближение для решения полной краевой задачи.

3.10 Выводы к главе 3

В настоящей главе построен аппарат линейных преобразований начальных значений сопряжённых переменных, предназначенный для перехода от

аппроксимированного плоского кругового многообразия к более общей пространственной задаче встречи с учётом эллиптичности орбит. Основные результаты главы состоят в следующем.

1. Введён специальный класс линейных преобразований — R -преобразования. Матрица такого преобразования строится по двум векторам, а третий столбец задаётся их векторным произведением. Это обеспечивает невырожденность матрицы при неколлинеарности первых двух векторов и позволяет согласованно преобразовывать начальные значения сопряжённых переменных.
2. Выделены три типа R -преобразований. Преобразование I типа используется при изменении начального фазового вектора. Преобразование II типа действует только на начальный вектор сопряжённых переменных и предназначено для задания эксцентриситета и аргумента перицентра конечной орбиты. Преобразование III типа также действует при фиксированном начальном фазовом векторе и предназначено для задания наклона и долготы восходящего узла.
3. Для выбора структуры преобразований II и III типов использованы ограничения, связанные со значениями инвариантов расширенной системы. Тем самым матрицы R -преобразований выбирались не как произвольные линейные операторы, а как специальные матрицы, сохраняющие или контролируемо изменяющие геометрически значимые характеристики траектории.
4. Для R -преобразования I типа показано, что согласованное преобразование начального фазового вектора и начального вектора сопряжённых переменных даёт меньшие невязки на правом конце, чем простой поворот начального вектора сопряжённых переменных. Это обосновывает использование R -преобразования I типа как основного способа переноса начального приближения к заданному начальному фазовому вектору.
5. Для R -преобразования II типа построены конечные формулы, связывающие управляющий параметр ζ , угол поворота матрицы χ и целевые элементы конечной орбиты e и ω . Показано, что эксцентриситет задаётся через коэффициент-функцию чувствительности $\mathcal{A}^{(e)}(\kappa, \omega)$, а аргумент перицентра задаётся через специальную зависимость $\chi(\omega)$.
6. Для R -преобразования II типа исследованы побочные деформации витковой дальности и большой полуоси конечной орбиты. Для витковой

дальности построена линейная коррекция, основанная на функции чувствительности $\mathcal{B}_\lambda(\omega, \lambda, \kappa)$. Эта коррекция позволяет предварительно изменить точку аппроксимированного многообразия и уменьшить остаточную деформацию λ после применения преобразования.

7. Для R -преобразования III типа построена конечная формула для коэффициент-функции чувствительности $\mathcal{A}^{(i)}(\kappa, \Omega)$, связывающего управляющий параметр j с наклоном конечной орбиты. Показано, что ориентация линии узлов задаётся ортогонально подобным преобразованием матрицы $R_i(j)$, а ошибка задания i и Ω остаётся ограниченной в рассмотренной области параметров.
8. Показано, что R -преобразования II и III типов не являются изолированными изменениями только целевых элементов орбиты: они также вызывают побочные изменения витковой дальности и большой полуоси. Эти деформации являются принципиальной частью метода и должны учитываться при композиции преобразований и при выборе точки аппроксимированного многообразия.
9. Получена итоговая композиция R_Σ , которая объединяет перенос к заданному начальному фазовому вектору, плоское преобразование формы конечной орбиты и пространственное преобразование её ориентации. Эта композиция задаёт начальный вектор сопряжённых переменных для последующего интегрирования расширенной системы.

Таким образом, построен переходный аппарат между аппроксимированным модельным многообразием плоских круговых перелётов и полной пространственной задачей встречи. Полученные конечные формулы не заменяют последующее решение краевой задачи, но позволяют сформировать физически осмысленное начальное приближение, параметры которого связаны с элементами начальной и конечной орбит. Использование этого начального приближения в задачах баллистического проектирования рассматривается в следующей главе.

Глава 4. Управляющие параметры начального приближения в задаче баллистического проектирования

В настоящей главе результаты, полученные для аппроксимированного модельного многообразия и R -преобразований, рассматриваются как инструмент построения начального приближения для задач баллистического проектирования. Сначала вводится система управляющих параметров. Затем формулируется алгоритм построения начального вектора расширенной системы, приводится пример его применения к перелёту Земля–Марс и оценивается качество начальных приближений для перелётов Земля–Марс и Земля–Венера. В заключительной части главы рассматривается сравнение с продолжением по гравитационному параметру, переход к постановкам с дополнительным импульсом скорости, применение разработанной схемы при проектировании миссии Земля–Венера и её программная реализация в ILTT Toolbox.

4.1 Управляющие параметры начального приближения

В предыдущих главах получены две составляющие для построения начального приближения в прикладной задаче баллистического проектирования. В главе 2 предложены конечные формулы для плоской круговой модельной задачи, позволяющие восстановить продолжительность перелёта, значение функционала и начальный вектор сопряжённых переменных на аппроксимированном модельном многообразии. В главе 3 построены линейные преобразования начальных значений сопряжённых переменных, позволяющие согласованно перейти от плоской круговой постановки к пространственной задаче с учётом эллиптичности конечной орбиты. В настоящей главе эти результаты используются совместно.

Для описания начального приближения введём вектор управляющих параметров

$$\mathbf{q} = (\lambda, \kappa, \zeta, \chi, j, \gamma). \quad (4.1)$$

Эти параметры не являются новым набором граничных условий. Они задают вычислительную цепочку, с помощью которой выбирается точка на аппроксими-

рованном модельном многообразии и затем выполняется переход к начальному вектору сопряжённых переменных для исходной пространственной задачи.

Первые два параметра, λ и κ , относятся к плоской круговой модельной задаче. Параметр λ задаёт витковую дальность модельного перелёта, а параметр κ — отношение радиусов модельных круговых орбит. Тем самым пара (λ, κ) определяет точку, в которой используются конечные формулы главы 2. Для этой точки вычисляются приближённые значения продолжительности перелёта, квадратичного функционала и начального вектора сопряжённых переменных:

$$(\lambda, \kappa) \longrightarrow \hat{T}, \quad \hat{J}, \quad \hat{\mathbf{z}}_0^{\text{pl}}. \quad (4.2)$$

Оставшиеся четыре параметра отвечают за переход от модельного решения к задаче с заданными орбитальными элементами конечной орбиты. Управляющий параметр ζ используется в R -преобразовании II типа и связан с заданием эксцентриситета конечной орбиты. Угол χ является управляющим угловым параметром плоского преобразования, с помощью которого задаётся аргумент перицентра ω . Параметр j используется в R -преобразовании III типа для задания наклона конечной орбиты, а угол γ служит управляющим угловым параметром пространственного преобразования, связанным с контролем долготы восходящего узла.

При этом необходимо различать аргумент перицентра и долготу перицентра. В плоском R -преобразовании II типа используется аргумент перицентра ω , отсчитываемый в плоскости конечной орбиты от линии узлов. В пространственной задаче ориентация этой линии задаётся долготой восходящего узла Ω . Поэтому при переходе к полному пространственному описанию возникает долгота перицентра

$$\bar{\omega} = \Omega + \omega. \quad (4.3)$$

Такое разделение позволяет не смешивать физические орбитальные элементы конечной орбиты с параметрами вычислительной процедуры. Долгота восходящего узла Ω и долгота перицентра $\bar{\omega}$ характеризуют ориентацию конечной орбиты в пространстве, тогда как χ и γ являются управляющими угловыми параметрами соответствующих R -преобразований.

Роли управляющих параметров сведены в табл. 4.1.

Таким образом, вектор $\mathbf{q}$ объединяет параметры двух уровней. Пара (λ, κ) выбирает исходное приближение на плоском модельном многообразии, а

Таблица 4.1 — Управляющие параметры начального приближения.

Параметр	Роль	Источник
λ	Витковая дальность модельного перелёта; задаёт положение на аппроксимированном модельном многообразии.	Конечные формулы главы 2
κ	Отношение радиусов модельных круговых орбит; задаёт масштаб конечной круговой орбиты в модельной задаче.	Конечные формулы главы 2
ζ	Управляющий параметр R -преобразования II типа, используемый для задания эксцентриситета конечной орбиты.	R -преобразование II типа
χ	Управляющий угол плоского преобразования, соответствующий заданному аргументу перицентра ω .	R -преобразование II типа
j	Управляющий параметр R -преобразования III типа, используемый для задания наклона конечной орбиты.	R -преобразование III типа
γ	Управляющий угол пространственного преобразования, связанный с контролем долготы восходящего узла.	R -преобразование III типа

параметры (ζ, χ, j, γ) задают последовательность линейных преобразований начальных значений сопряжённых переменных. При этом аргумент перицентра ω , используемый в плоском преобразовании, согласуется с пространственной ориентацией орбиты через долготу восходящего узла Ω , что позволяет перейти к долготе перицентра $\bar{\omega}$. В результате конечные формулы и R -преобразования образуют единую схему построения начального приближения без предварительного решения двухточечной краевой задачи.

4.2 Алгоритм построения начального приближения

Алгоритм построения начального приближения использует результаты глав 2 и 3 не как независимые эмпирические блоки, а как единую вычислительную схему. Сначала реальная эфемеридная постановка приводится к безразмерной форме, затем по начальной синодической фазе выбирается одна из точек оптимальной дальности на КЛО, после чего к соответствующему модельному решению применяются линейные преобразования начальных значений сопряжённых переменных.

Пусть задана дата старта и, следовательно, из эфемерид известен начальный фазовый вектор тела отправления

$$\mathbf{x}_{0,d} = (\mathbf{r}_{0,d}, \mathbf{v}_{0,d}) \quad (4.4)$$

и целевые орбитальные элементы конечной орбиты относительно центрального тела. Переход к безразмерной постановке выполняется так же, как в главе 1: выбирается единица расстояния DU , единица времени TU определяется из условия

$$TU = \sqrt{\frac{DU^3}{\mu_d}}, \quad (4.5)$$

и после нормировки гравитационный параметр центрального тела становится равным единице. В алгоритме используются безразмерные векторы

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\mathbf{r}_{0,d}}{DU}, \quad \mathbf{v}_0 = \frac{TU}{DU} \mathbf{v}_{0,d}. \quad (4.6)$$

Таким образом, орбиты и дата старта берутся из эфемерид, но вычислительная схема работает в той же нормированной задаче двух тел, что и модельное многообразие.

Из целевой конечной орбиты в той же безразмерной системе определяются величины, необходимые для выбора управляющих параметров:

$$(a, e, \omega, i, \Omega) \longrightarrow (\kappa, \zeta, \chi, j, \gamma). \quad (4.7)$$

Здесь a задаёт полуось конечной орбиты, e — эксцентриситет, i — наклонение, Ω — долгота восходящего узла, а ω — аргумент перицентра. Выбор витковой дальности λ не является произвольным. Он выполняется через точки оптимальной дальности, введённые в главе 2. Для заданной даты старта сначала определяется начальная синодическая фаза Φ .

$$(t_0) \longrightarrow (\Phi). \quad (4.8)$$

Затем рассматриваются пересечения изолинии этой фазы с КЛО, то есть решается обратная задача выбора локально оптимальной витковой дальности. Так как фаза определена с точностью до целого числа оборотов, это приводит к счётному набору возможных точек:

$$\lambda_k^* = \lambda^*(\Phi, k, \kappa), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4.9)$$

В качестве кандидатов рассматриваются три соседние ветви

$$k \in \{-1, 0, 1\}, \quad (4.10)$$

поскольку именно они соответствуют ближайшим точкам оптимальной дальности, лежащим в рабочей области продолжительности перелёта. Для каждого допустимого кандидата вычисляются конечные формулы главы 2, а затем выбирается вариант, удовлетворяющий ограничениям задачи и дающий наилучшее значение выбранного критерия. Если только одна из трёх точек попадает в допустимую область, выбор становится однозначным.

После выбора точки оптимальной дальности определяется пара

$$(\lambda^*, \kappa), \quad (4.11)$$

которая задаёт точку аппроксимированного модельного многообразия. Затем учитывается побочная деформация витковой дальности, возникающая при R -преобразовании II типа: вместо исходного значения используется скорректированная величина

$$\lambda_{\text{corr}} = \lambda^* - \Delta\lambda. \quad (4.12)$$

Тем самым конечные формулы главы 2 используются в точке $(\lambda_{\text{corr}}, \kappa)$, выбранной по КЛО и согласованной с последующим плоским преобразованием.

По конечным формулам главы 2 вычисляются приближённые характеристики модельного решения:

$$(\lambda_{\text{corr}}, \kappa) \longrightarrow \hat{T}, \quad \hat{J}, \quad \hat{\mathbf{z}}_0^{\text{pl}}. \quad (4.13)$$

Здесь

$$\hat{\mathbf{z}}_0^{\text{pl}} = \left(\hat{\mathbf{p}}_{r0}^{\text{pl}}, \hat{\mathbf{p}}_{v0}^{\text{pl}} \right) \quad (4.14)$$

является начальным вектором сопряжённых переменных для плоской круговой модельной задачи. На этом этапе ещё не учитываются ни заданный начальный фазовый вектор из эфемерид, ни эллиптичность и пространственная ориентация конечной орбиты.

Связь между элементами конечной орбиты и линейными преобразованиями задаётся следующим образом. R -преобразование I типа используется для перехода от модельного начального фазового вектора к заданному начальному фазовому вектору:

$$R_0 = R(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0). \quad (4.15)$$

Это преобразование отвечает за согласование модельной круговой постановки с реальным положением и скоростью тела отправления, полученными из эфемерид.

R -преобразование II типа используется для задания формы конечной орбиты в плоскости. Его управляющий параметр ζ определяется из условия задания эксцентриситета e , а управляющий угол χ — из условия задания аргумента перицентра ω :

$$(e, \omega) \longrightarrow (\zeta, \chi) \longrightarrow R_{e\omega}. \quad (4.16)$$

При $e = 0$ аргумент перицентра вырождается, в этом случае плоская деформация, связанная с эксцентриситетом, отсутствует и ζ полагается равным нулю.

R -преобразование III типа используется для задания пространственной ориентации конечной орбиты. Его управляющий параметр j определяется из условия задания наклона i , а управляющий угол γ связан с контролем долготы восходящего узла:

$$(i, \Omega) \longrightarrow (j, \gamma) \longrightarrow R_{i\Omega}. \quad (4.17)$$

При $i = 0$ пространственное преобразование также становится вырожденным, и параметр j полагается равным нулю.

Итоговое преобразование начального вектора сопряжённых переменных записывается как композиция

$$R_{\Sigma} = R_{i\Omega} R_{e\omega} R_0. \quad (4.18)$$

Порядок сомножителей отражает порядок учёта геометрии задачи: сначала задаётся начальный фазовый вектор, затем форма конечной орбиты в плоскости, после чего учитывается пространственная ориентация орбиты. В соответствии с правилом преобразования сопряжённых переменных получаем

$$\mathbf{p}_{r0}^{\text{init}} = (R_{\Sigma}^T)^{-1} \hat{\mathbf{p}}_{r0}^{\text{pl}}, \quad \mathbf{p}_{v0}^{\text{init}} = (R_{\Sigma}^T)^{-1} \hat{\mathbf{p}}_{v0}^{\text{pl}}. \quad (4.19)$$

Тем самым начальный вектор расширенной системы принимает вид

$$\mathbf{y}_0^{\text{init}} = (\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{p}_{r0}^{\text{init}}, \mathbf{p}_{v0}^{\text{init}}). \quad (4.20)$$

Вместе с приближённой продолжительностью перелёта $\hat{T}$ он задаёт начальное приближение для последующего решения двухточечной краевой задачи.

Основные шаги алгоритма сведены в табл. 4.2.

С вычислительной точки зрения алгоритм имеет постоянную сложность относительно числа возможных дат старта и не требует решения краевой задачи на этапе построения начального приближения. Все величины вычисляются прямой подстановкой в конечные формулы и матрицы R -преобразований. Единственный дискретный выбор связан с проверкой не более трёх точек оптимальной дальности, соответствующих индексам $k = -1, 0, 1$. Поэтому трудоёмкость построения одного начального приближения можно рассматривать как $O(1)$, если допустимая точка оптимальной дальности заранее задана, алгоритм сводится к набору прямых вычислений без перебора.

Полученный вектор $\mathbf{y}_0^{\text{init}}$ не является точным решением краевой задачи. Однако он уже согласован с геометрией модельного многообразия, выбранной точкой КЛЮ, начальным фазовым вектором из эфемерид и основными элементами конечной орбиты. Поэтому последующее численное уточнение начинается не с произвольного начального вектора сопряжённых переменных, а с вектора, построенного по конечным формулам и линейным преобразованиям.

Таблица 4.2 — Алгоритм построения начального приближения.

Шаг	Действие	Опора
1	Получить из эфемерид начальный фазовый вектор и целевые элементы конечной орбиты.	Эфемеридная поставка
2	Перейти к безразмерным переменным при $\mu = 1$.	Нормировка главы 1
3	Определить $\kappa, e, i, \Omega, \bar{\omega}$ и вычислить $\omega = \bar{\omega} - \Omega$.	Геометрия конечной орбиты
4	По начальной синодической фазе выбрать кандидаты λ_k^* на КЛО для $k = -1, 0, 1$.	Точки оптимальной дальности главы 2
5	Выбрать допустимую точку оптимальной дальности и получить пару (λ^*, κ) .	КЛО и конечные формулы главы 2
6	Вычислить поправку к λ^* для компенсации деформации.	Коррекция витковой дальности главы 3
7	Вычислить $\hat{T}$, $\hat{J}$ и $\hat{\mathbf{z}}_0^{\text{pl}}$ в точке $(\lambda_{\text{corr}}, \kappa)$.	Аппроксимированное многообразие
8	Вычислить (ζ, χ) по e, ω и (j, γ) по i, Ω .	R -преобразования главы 3
9	Построить композицию $R_\Sigma = R_{i\Omega} R_{e\omega} R_0$.	Композиция R -преобразований
10	Преобразовать начальный вектор сопряжённых переменных и получить $\mathbf{y}_0^{\text{init}}$.	Расширенная система

4.3 Пример построения начального приближения для перелёта Земля–Марс

Рассмотрим применение описанного алгоритма на примере перелёта Земля–Марс. В этом примере результаты глав 2 и 3 собираются в одно начальное приближение для конкретной эфемеридной задачи. Использовались эфемериды JPL DE430 [121]. В качестве даты старта выбрана юлианская дата

$$t_0 = 2461193.0. \quad (4.21)$$

По эфемеридам определяются положение и скорость Земли в начальный момент времени, а также целевые элементы орбиты Марса. Затем выполняется переход к безразмерной постановке. В данном примере

$$DU = 1 \text{ а.е.} = 1.495979 \times 10^8 \text{ км}, \quad TU = 5.022643 \times 10^6 \text{ с} = 5.813244 \times 10^1 \text{ сут}, \quad (4.22)$$

и после нормировки гравитационный параметр центрального тела равен единице.

Начальный фазовый вектор в безразмерных переменных имеет вид

$$\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} -3.030750 \times 10^{-1} \\ -9.683082 \times 10^{-1} \\ 2.218031 \times 10^{-5} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 9.380035 \times 10^{-1} \\ -3.021758 \times 10^{-1} \\ 3.360727 \times 10^{-5} \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

Для выбранной даты старта начальная синодическая фаза составляет

$$\Psi_0 = 3.481030 \times 10^{-1} \quad (4.24)$$

в оборотах. По этой фазе выбирается точка оптимальной дальности на КЛО. В данном примере выбран индекс

$$k = 0. \quad (4.25)$$

До учёта коррекции витковой дальности получено

$$\lambda^* = 1.324331 \times 10^0. \quad (4.26)$$

После компенсации деформации, возникающей при R -преобразовании II типа, используется значение

$$\lambda_{\text{corr}} = 1.268512 \times 10^0. \quad (4.27)$$

Отношение радиусов модельных круговых орбит равно

$$\kappa = 1.523783 \times 10^0. \quad (4.28)$$

Таким образом, конечные формулы главы 2 применяются в точке $(\lambda_{\text{corr}}, \kappa)$.

Целевые элементы конечной орбиты Марса в рассматриваемый момент времени имеют вид

$$a = 1.523783 \times 10^0, \quad e = 9.336536 \times 10^{-2}, \quad i = 3.226036 \times 10^{-2}. \quad (4.29)$$

Для ориентации орбиты получены значения

$$\Omega = 8.640848 \times 10^{-1}, \quad \bar{\omega} = 5.865724 \times 10^0. \quad (4.30)$$

В используемой реализации углы R -преобразований задаются относительно начальной истинной долготы

$$L_0 = 4.409054 \times 10^0. \quad (4.31)$$

Поэтому для плоского преобразования используется относительный угол

$$\bar{\omega}_{\text{rel}} = \bar{\omega} - L_0 = 1.456670 \times 10^0, \quad (4.32)$$

а для пространственного преобразования

$$\Omega_{\text{rel}} = \Omega - L_0 = -3.544969 \times 10^0, \quad \gamma = \Omega_{\text{rel}}. \quad (4.33)$$

Эквивалентное приведённое к основному диапазону значение управляющего угла составляет

$$\gamma = 2.738216 \times 10^0. \quad (4.34)$$

По конечным формулам главы 3 вычисляются управляющие параметры

$$\begin{aligned} \zeta &= -9.950813 \times 10^{-2}, \quad \chi = 7.522721 \times 10^{-1}, \\ j &= -2.291710 \times 10^{-1}, \quad \gamma = -3.544969 \times 10^0. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Тем самым для рассматриваемого примера начальный вектор управляющих параметров принимает вид

$$\mathbf{q}_{\text{init}} = \begin{pmatrix} 1.268512 \times 10^0 \\ 1.523783 \times 10^0 \\ -9.950813 \times 10^{-2} \\ 7.522721 \times 10^{-1} \\ -2.291710 \times 10^{-1} \\ -3.544969 \times 10^0 \end{pmatrix}. \quad (4.36)$$

По конечным формулам главы 2 получаем модельный начальный вектор сопряжённых переменных

$$\hat{\mathbf{p}}_{r0}^{\text{pl}} = \begin{pmatrix} 1.982747 \times 10^{-2} \\ 1.198093 \times 10^{-3} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{p}}_{v0}^{\text{pl}} = \begin{pmatrix} 1.353337 \times 10^{-3} \\ 1.790549 \times 10^{-2} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.37)$$

После применения композиции R -преобразований получаем начальный вектор сопряжённых переменных для эфемеридной задачи:

$$\mathbf{p}_{r0}^{\text{init}} = \begin{pmatrix} -7.012121 \times 10^{-3} \\ -1.785764 \times 10^{-2} \\ -1.984265 \times 10^{-3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_{v0}^{\text{init}} = \begin{pmatrix} 1.747309 \times 10^{-2} \\ -4.626026 \times 10^{-3} \\ -3.796719 \times 10^{-3} \end{pmatrix}. \quad (4.38)$$

Основные скалярные величины для рассматриваемого примера приведены в табл. 4.3. Таблица разделяет целевые элементы конечной орбиты, управляющие параметры алгоритма и характеристики полученного начального приближения.

Для интерпретации роли управляющих параметров в рассматриваемом примере вычислим матрицу локальной чувствительности вектора

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}) = (\lambda, a, e, \bar{\omega}_{\text{rel}}, i, \Omega_{\text{mov}}).$$

Первая компонента вектора $\mathbf{G}$ определяется по накопленной угловой дальности построенной траектории. Угол $\bar{\omega}_{\text{rel}}$ отсчитывается относительно начальной истинной долготы, а Ω_{mov} задаёт положение линии узлов в подвижной системе, связанной с текущим нулевым направлением пространственного преобразования. Такая запись позволяет рассматривать влияние параметров на геометрические характеристики начального приближения без искусственной зависимости долготы узла от поворота базовой плоской экстремали.

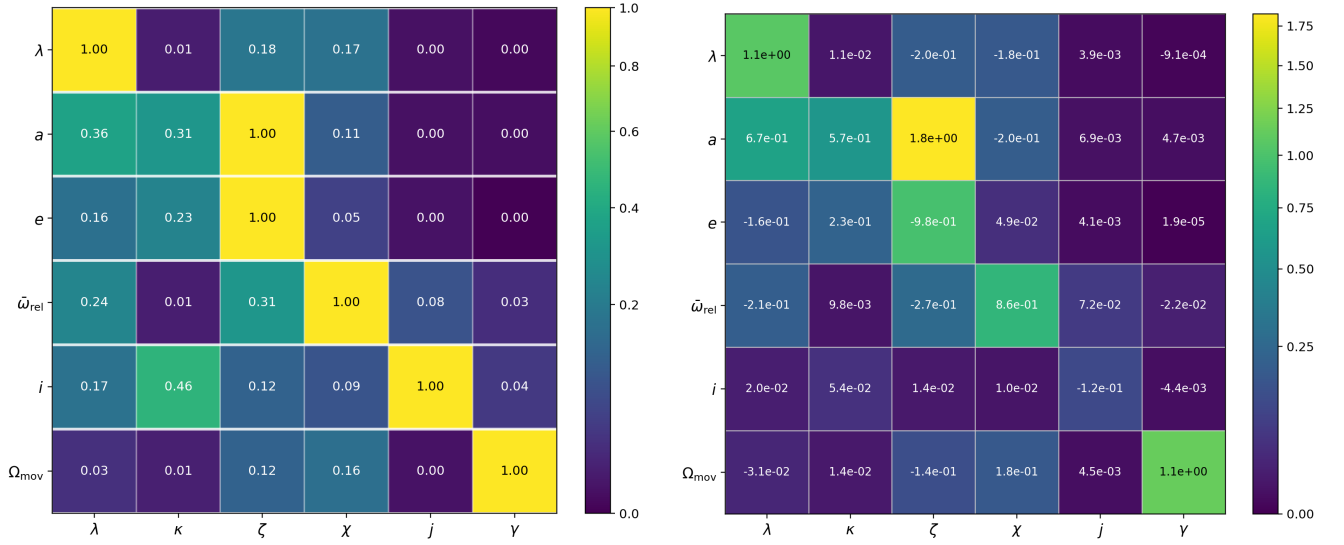
Из рис. 4.1 видно, что параметры (λ, κ) , (ζ, χ) и (j, γ) в целом отвечают за три слабо связанные группы характеристик начального приближения. Построенно нормированная матрица показывает относительную структуру влияния параметров внутри каждой строки, а матрица в исходном масштабе позволяет сопоставить абсолютные значения производных. Наиболее выраженные недиагональные элементы соответствуют побочным деформациям, возникающим при применении плоского R -преобразования II типа, пространственное R -преобразование при этом сохраняет выраженную локальную независимость. В табл. 4.4 приведены векторные величины: начальный фазовый вектор, модельный начальный вектор сопряжённых переменных, начальный вектор сопряжённых переменных после R -преобразований и уточнённый вектор после решения краевой задачи.

Начальный вектор расширенной системы, используемый далее как приближение для численного уточнения, имеет вид

$$\mathbf{y}_0^{\text{init}} = (\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{p}_{r0}^{\text{init}}, \mathbf{p}_{v0}^{\text{init}}). \quad (4.39)$$

Таблица 4.3 — Целевые элементы конечной орбиты и управляющие параметры начального приближения для перелёта Земля–Марс.

Величина	Значение
Целевые элементы конечной орбиты	
a	1.523783×10^0
e	9.336536×10^{-2}
i , рад	3.226036×10^{-2}
Ω , рад	8.640848×10^{-1}
$\bar{\omega}$, рад	5.865724×10^0
L_0 , рад	4.409054×10^0
$\bar{\omega}_{\text{rel}}$, рад	1.456670×10^0
Ω_{rel} , рад	-3.544969×10^0
Управляющие параметры	
λ_{corr}	1.268512×10^0
κ	1.523783×10^0
ζ	-9.950813×10^{-2}
χ , рад	7.522721×10^{-1}
j	-2.291710×10^{-1}
γ , рад	-3.544969×10^0
Характеристики начального приближения	
$\hat{T}$, сут	6.361619×10^2
$\hat{J}$	1.324138×10^{-3}
m_p , кг	4.543364×10^1
$\ \Delta \mathbf{r}_f\ $, км	6.538725×10^7
$\ \Delta \mathbf{v}_f\ $, км/с	8.880610×10^0
T_{opt} , сут	6.538369×10^2
J_{opt}	1.796705×10^{-3}
$m_{p,\text{opt}}$, кг	5.903983×10^1
$\ \Delta \mathbf{r}_f\ _{\text{opt}}$, км	8.074021×10^{-4}
$\ \Delta \mathbf{v}_f\ _{\text{opt}}$, км/с	9.409393×10^{-11}



а) Построчно нормированная матрица

б) Матрица в исходном масштабе

Рисунок 4.1 — Матрица чувствительности в точке начального приближения для перелёта Земля–Марс. Слева приведены значения $|\partial G_i / \partial q_j|$, нормированные на максимум в соответствующей строке, справа та же матрица показана в исходном масштабе.

Таблица 4.4 — Начальный вектор расширенной системы для примера перелёта Земля–Марс.

Величина	Значение
$\mathbf{r}_0$	$(-3.030750 \times 10^{-1}, -9.683082 \times 10^{-1}, 2.218031 \times 10^{-5})^T$
$\mathbf{v}_0$	$(9.380035 \times 10^{-1}, -3.021758 \times 10^{-1}, 3.360727 \times 10^{-5})^T$
$\hat{\mathbf{p}}_{r0}^{pl}$	$(1.982747 \times 10^{-2}, 1.198093 \times 10^{-3}, 0)^T$
$\hat{\mathbf{p}}_{v0}^{pl}$	$(1.353337 \times 10^{-3}, 1.790549 \times 10^{-2}, 0)^T$
$\mathbf{p}_{r0}^{init}$	$(-7.012121 \times 10^{-3}, -1.785764 \times 10^{-2}, -1.984265 \times 10^{-3})^T$
$\mathbf{p}_{v0}^{init}$	$(1.747309 \times 10^{-2}, -4.626026 \times 10^{-3}, -3.796719 \times 10^{-3})^T$
$\mathbf{p}_{r0}^{opt}$	$(-7.840130 \times 10^{-3}, -2.028390 \times 10^{-2}, -1.991360 \times 10^{-3})^T$
$\mathbf{p}_{v0}^{opt}$	$(2.053753 \times 10^{-2}, -5.524200 \times 10^{-3}, -4.491670 \times 10^{-3})^T$

После решения краевой задачи начальные значения сопряжённых переменных переходят к значениям $\mathbf{p}_{r0}^{\text{opt}}$ и $\mathbf{p}_{v0}^{\text{opt}}$, приведённым в табл. 4.4.

На рис. 4.2 показано сравнение траектории, полученной из построенного начального приближения, и траектории после численного уточнения краевой задачи. Видно, что начальное приближение воспроизводит общий характер многовиткового перелёта и оказывается достаточно близким к уточнённой траектории для последующего применения метода пристрелки.

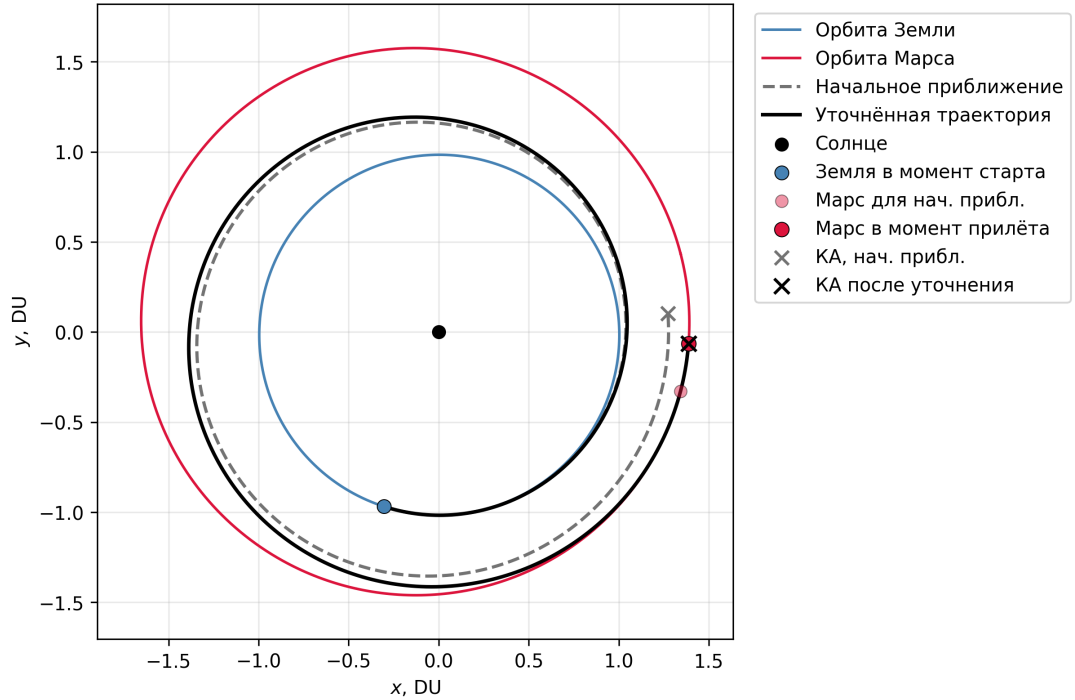


Рисунок 4.2 — Сравнение начального приближения и уточнённой траектории для перелёта Земля–Марс.

Таким образом, в рассматриваемом примере начальное приближение строится без предварительного решения двухточечной краевой задачи. Точка КЛО задаёт модельную основу перелёта, конечные формулы главы 2 дают начальный вектор сопряжённых переменных, а R -преобразования главы 3 согласуют это приближение с эфемеридным начальным фазовым вектором и элементами конечной орбиты. Последующее численное уточнение уменьшает невязки правого конца с 6.538725×10^7 км и 8.880610×10^0 км/с для начального приближения до 8.074021×10^{-4} км и 9.409393×10^{-11} км/с после уточнения.

4.4 Оценка качества начальных приближений для перелётов Земля–Марс и Земля–Венера

В предыдущем разделе был рассмотрен один пример построения начального приближения для перелёта Земля–Марс. Для оценки устойчивости алгоритма используется представительная последовательность эфемеридных конфигураций. В настоящем разделе такая проверка выполняется для перелётов Земля–Марс и Земля–Венера.

Для выбора диапазона дат старта используется понятие периода великих противостояний. В случае Земли и Марса этим термином в астрономии называют промежуток времени между двумя последовательными сближениями планет до минимального возможного расстояния. При этом обе планеты располагаются по одну сторону от Солнца: Земля находится вблизи афелия, а Марс — вблизи перигелия. Такая конфигурация повторяется через 17 лет. Следуя этому определению, для пары Земля–планета будем использовать период великих противостояний как наименьший промежуток времени, через который повторяется конфигурация двух планет в гелиоцентрической системе координат [8].

Значения периодов, используемые в настоящем разделе, приведены в табл. 4.5. Здесь T_{syn} — синодический период планеты относительно Земли, T_{sid} — сидерический период целевой планеты, а T_{ca} — период великих противостояний.

Таблица 4.5 — Синодические, сидерические периоды и периоды великих противостояний для перелётов Земля–Венера и Земля–Марс.

Целевая планета	T_{syn} , лет	T_{sid} , лет	T_{ca} , лет
Венера	1.599	0.615	8
Марс	2.135	1.881	17

В численном эксперименте ошибки начального приближения рассчитывались для каждой даты старта на периодах великих противостояний. Такой выбор задаёт один полный цикл повторения взаимной конфигурации планет в гелиоцентрической системе координат и позволяет оценить качество алгоритма не только для отдельного примера, но и для широкого набора геометрий перелёта.

В качестве меры ошибки используется средняя абсолютная ошибка

$$\text{MAE} = \frac{1}{N_{\text{samp}}} \sum_{r=1}^{N_{\text{samp}}} |y_r^{\text{init}} - y_r^{\text{target}}|, \quad (4.40)$$

где y_r^{init} — значение характеристики конечной орбиты или траектории, полученное после интегрирования начального приближения, а y_r^{target} — соответствующее целевое значение. Для угловых величин ошибка вычислялась с учётом периодичности угла.

Результаты расчётов приведены в табл. 4.6. В таблице отдельно представлены ошибки для параметров конечной орбиты, угловой дальности, функционала и продолжительности перелёта. Эти величины характеризуют качество начального приближения до последующего численного уточнения краевой задачи.

Таблица 4.6 — Средняя абсолютная ошибка начального приближения для перелётов Земля–Марс и Земля–Венера.

Целевой параметр	Перелёт Земля–Марс	Перелёт Земля–Венера
Эксцентриситет e	3.00×10^{-3}	2.00×10^{-2}
Наклонение i	$4.00 \times 10^{-3}^\circ$	$2.00 \times 10^{-1}^\circ$
ДВУ Ω	$4.00 \times 10^0^\circ$	$2.00 \times 10^0^\circ$
Аргумент перицентра ω	$1.10 \times 10^1^\circ$	$2.60 \times 10^1^\circ$
Угловая дальность φ	$3.00 \times 10^0^\circ$	$7.00 \times 10^{-1}^\circ$
Большая полуось a	6.00×10^{-2} а.е.	4.00×10^{-3} а.е.
Функционал J	8.00×10^{-2} м ² /с ³	3.00×10^{-3} м ² /с ³
Продолжительность перелёта T	8.50×10^0 сут.	7.00×10^{-1} сут.

Из табл. 4.6 видно, что построенное начальное приближение сохраняет приемлемую точность на всём выбранном диапазоне дат старта. Для перелёта Земля–Марс наибольшие ошибки возникают в ориентации линии апсид и в большой полуоси конечной орбиты. Это связано с более сложной геометрией перелёта к внешней планете и с большей чувствительностью многовитковой траектории к выбору точки оптимальной дальности. При этом ошибка продолжительности перелёта остаётся порядка нескольких суток на периоде в 17 лет.

Для перелёта Земля–Венера ошибки по большой полуоси, угловой дальности, функционалу и продолжительности перелёта заметно меньше. Вместе

с тем ошибка аргумента перицентра оказывается больше, чем в марсианском случае. Это указывает на то, что различные элементы конечной орбиты имеют разную чувствительность к выбранным управляющим параметрам, а качество начального приближения следует оценивать не по одной величине, а по совокупности характеристик.

Полученные ошибки не означают, что конечные формулы должны непосредственно заменять решение краевой задачи. Их основная роль состоит в построении начального вектора расширенной системы, близкого к требуемому решению. При этом управляющие параметры

$$\mathbf{q} = (\lambda, \kappa, \zeta, \chi, j, \gamma) \quad (4.41)$$

могут использоваться не только для однократного построения начального приближения, но и как переменные последующего численного уточнения. В этом случае вместо прямой оптимизации по шести начальным значениям сопряжённых переменных задача решается в параметрах, имеющих ясный баллистический смысл: витковая дальность, отношение радиусов модельных орбит и параметры линейных преобразований.

Для проверки такого подхода была выполнена дополнительная оптимизация в параметрах $\mathbf{q}$. Начальное значение $\mathbf{q}_{\text{init}}$ выбиралось по описанному выше алгоритму, после чего параметры уточнялись так, чтобы уменьшить невязки целевых элементов конечной орбиты и угловой дальности. Полученные невязки приведены в табл. 4.7.

Таблица 4.7 — Невязки целевых параметров после оптимизации в параметрах начального приближения.

Целевой параметр	Перелёт Земля–Марс	Перелёт Земля–Венера
Эксцентриситет e	3.90×10^{-15}	1.90×10^{-12}
Наклонение i	$2.10 \times 10^{-14}^\circ$	$2.90 \times 10^{-13}^\circ$
ДВУ Ω	$5.70 \times 10^{-14}^\circ$	$4.70 \times 10^{-13}^\circ$
Аргумент перицентра ω	$3.00 \times 10^{-13}^\circ$	$1.20 \times 10^{-13}^\circ$
Угловая дальность φ	$1.70 \times 10^{-13}^\circ$	$3.30 \times 10^{-16}^\circ$
Большая полуось a	1.00×10^{-14} а.е.	6.30×10^{-13} а.е.

Табл. 4.7 показывает, что после уточнения в параметрах начального приближения целевые параметры конечной орбиты восстанавливаются практически до уровня численной точности. Этот результат имеет два следствия.

Во-первых, он показывает, что управляющие параметры $\mathbf{q}$ задают не только грубую эвристику, но и пригодную локальную параметризацию окрестности решения. Во-вторых, он позволяет использовать конечные формулы как первый этап автоматического построения решения: формулы дают начальное значение $\mathbf{q}_{\text{init}}$, а последующее уточнение выполняется уже в маломерном пространстве физически интерпретируемых параметров.

Таким образом, численная проверка на периодах великих противостояний показывает, что алгоритм построения начального приближения устойчиво работает для двух характерных межпланетных перелётов: к внешней планете и к внутренней планете. Ошибки табл. 4.6 характеризуют качество непосредственного применения конечных формул и R -преобразований, а невязки табл. 4.7 показывают, что та же параметризация может быть использована как основа для дальнейшего численного уточнения. Поэтому предложенный алгоритм не заменяет решение двухточечной краевой задачи, но задаёт начальный вектор расширенной системы и набор управляющих параметров, уже согласованных с основной геометрией эфемеридной задачи.

4.5 Сравнение с продолжением по гравитационному параметру

В предыдущих разделах был описан алгоритм построения начального приближения с использованием управляющих параметров. После построения начального приближения эти же параметры используются как переменные уточнения. Тем самым решение краевой задачи сводится к решению системы невязок по вектору управляющих параметров $\mathbf{q}$.

В расчётах уточнение выполнялось методом Левенберга–Марквардта [122; 123]. В используемой реализации решалась задача

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}) = 0 \quad (4.42)$$

где $\mathbf{F}$ — вектор невязок правого конца, включающий невязки по элементам конечной орбиты и витковой дальности.

Этот подход сравнивается с методом продолжения по гравитационному параметру. Такой метод относится к классическим способам построения решений краевых задач для перелётов с малой тягой и близок по идее к методам

продолжения, используемым в работах В.Г. Петухова [124]. Сначала напомним общий вид метода продолжения по параметру. Пусть

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}_0) = 0 \quad (4.43)$$

— система нелинейных уравнений двухточечной краевой задачи, где $\mathbf{z}_0$ — начальный вектор сопряжённых переменных, вместе с граничными условиями однозначно задающий траекторию. Пусть $\mathbf{z}_0(0)$ — начальное приближение и

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}_0(0)) = \mathbf{b}. \quad (4.44)$$

Вводится однопараметрическое семейство $\mathbf{z}_0(\tau)$, $\tau \in [0,1]$, такое что

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}_0(\tau)) = (1 - \tau)\mathbf{b}. \quad (4.45)$$

Тогда при $\tau = 1$ получаем

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}_0(1)) = 0, \quad (4.46)$$

то есть $\mathbf{z}_0(1)$ является начальным вектором сопряжённых переменных для решения исходной краевой задачи. Дифференцируя условие продолжения по τ , получаем задачу Коши

$$\frac{d\mathbf{z}_0}{d\tau} = - \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{z}_0} \right)^{-1} \mathbf{b}, \quad \mathbf{z}_0(0) = \mathbf{z}_0^{\text{init}}. \quad (4.47)$$

Таким образом, исходная система нелинейных уравнений заменяется интегрированием задачи Коши по параметру продолжения.

В модификации с фиксированной угловой дальностью искусственно изменяется гравитационный параметр центрального тела. Вводится функция

$$\bar{\mu}(\tau) = \mu_0 + (\mu - \mu_0)\tau, \quad \tau \in [0,1], \quad (4.48)$$

где μ — реальное значение гравитационного параметра, а μ_0 выбирается так, чтобы пассивное движение по начальной орбите соответствовало заданному числу полных оборотов N_{br} . Пусть θ_0 — истинная аномалия точки старта на начальной орбите, φ — угол между $\mathbf{r}_0$ и проекцией $\mathbf{r}_f$ на плоскость начальной орбиты, a_0 — большая полуось начальной орбиты. Тогда

$$\theta_f = \theta_0 + \varphi. \quad (4.49)$$

Средние аномалии M_0 и M_f вычисляются через эксцентрическую аномалию E :

$$M = E - e \sin E, \quad (4.50)$$

$$\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}. \quad (4.51)$$

Значение μ_0 , соответствующее N_{br} полным оборотам за время перелёта $t_f - t_0$, задаётся формулой

$$\mu_0 = a_0^3 \left(\frac{M_f + 2\pi N_{\text{br}} - M_0}{t_f - t_0} \right)^2. \quad (4.52)$$

Тем самым номер N_{br} задаёт ветвь продолжения.

Для задачи встречи вектор невязок при продолжении по гравитационному параметру имеет вид

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}_0, \tau) = \begin{pmatrix} \mathbf{r}(t_f) - \mathbf{r}_f \\ \mathbf{v}(t_f) - \mathbf{v}_f \sqrt{\frac{\bar{\mu}(\tau)}{\mu}} \end{pmatrix}. \quad (4.53)$$

Здесь масштабирование скорости используется потому, что при изменении μ форма и размеры кеплеровой орбиты должны оставаться инвариантными.

Для энергетически оптимальной задачи с идеально регулируемой тягой и постоянной доступной мощностью используем первую форму уравнений оптимального движения:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \quad (4.54)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{\bar{\mu}(\tau)}{\mu} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{p}_v, \quad (4.55)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_r = -\frac{\bar{\mu}(\tau)}{\mu} \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{r}^2} \mathbf{p}_v, \quad (4.56)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_v = -\mathbf{p}_r. \quad (4.57)$$

Неизвестный начальный вектор сопряжённых переменных в методе продолжения запишем в виде

$$\mathbf{z}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{r0} \\ \mathbf{p}_{v0} \end{pmatrix}. \quad (4.58)$$

Задача Коши метода продолжения для $\mathbf{z}_0(\tau)$ имеет вид

$$\frac{d\mathbf{z}_0}{d\tau} = - \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{z}_0} \right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \tau}, \quad \mathbf{z}_0(0) = \mathbf{z}_0^{\text{init}}. \quad (4.59)$$

Матрица $\partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{z}_0$ и вектор $\partial \mathbf{F} / \partial \tau$ находятся из совместного интегрирования уравнений движения и уравнений в вариациях.

Для производных по $\mathbf{z}_0 = (\mathbf{p}_{r0}, \mathbf{p}_{v0})$ используются уравнения

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{z}_0} \right) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{z}_0}, \quad (4.60)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{z}_0} \right) = \frac{\bar{\mu}(\tau)}{\mu} \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{r}^2} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{z}_0} + \frac{\partial \mathbf{p}_v}{\partial \mathbf{z}_0}, \quad (4.61)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{p}_r}{\partial \mathbf{z}_0} \right) = -\frac{\bar{\mu}(\tau)}{\mu} \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{r}^2} \mathbf{p}_v \right) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{z}_0} + \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{r}^2} \frac{\partial \mathbf{p}_v}{\partial \mathbf{z}_0} \right], \quad (4.62)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{p}_v}{\partial \mathbf{z}_0} \right) = -\frac{\partial \mathbf{p}_r}{\partial \mathbf{z}_0}. \quad (4.63)$$

Для производных по параметру продолжения τ имеем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tau} \right) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau}, \quad (4.64)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} \right) = \left(1 - \frac{\mu_0}{\mu} \right) \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\bar{\mu}(\tau)}{\mu} \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{r}^2} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathbf{p}_v}{\partial \tau}, \quad (4.65)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{p}_r}{\partial \tau} \right) = -\left(1 - \frac{\mu_0}{\mu} \right) \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{r}^2} \mathbf{p}_v - \frac{\bar{\mu}(\tau)}{\mu} \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{r}^2} \mathbf{p}_v \right) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{r}^2} \frac{\partial \mathbf{p}_v}{\partial \tau} \right], \quad (4.66)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{p}_v}{\partial \tau} \right) = -\frac{\partial \mathbf{p}_r}{\partial \tau}. \quad (4.67)$$

Начальные условия для основной системы задаются как

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0 \sqrt{\frac{\bar{\mu}(\tau)}{\mu}}, \quad (4.68)$$

$$\mathbf{p}_r(t_0) = \mathbf{p}_{r0}, \quad \mathbf{p}_v(t_0) = \mathbf{p}_{v0}. \quad (4.69)$$

Для уравнений в вариациях по $\mathbf{z}_0 = (\mathbf{p}_{r0}, \mathbf{p}_{v0})$ начальные условия имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{r}(t_0)}{\partial \mathbf{p}_{r0}} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}(t_0)}{\partial \mathbf{p}_{r0}} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{p}_r(t_0)}{\partial \mathbf{p}_{r0}} = I_3, \quad \frac{\partial \mathbf{p}_v(t_0)}{\partial \mathbf{p}_{r0}} = 0, \quad (4.70)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}(t_0)}{\partial \mathbf{p}_{v0}} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}(t_0)}{\partial \mathbf{p}_{v0}} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{p}_r(t_0)}{\partial \mathbf{p}_{v0}} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{p}_v(t_0)}{\partial \mathbf{p}_{v0}} = I_3. \quad (4.71)$$

Для производных по τ :

$$\frac{\partial \mathbf{r}(t_0)}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}(t_0)}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\bar{\mu}(\tau)}} \left(1 - \frac{\mu_0}{\mu} \right) \mathbf{v}_0, \quad (4.72)$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}_r(t_0)}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{p}_v(t_0)}{\partial \tau} = 0. \quad (4.73)$$

После интегрирования расширенной системы до t_f вычисляются

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{z}_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}(t_f)}{\partial \mathbf{p}_{r0}} & \frac{\partial \mathbf{r}(t_f)}{\partial \mathbf{p}_{v0}} \\ \frac{\partial \mathbf{v}(t_f)}{\partial \mathbf{p}_{r0}} & \frac{\partial \mathbf{v}(t_f)}{\partial \mathbf{p}_{v0}} \end{pmatrix}, \quad (4.74)$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \tau} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}(t_f)}{\partial \tau} \\ \frac{\partial \mathbf{v}(t_f)}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\bar{\mu}(\tau)}} \left(1 - \frac{\mu_0}{\mu} \right) \mathbf{v}_f \end{pmatrix}. \quad (4.75)$$

Так задаётся дифференциальное уравнение для $\mathbf{z}_0(\tau)$. При $\tau = 1$ получается решение исходной задачи с реальным значением гравитационного параметра μ .

В вычислительном эксперименте для каждой даты старта метод продолжения по гравитационному параметру запускался для нескольких значений N_{br} . Для сравнения выбиралось лучшее найденное решение. Это необходимо, поскольку N_{br} определяет ветвь продолжения, а заранее заданное значение N_{br} не является частью исходной постановки задачи баллистического проектирования.

На рис. 4.3 показаны пути численного решения для одного расчётного примера. Верхняя панель соответствует пути предлагаемого метода в пространстве управляющих параметров $\mathbf{q}$. Средняя панель показывает индуцированный этим изменением путь начального вектора сопряжённых переменных. Нижняя панель соответствует пути начального вектора сопряжённых переменных при продолжении по гравитационному параметру.

Из рис. 4.3 видно, что продолжение по гравитационному параметру задаёт гладкий путь по параметру τ , тогда как предлагаемый метод изменяет управляющие параметры итерационно при решении системы невязок. При этом переменные $\mathbf{q}$ имеют непосредственную баллистическую интерпретацию: изменение λ и $\mathbf{k}$ соответствует переходу по аппроксимированному модельному многообразию, а изменение ζ, χ, j, γ соответствует уточнению параметров R -преобразований.

Сравнение проводилось на сетке из ста дат старта для перелёта к Марсу с шагом в 15 дней начиная с даты 2026.01.01. В корректной реализации оба метода доводят невязки правого конца до уровня машинной точности, поэтому в таблице качества приведены число расчётов и доля успешных завершений.

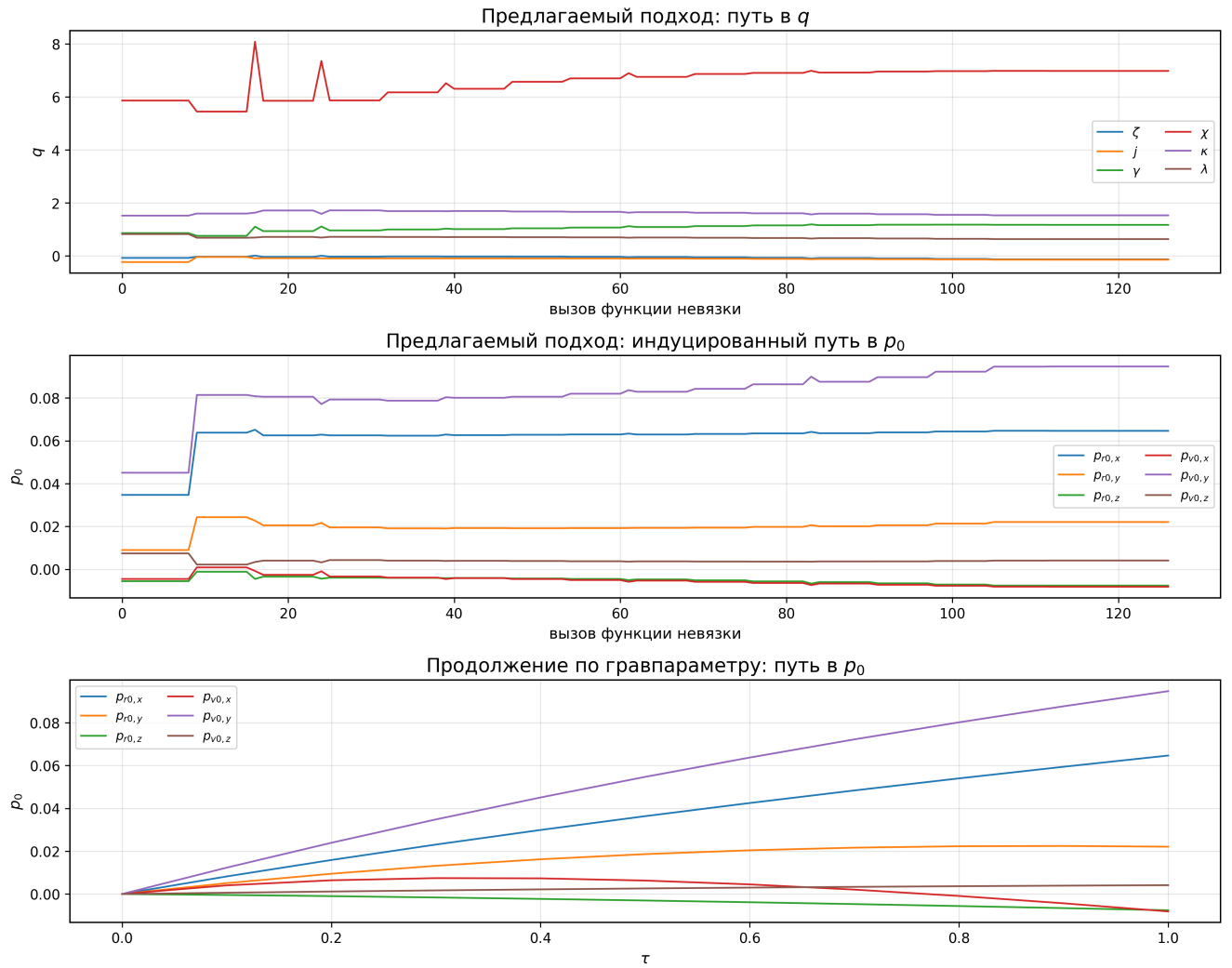


Рисунок 4.3 — Сравнение путей численного решения: путь предлагаемого метода в пространстве управляющих параметров $\mathbf{q}$, индуцированный путь начального вектора сопряжённых переменных и путь начального вектора сопряжённых переменных при продолжении по гравитационному параметру.

Таблица 4.8 — Сводное сравнение успешности расчётов на сетке дат старта.

Метод	Число расчётов	Доля успешных
Предлагаемый подход	100	100%
Продолжение по μ	100	100%

В табл. 4.9 приведены основные характеристики вычислительных затрат. Вычисления выполнялись на одном процессоре с использованием языка Python. Для предлагаемого подхода указано среднее число интегрирований при уточнении $\mathbf{q}$. Для продолжения по гравитационному параметру дополнительно указано среднее число перебранных ветвей N_{br} .

Таблица 4.9 — Сводное сравнение вычислительных затрат на сетке дат старта.

Метод	Среднее время, с	Среднее число интегрирований	Среднее число проверенных ветвей
Предлагаемый подход	6.36×10^{-1}	7.03×10^1	—
Продолжение по μ	1.89×10^0	4.30×10^1	3.80×10^0

В рассматриваемой серии расчётов продолжение по гравитационному параметру успешно находило решение для каждой даты старта, однако требовало дополнительного выбора ветви. Лучшая ветвь менялась по сетке дат старта: для части дат выбиралось $N_{\text{br}} = 1$, для части — $N_{\text{br}} = 0$. Это показывает, что номер ветви не является заранее известным параметром в массовом проектном расчёте.

Таким образом, проведённое сравнение показывает, что оба подхода применимы для уточнения траекторий в задаче встречи. Отличие предлагаемого подхода состоит в том, что уточнение выполняется непосредственно в пространстве управляющих параметров $\mathbf{q}$, связанных с конечными формулами и R -преобразованиями. Поэтому метод не требует отдельного задания номера ветви продолжения и является более прямым способом перехода от аналитического начального приближения к численно уточнённой траектории.

4.6 Постановки задачи с дополнительным импульсом скорости

В предыдущих разделах начальное приближение строилось для задачи встречи, в которой начальный фазовый вектор космического аппарата совпадает с фазовым вектором тела отправления. В прикладном баллистическом проектировании это ограничение не всегда выполняется: разгонный блок или предварительный участок выведения может сообщать аппарату дополнительный импульс скорости в начальный момент времени. Поэтому рассмотрим обобщение постановки, в котором начальная скорость аппарата имеет вид

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_\delta. \quad (4.76)$$

Здесь $\mathbf{v}_C$ обозначает скорость тела отправления в выбранной модельной или эфемеридной постановке, а $\mathbf{v}_\delta$ — вектор дополнительного импульса скорости.

Величину

$$v_\delta = \|\mathbf{v}_\delta\| \quad (4.77)$$

будем называть модулем дополнительного импульса скорости.

При ненулевом $\mathbf{v}_\delta$ естественно возникают три близкие, но различные постановки краевой задачи. Они отличаются тем, какие компоненты начальной скорости считаются заданными, а какие могут выбираться в процессе оптимизации.

В первой постановке вектор дополнительного импульса скорости фиксирован:

$$\mathbf{v}_\delta = \mathbf{v}_\delta^*. \quad (4.78)$$

Тогда начальная скорость полностью задана, и дополнительное условие трансверсальности по направлению дополнительного импульса скорости не возникает. Эта постановка является наиболее простой с точки зрения численного продолжения: для каждого выбранного значения $\mathbf{v}_\delta^*$ решается обычная задача встречи с фиксированным начальным фазовым вектором.

Во второй постановке фиксируется только модуль дополнительного импульса скорости:

$$\|\mathbf{v}_\delta\| = v_\delta^*, \quad (4.79)$$

а направление $\mathbf{v}_\delta$ должно быть выбрано оптимально. В этом случае допустимые вариации начальной скорости лежат в касательном пространстве к окружности или сфере постоянного v_δ . Поэтому вектор $\mathbf{p}_v(t_0)$ должен быть направлен по нормали к этой поверхности:

$$\mathbf{p}_v(t_0) \parallel \mathbf{v}_\delta. \quad (4.80)$$

В плоском случае это условие можно записать в виде

$$p_{vy}(t_0)v_{\delta x} - p_{vx}(t_0)v_{\delta y} = 0. \quad (4.81)$$

Именно эта постановка соответствует поиску оптимального направления дополнительного импульса скорости при заданном значении его модуля.

В третьей постановке вектор $\mathbf{v}_\delta$ считается свободным:

$$\mathbf{v}_\delta \in \mathbb{R}^n. \quad (4.82)$$

Так как начальная скорость в этом случае не фиксируется, условие трансверсальности принимает вид

$$\mathbf{p}_v(t_0) = \mathbf{0}. \quad (4.83)$$

Эта постановка задаёт предельный случай, в котором дополнительный импульс скорости выбирается самой задачей оптимизации.

Связь между тремя постановками поясняется через поверхность значений функционала, построенную по решениям первой задачи при разных фиксированных компонентах $\mathbf{v}_\delta$. Пусть

$$J_1(v_{\delta x}, v_{\delta y}) \quad (4.84)$$

обозначает значение функционала для задачи с фиксированным вектором дополнительного импульса скорости. Тогда задача с фиксированным модулем v_δ соответствует поиску минимума этой поверхности на окружности

$$v_{\delta x}^2 + v_{\delta y}^2 = (v_\delta^*)^2. \quad (4.85)$$

При изменении v_δ^* такие точки формируют кривую локальных минимумов. Свободная постановка соответствует точке наименьшего значения функционала на построенной поверхности J_1 .

Рис. 4.4 показывает, что задача с фиксированным модулем дополнительного импульса скорости не является независимой от задачи с фиксированным вектором $\mathbf{v}_\delta$. Её можно рассматривать как ограниченную минимизацию по поверхности $J_1(v_{\delta x}, v_{\delta y})$. При этом решение свободной задачи задаёт естественную предельную точку: если ограничение на величину v_δ не накладывается, оптимизация выбирает не только направление, но и сам модуль дополнительного импульса скорости.

Для дальнейшего использования в баллистическом проектировании важна не только структура поверхности по компонентам дополнительного импульса скорости, но и зависимость оптимального значения v_δ от витковой дальности. Поэтому дополнительно рассмотрим семейство задач, в котором для каждой витковой дальности λ и величины v_δ решается задача с фиксированным модулем дополнительного импульса скорости. Полученная поверхность функционала позволяет определить кривую минимумов по v_δ .

Из рис. 4.5 видно, что оптимальная величина дополнительного импульса скорости меняется сравнительно плавно при изменении витковой дальности.

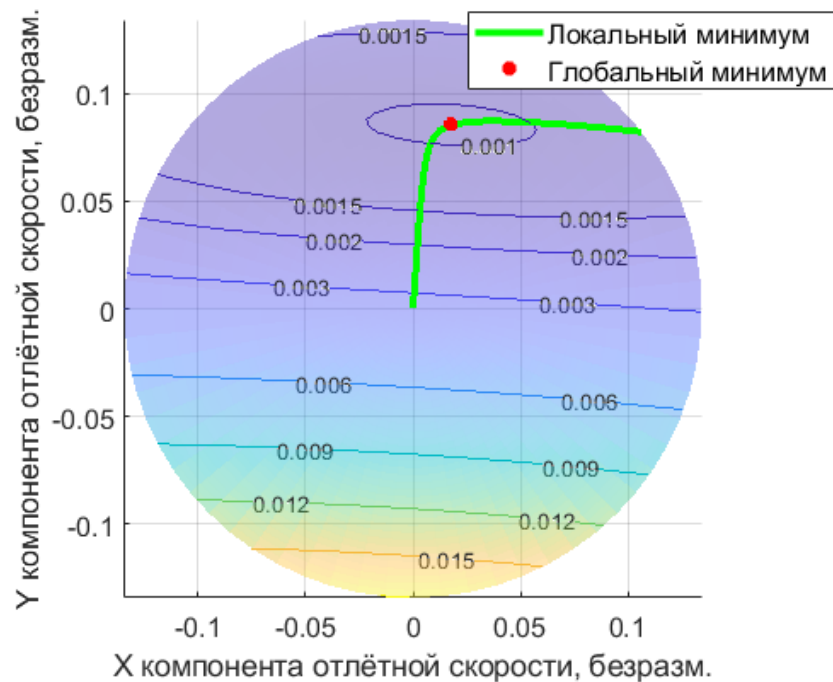


Рисунок 4.4 — Изолинии функционала на плоскости компонент дополнительного импульса скорости. Зелёной линией показана кривая локальных минимумов для задачи с фиксированным модулем дополнительного импульса скорости, красной точкой — решение задачи со свободным дополнительным импульсом скорости.

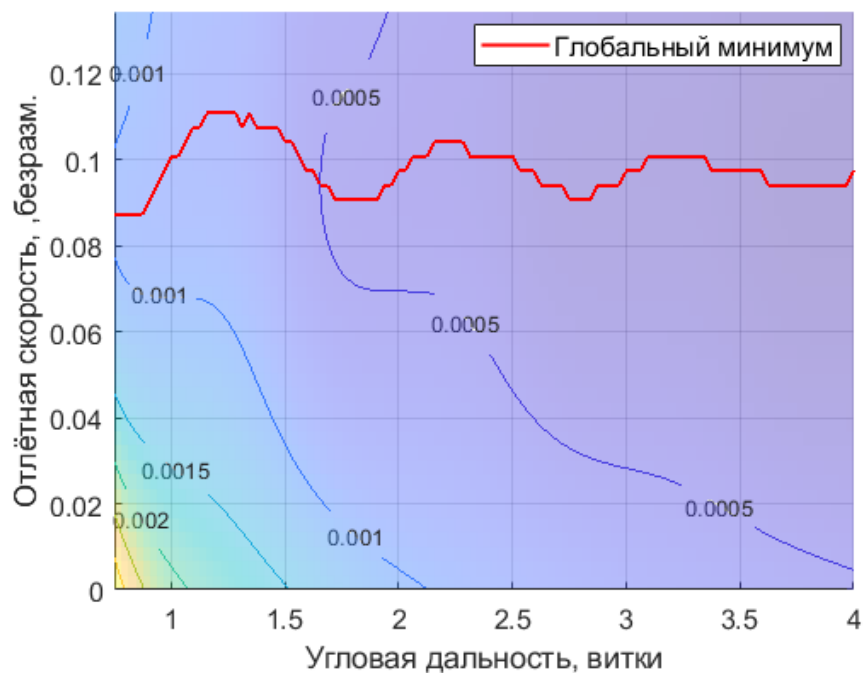


Рисунок 4.5 — Изолинии функционала на плоскости витковой дальности и модуля дополнительного импульса скорости. Красной линией показана кривая минимумов по v_δ при фиксированной витковой дальности.

При этом кривая минимумов проходит в области умеренных значений v_δ , а не при $v_\delta = 0$. Это подтверждает, что постановка с дополнительным импульсом скорости не является малой технической поправкой к исходной задаче встречи: она меняет положение локально наилучшего решения в пространстве параметров и должна учитываться отдельно.

Для использования в алгоритме начального приближения наиболее важна не вся поверхность J_1 , а возможность связать исходную задачу встречи, в которой $\mathbf{v}_\delta = \mathbf{0}$, и задачу с ненулевым дополнительным импульсом скорости. В качестве рабочей схемы используется однопараметрическое продолжение по модулю дополнительного импульса скорости. Пусть $\tau_1 \in [0,1]$ — параметр продолжения, а $v_{\delta, \max}$ — заданное максимально допустимое значение модуля дополнительного импульса скорости. Тогда начальная скорость задаётся в виде

$$\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_C(t_0) + \tau_1 v_{\delta, \max} \mathbf{n}_\delta(\tau_1), \quad \mathbf{n}_\delta(\tau_1) = \frac{\mathbf{p}_{v0}(\tau_1)}{\|\mathbf{p}_{v0}(\tau_1)\|}, \quad \tau_1 \in [0,1]. \quad (4.86)$$

На каждом шаге такого продолжения направление дополнительного импульса скорости выбирается согласованно с условием трансверсальности для постановки с фиксированным модулем v_δ . Начальное значение $\mathbf{z}_0(0)$ берётся из решения задачи встречи без дополнительного импульса скорости, построенного по конечным формулам и R -преобразованиям.

Если $\mathbf{F}(\mathbf{z}_0, \tau_1) = \mathbf{0}$ обозначает систему невязок краевой задачи с учётом текущего значения параметра продолжения, то локальное продолжение начального вектора расширенной системы записывается как

$$\frac{d\mathbf{z}_0}{d\tau_1} = - \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{z}_0} \right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \tau_1}. \quad (4.87)$$

Продолжение выполняется до достижения требуемого или максимально допустимого значения модуля дополнительного импульса скорости. Использование такой схемы позволяет перейти от гладкого ИРТ-приближения к постановке с ненулевым дополнительным импульсом скорости без повторного независимого поиска решения краевой задачи.

Тем самым постановки с дополнительным импульсом скорости образуют надстройку над алгоритмом, описанным в предыдущих разделах. Конечные формулы и R -преобразования дают начальный вектор расширенной системы для случая $\mathbf{v}_\delta = \mathbf{0}$, после чего продолжение по $\mathbf{v}_\delta$ позволяет перейти к решению с оптимальным дополнительным импульсом скорости. Такой переход важен для

прикладных миссий, где межпланетный участок с непрерывной тягой начинается не с точного фазового вектора тела отправления, а после предварительного выведения аппарата на начальную траекторию межпланетного перелёта.

4.7 Применение алгоритма при проектировании миссии Земля–Венера

Алгоритм построения начального приближения, его проверка для перелётов Земля–Марс и Земля–Венера, а также постановки задачи с дополнительным импульсом скорости объединяются в прикладную схему проектирования межпланетной миссии. В качестве примера рассматривается перелёт Земля–Венера для малого космического аппарата с электрореактивной двигательной установкой.

В разделе рассматривается вычислительная цепочка, в которой результаты настоящей работы используются как средство получения и переноса начальных приближений. Сначала строится приближение в модели идеально регулируемой тяги, поскольку эта постановка приводит к гладкому управлению и удобна для получения исходного решения. Затем с помощью продолжения по допустимому модулю дополнительного импульса скорости выполняется переход к постановке с ненулевым дополнительным импульсом скорости. После этого решение уточняется в модели постоянной скорости истечения, где оптимальный профиль тяги имеет структуру с активными и пассивными участками. Полученное опорное решение далее переносится на другие даты старта с помощью R -преобразования I типа и используется как начальное приближение для массового расчёта.

Для межпланетного участка в модели постоянной скорости истечения минимизируется расход рабочего тела:

$$J_{\text{ПСИ}} = \int_{t_0}^{t_0+T} \dot{m}_p(t) dt \rightarrow \min, \quad (4.88)$$

где $\dot{m}_p$ обозначает скорость расхода рабочего тела, t_0 — дату старта межпланетного участка, а T — его продолжительность. Начальная скорость космического аппарата записывается как сумма скорости Земли и вектора дополнительного

импульса скорости:

$$\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_E(t_0) + \mathbf{v}_\delta. \quad (4.89)$$

В модели постоянной скорости истечения оптимальное управление имеет структуру bang-bang. Направление тяги определяется вектором, сопряжённым скорости:

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{p}_v}{\|\mathbf{p}_v\|}. \quad (4.90)$$

Активные и пассивные участки задаются функцией переключения. В используемой записи её можно представить в виде

$$\mathcal{K} = \frac{\mathbf{v}\|\mathbf{p}_v\|}{m(t)} + p_m - 1, \quad (4.91)$$

где $\mathbf{v}$ — эффективная скорость истечения, $m(t)$ — текущая масса аппарата, а p_m — переменная, сопряжённая массе. Тогда расход рабочего тела принимает одно из двух значений:

$$\dot{m}_p = \begin{cases} \dot{m}_{\max}, & \mathcal{K} > 0, \\ 0, & \mathcal{K} \leq 0. \end{cases} \quad (4.92)$$

Тем самым переход от ИРТ-приближения к ПСИ-постановке сопровождается появлением пассивных участков, что существенно усложняет прямое получение сходящегося начального приближения. Поэтому переход от ИРТ-приближения к ПСИ-постановке выполняется не скачком, а через параметрическое продолжение. В качестве промежуточного функционала используется семейство

$$J_{\tau_2} = \int_{t_0}^{t_0+T} \left((1 - \tau_2) \frac{\|\mathbf{a}(t)\|^2}{2} + \tau_2 \|\mathbf{a}(t)\| \right) dt, \quad \tau_2 \in [0, 1]. \quad (4.93)$$

При $\tau_2 = 0$ получается энергетически оптимальная ИРТ-постановка, используемая для построения гладкого начального приближения, а при $\tau_2 = 1$ — постановка, используемая для перехода к минимизации расхода рабочего тела в модели постоянной скорости истечения.

Начальное значение $\mathbf{z}_0(0)$ для этого продолжения берётся из решения, полученного на предыдущем этапе после продолжения по дополнительному импульсу скорости. Для той же системы невязок краевой задачи локальное продолжение по τ_2 имеет вид

$$\frac{d\mathbf{z}_0}{d\tau_2} = - \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{z}_0} \right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \tau_2}. \quad (4.94)$$

Такой переход сохраняет связь с уже найденным ИРТ-решением и позволяет получить сходящееся начальное приближение для ПСИ-модели, в которой оптимальное управление содержит активные и пассивные участки.

С вычислительной точки зрения переход от ИРТ-приближения к опорному ПСИ-решению выполняется как последовательность связанных задач. На всех этапах этого перехода граничные условия на правом конце траектории

$$\mathbf{r}(t_0 + T) = \mathbf{r}_V(t_0 + T), \quad \mathbf{v}(t_0 + T) = \mathbf{v}_V(t_0 + T) \quad (4.95)$$

сохраняются в составе ограничений типа равенства. В используемой реализации метода внутренней точки эти условия входят в систему ограничений оптимизационной задачи и удерживаются при переходе от одного приближения к следующему.

Ненулевой дополнительный импульс скорости вводится иначе. Он добавляется плавно через продолжение по ограничению типа неравенства:

$$\|\mathbf{v}_\delta\| \leq v_{\delta, \max}(s), \quad s \in [0, 1], \quad (4.96)$$

где

$$v_{\delta, \max}(s) = 4s \text{ км/с}. \quad (4.97)$$

При $s = 0$ допустимый модуль дополнительного импульса скорости равен нулю, что соответствует исходной постановке без дополнительного импульса скорости. При $s = 1$ максимально допустимый модуль дополнительного импульса скорости достигает 4 км/с. Таким образом, область допустимых значений $\mathbf{v}_\delta$ раскрывается постепенно, тогда как выполнение граничных условий на правом конце сохраняется на всём процессе продолжения.

После такого перехода было получено опорное решение перелёта Земля–Венера с датой старта 01.11.2032. Траектория показана на рис. 4.6, а основные параметры приведены в табл. 4.10.

Полученное опорное решение может быть использовано для инициализации расчётов с другими датами старта. Пусть $(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$ — начальный фазовый вектор опорного решения, а $(\mathbf{r}'_0, \mathbf{v}'_0)$ — начальный фазовый вектор для новой даты старта. Используя матрицу R -преобразования I типа, введённую в главе 3, запишем матрицу перехода в виде

$$G = R_0(\mathbf{r}'_0, \mathbf{v}'_0)R_0^{-1}(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0). \quad (4.98)$$

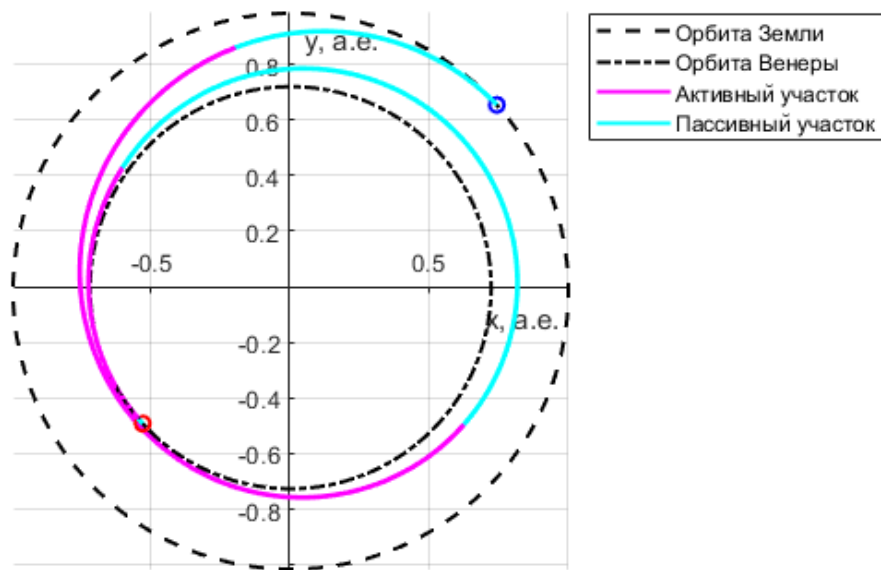


Рисунок 4.6 — Опорная траектория перелёта Земля–Венера с датой старта 01.11.2032 и длительностью 390.8 суток.

Таблица 4.10 — Параметры опорного перелёта Земля–Венера.

Параметр	Значение
Затраты топлива	41.77 кг
Затраты характеристической скорости	3.18 км/с
Время перелёта	390.8 суток
Модуль дополнительного импульса скорости	2.67 км/с
Моторное время	195.2 суток
Дата старта	01.11.2032
Начальная масса КА	156 кг
Первый активный участок	31.12.2032–28.05.2033
Второй активный участок	09.10.2033–25.11.2033

Эта матрица связывает локальные начальные конфигурации двух задач и задаёт перенос как начальных сопряжённых переменных, так и вектора дополнительного импульса скорости.

В соответствии с правилом преобразования сопряжённых переменных получаем

$$\mathbf{p}'_r(t_0) = (G^T)^{-1} \mathbf{p}_r(t_0), \quad \mathbf{p}'_v(t_0) = (G^T)^{-1} \mathbf{p}_v(t_0). \quad (4.99)$$

В рассматриваемой постановке со свободным дополнительным импульсом скорости выполняется условие трансверсальности

$$\mathbf{p}_v(t_0) = \mathbf{0}, \quad (4.100)$$

поэтому оно сохраняется при преобразовании автоматически.

Массовая сопряжённая переменная и продолжительность перелёта при первичном переносе опорного решения не изменяются:

$$p'_m(t_0) = p_m(t_0), \quad T' = T. \quad (4.101)$$

Вектор дополнительного импульса скорости переносится тем же линейным преобразованием, что и начальная скорость:

$$\mathbf{v}'_\delta = G \mathbf{v}_\delta. \quad (4.102)$$

Эта формула важна для практического применения метода: при переходе к другой дате старта изменяется не только начальный вектор сопряжённых переменных, но и начальное предположение о дополнительном импульсе скорости.

Так как матрица G в общем случае не является ортогональной, преобразование (4.102) не сохраняет модуль дополнительного импульса скорости. Если

$$v_\delta = \|\mathbf{v}_\delta\|, \quad v'_\delta = \|\mathbf{v}'_\delta\|, \quad (4.103)$$

то после переноса

$$v'_\delta = \|G \mathbf{v}_\delta\| = \sqrt{\mathbf{v}_\delta^T G^T G \mathbf{v}_\delta}. \quad (4.104)$$

Вводя единичный вектор направления дополнительного импульса скорости

$$\mathbf{n}_\delta = \frac{\mathbf{v}_\delta}{\|\mathbf{v}_\delta\|}, \quad (4.105)$$

получаем выражение для относительной деформации модуля дополнительного импульса скорости:

$$\frac{v'_\delta}{v_\delta} = \sqrt{\mathbf{n}_\delta^T G^T G \mathbf{n}_\delta}. \quad (4.106)$$

Следовательно, перенос дополнительного импульса скорости является не только изменением направления, но и изменением его модуля. Это согласуется с общей ролью R -преобразования I типа: при переходе между разными начальными фазовыми векторами меняется локальная геометрия задачи.

Полная формула переноса опорного решения на новую дату старта имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{p}'_r(t_0) &= (G^T)^{-1} \mathbf{p}_r(t_0), \\ \mathbf{p}'_v(t_0) &= (G^T)^{-1} \mathbf{p}_v(t_0), \\ p'_m(t_0) &= p_m(t_0), \\ \mathbf{v}'_\delta &= G \mathbf{v}_\delta, \\ T' &= T. \end{aligned} \quad (4.107)$$

После такого переноса полученный начальный вектор используется как начальное приближение в задаче оптимизации для новой даты старта. На рис. 4.7 показан пример переноса опорного решения для даты старта 01.11.2032 на дату 01.01.2028.

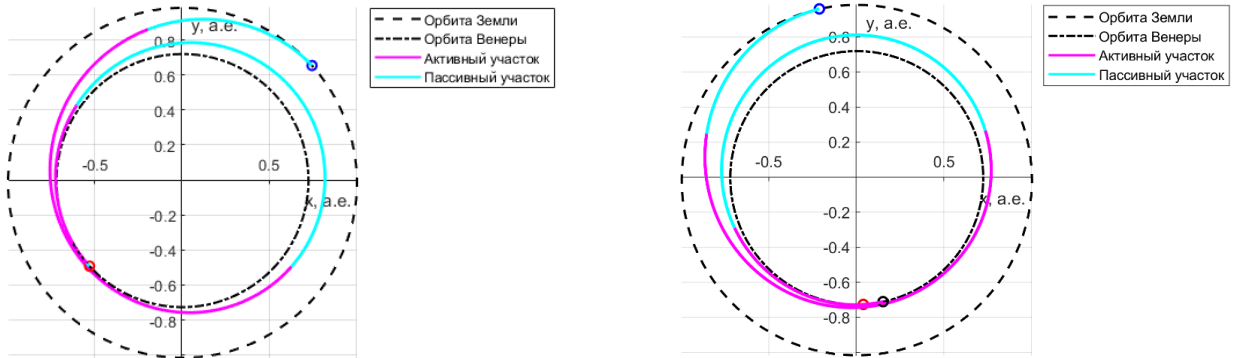


Рисунок 4.7 — Перенос опорного решения на новую дату старта: исходное решение для 01.11.2032 и начальное приближение для 01.01.2028 после применения преобразования (4.107).

Эта процедура использована для массового расчёта по датам старта. Рассматривался интервал от 01.01.2028 до 01.01.2037 с шагом в один день. Для каждой даты начальное приближение строилось по формуле (4.107), после чего уточнялось методом внутренней точки. Таким образом, после получения одного опорного решения дальнейший перебор дат старта не требует повторного выполнения всей цепочки продолжения от ИРТ-приближения.

На рис. 4.8 показана зависимость затрат характеристической скорости на межпланетном участке от даты старта. Она имеет выраженную оконную

структуру: локально благоприятные даты повторяются с периодом, близким к синодическому периоду Венеры, а наиболее выгодные даты проявляются на интервале порядка периода великого противостояния Земли и Венеры.

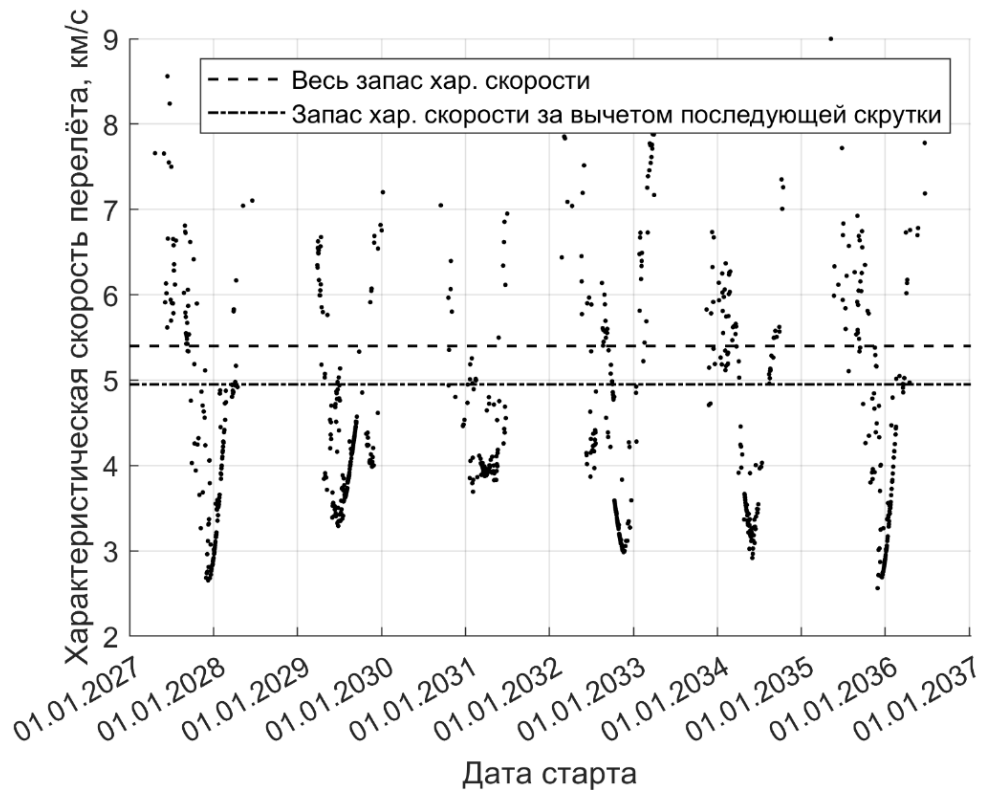


Рисунок 4.8 — Зависимость затрат характеристической скорости на межпланетном участке перелёта Земля–Венера от даты старта.

На рис. 4.9 показана зависимость модуля дополнительного импульса скорости от даты старта. Эта величина определяет требования к разгонному блоку при формировании начального состояния межпланетного участка.

На рис. 4.10 приведена зависимость продолжительности межпланетного участка от даты старта. Совместно с затратами характеристической скорости и модулем дополнительного импульса скорости эта зависимость позволяет выбирать компромиссные варианты перелёта с учётом ограничений миссии.

Полученные результаты показывают, что R -преобразование I типа может использоваться не только для построения начального приближения в одной эфемеридной конфигурации, но и для быстрого переноса уже найденного решения по сетке дат старта. При этом вместе с начальными сопряжёнными переменными переносится вектор дополнительного импульса скорости, а его модуль изменяется в соответствии с деформацией (4.104). В результате формируется практическая схема массового баллистического расчёта: одно опорное решение

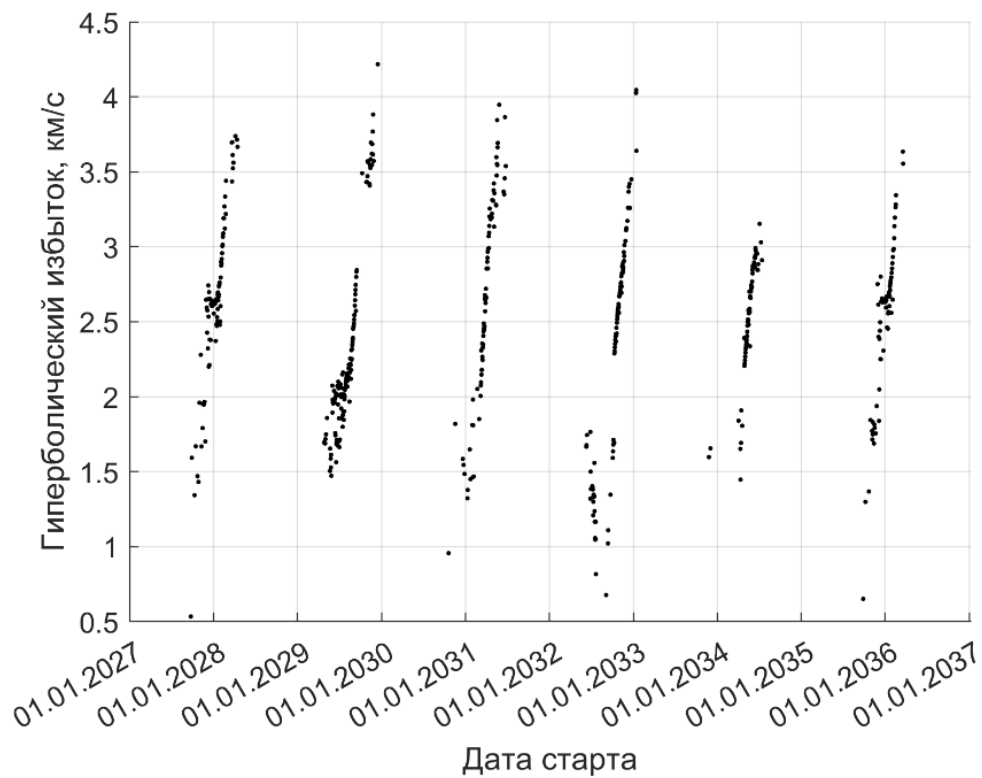


Рисунок 4.9 — Зависимость модуля дополнительного импульса скорости от даты старта.

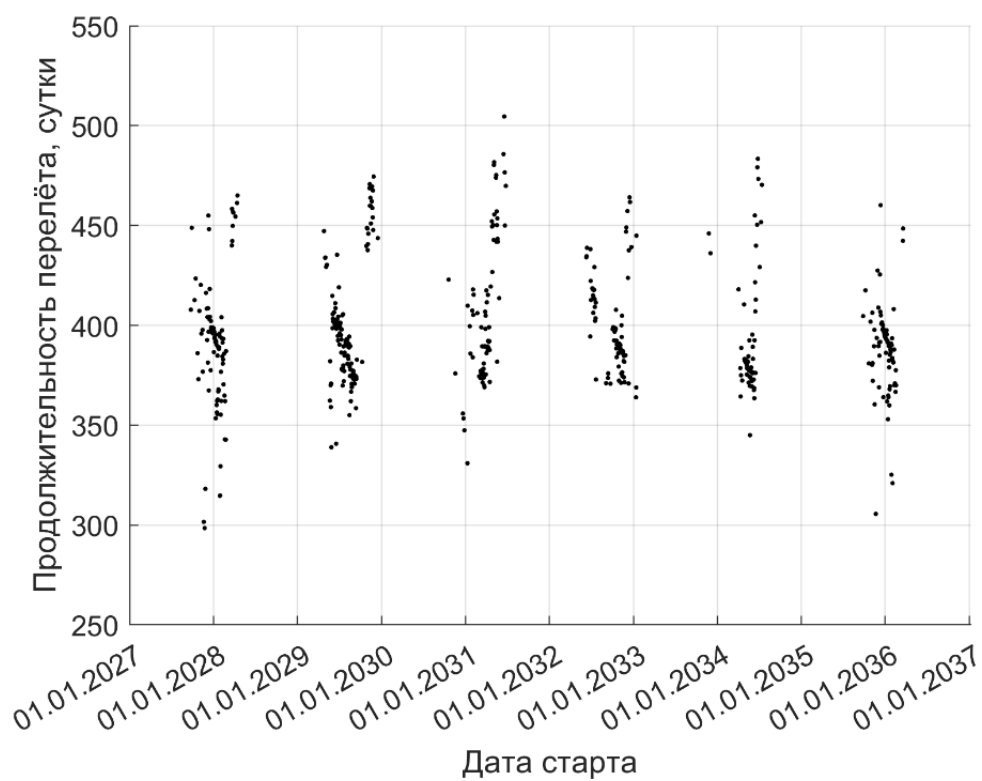


Рисунок 4.10 — Зависимость продолжительности межпланетного участка перелёта Земля–Венера от даты старта.

используется как источник начальных приближений для целого интервала дат старта, после чего каждое приближение уточняется численным методом.

Таким образом, на примере миссии Земля–Венера показано, как конечные формулы и R -преобразования применяются в прикладном проектировании. Сначала они дают ИРТ-приближение для гладкой энергетически оптимальной задачи, затем это приближение используется при продолжении к постановке с ненулевым дополнительным импульсом скорости и при переходе к ПСИ-модели, после чего найденное опорное решение переносится на другие даты старта. Это позволяет получить картину пролётных окон для перелёта с непрерывной тягой без построения полного семейства решений заново для каждой даты.

4.8 Сценарии использования и программная реализация

Результаты, полученные в предыдущих разделах, образуют не только способ построения отдельного начального приближения, но и вычислительную схему, пригодную для использования в проектно-баллистическом анализе. Основным интерфейсом этой схемы является вектор управляющих параметров

$$\mathbf{q} = (\lambda, \kappa, \zeta, \chi, j, \gamma). \quad (4.108)$$

Первые два параметра определяют положение на аппроксимированном модельном многообразии, а остальные четыре задают действие R -преобразований, учитывающих эллиптичность и пространственную ориентацию конечной орбиты. Благодаря этому построение начального вектора расширенной системы сводится к последовательному вычислению конечных формул и применению линейных преобразований начальных значений сопряжённых переменных.

Такое представление отделяет геометрический смысл приближения от численных деталей последующего уточнения. Пользователь задаёт физическую постановку перелёта: дату старта, начальное небесное тело, конечное небесное тело или целевую орбиту, а также параметры дополнительного импульса скорости, если рассматривается соответствующая постановка. Далее вычисляются параметры $\mathbf{q}$, по ним строится ИРТ-приближение, после чего оно может использоваться как начальный вектор для уточнения энергетически оптимальной траектории или как опорное решение для более сложной расчётной цепочки.

В общем виде вычислительная схема включает следующие этапы:

1. задание даты старта, начального фазового вектора и целевых параметров конечной орбиты;
2. вычисление модельных параметров λ и κ ;
3. вычисление продолжительности перелёта, значения функционала и начального вектора сопряжённых переменных по конечным формулам аппроксимированного многообразия;
4. вычисление управляющих параметров ζ, χ, j, γ для задания элементов конечной орбиты;
5. применение композиции R -преобразований и получение начального вектора расширенной системы;
6. численное уточнение траектории в переменных $\mathbf{q}$;
7. при необходимости, продолжение по $\mathbf{v}_\delta$ и переход к ПСИ-модели.

Тем самым параметры $\mathbf{q}$ используются не только как способ компактной записи начального приближения, но и как переменные последующего уточнения. Вместо прямого варьирования шести начальных значений сопряжённых переменных используется набор параметров, каждый из которых связан с определённой частью построения траектории. Параметры λ и κ отвечают за выбор модельного решения, параметры ζ и χ связаны с плоской деформацией конечной орбиты, а параметры j и γ отвечают за пространственную деформацию.

Основные сценарии использования метода приведены в табл. 4.11.

Первый сценарий является базовым. В этом случае метод используется для получения начального приближения без решения вспомогательной краевой задачи. По дате старта и целевым орбитальным параметрам вычисляется вектор $\mathbf{q}$, затем строится начальный вектор расширенной системы. Такое приближение не является конечным результатом расчёта, но оно оказывается достаточно близким к искомой экстремали, чтобы использовать его в последующем численном уточнении.

Второй сценарий связан с изменением даты старта. При массовом проектном расчёте близкие даты старта часто требуют решения близких краевых задач, однако из-за чувствительности расширенной системы прямое использование уже найденного решения не всегда устойчиво. R -преобразование I типа позволяет согласованно изменить начальный фазовый вектор и начальный вектор сопряжённых переменных. Поэтому опорное решение можно переносить на

Таблица 4.11 — Основные сценарии использования разработанного метода.

Сценарий	Результат
Построение начального приближения	Начальный вектор расширенной системы для энергетически оптимальной задачи встречи
Перенос между датами старта	Новое приближение, полученное из опорного решения с помощью R -преобразования I типа
Уточнение в параметрах $\mathbf{q}$	Локально оптимальная траектория, удовлетворяющая граничным условиям задачи встречи
Учёт дополнительного импульса скорости	Решение с заданным или оптимизируемым дополнительным импульсом скорости $\mathbf{v}_\delta$
Переход к ПСИ-модели	Опорная траектория с разрывным профилем тяги, построенная на основе гладкого ИРТ-приближения
Массовый расчёт по датам старта	Оценка окон старта, продолжительности перелёта, затрат характеристической скорости и расхода рабочего тела

соседние даты старта не как простой поворот или сдвиг траектории, а как преобразование начального вектора расширенной системы.

Третий сценарий состоит в уточнении траектории непосредственно в пространстве параметров $\mathbf{q}$. В этом случае конечные формулы используются для построения первого приближения, а дальнейшая численная процедура изменяет $\lambda, \kappa, \zeta, \chi, j, \gamma$, минимизируя невязки правого конца. Такая постановка сохраняет связь переменных оптимизации с геометрией перелёта и уменьшает произвольность выбора начального вектора сопряжённых переменных.

Четвёртый сценарий возникает при рассмотрении постановок с дополнительным импульсом скорости. ИРТ-приближение, построенное для случая $\mathbf{v}_\delta = \mathbf{0}$, может использоваться как начальная точка для продолжения по дополнительному импульсу скорости. Такой подход позволяет перейти от более

простой гладкой постановки к задаче с ненулевым дополнительным импульсом скорости, не начиная решение краевой задачи заново.

Пятый сценарий связан с переходом от ИРТ-модели к ПСИ-модели. В этом случае гладкая энергетически оптимальная траектория используется как опорная для построения траектории с постоянной скоростью истечения и разрывным профилем тяги. При таком использовании метод не заменяет последующее уточнение в ПСИ-модели, а предоставляет согласованное начальное приближение, которое сохраняет выполнение основных граничных условий и облегчает дальнейший расчёт.

Шестой сценарий представляет наибольший прикладной интерес для проектно-баллистического анализа. После получения одного или нескольких опорных решений метод может применяться на сетке дат старта. Для каждой даты строится или переносится начальное приближение, затем выполняется уточнение, после чего оцениваются продолжительность перелёта, расход рабочего тела, модуль дополнительного импульса скорости и другие характеристики миссии. Именно в таком режиме метод становится инструментом предварительного выбора окон старта и сравнения вариантов перелёта.

Программная реализация разработанного подхода выполнена в виде комплекса ILTT Toolbox. Его назначение состоит в том, чтобы объединить конечные формулы, R -преобразования и численное уточнение в единую воспроизводимую вычислительную цепочку. При этом ILTT Toolbox не подменяет математическое содержание метода: конечные формулы, управляющие параметры и R -преобразования остаются основными результатами, а программная реализация обеспечивает их практическое применение.

ILTT Toolbox предоставляет следующий функционал:

- вычисление модельных параметров λ и κ по постановке перелёта;
- вычисление продолжительности перелёта, значения функционала и начальных значений сопряжённых переменных по конечным формулам;
- построение матриц R -преобразований I, II и III типов;
- вычисление управляющих параметров ζ, χ, j, γ по целевым элементам конечной орбиты;
- применение композиции R -преобразований к начальному вектору сопряжённых переменных;
- интегрирование расширенной системы и вычисление невязок правого конца;

- уточнение траектории в параметрах $\mathbf{q}$;
- построение расчётных цепочек с дополнительным импульсом скорости и переходом к ПСИ-модели;
- выполнение серийных расчётов по датам старта для анализа окон перелёта.

На вход программной реализации подаются физические параметры постановки: дата старта, начальное и конечное небесные тела или соответствующие фазовые векторы, целевые параметры конечной орбиты, а также дополнительные параметры постановки с дополнительным импульсом скорости. На выходе формируется начальный вектор расширенной системы, уточнённая траектория, значение функционала, продолжительность перелёта, невязки правого конца и прикладные характеристики миссии, необходимые для дальнейшего анализа.

ILTT Toolbox реализует как набор отдельных конечных формул, так и общую логику метода. Сначала выбирается точка на аппроксимированном модельном многообразии, затем выполняется деформация этой точки с помощью R -преобразований, после чего результат уточняется численно. Такая структура сохраняет физическую интерпретируемость расчёта: изменение каждого параметра $\mathbf{q}$ соответствует изменению определённой части баллистической постановки.

Ограничения метода также имеют прикладное значение. Конечные формулы используются в области, где была выполнена их численная верификация, за пределами этой области требуется дополнительная проверка качества начального приближения. Кроме того, построенное ИРТ-приближение не является заменой финального расчёта траектории в более реалистичной модели движения и двигателя. Оно служит средством выбора начального вектора, переноса опорного решения и ускорения расчётной процедуры.

Таким образом, разработанный метод может использоваться на двух уровнях. На первом уровне он даёт быстрый способ построения начального приближения для отдельной энергетически оптимальной задачи встречи. На втором уровне он становится частью проектной вычислительной цепочки, в которой одно или несколько опорных решений используются для анализа множества дат старта, постановок с дополнительным импульсом скорости и перехода к ПСИ-модели. Именно это делает управляющие параметры $\mathbf{q}$ удобным связующим звеном между конечными формулами, непрямым численным уточнением и практическим баллистическим проектированием.

4.9 Выводы к главе 4

В настоящей главе рассмотрено применение конечных формул и R -преобразований к задаче баллистического проектирования межпланетных перелётов. Результаты второй и третьей глав объединены в прикладной алгоритм построения начального приближения.

Основные результаты главы состоят в следующем.

1. Введён вектор управляющих параметров начального приближения

$$\mathbf{q} = (\lambda, \kappa, \zeta, \chi, j, \gamma). \quad (4.109)$$

Параметры λ и κ задают точку на аппроксимированном модельном многообразии, а параметры ζ, χ, j, γ определяют плоское и пространственное R -преобразования. Тем самым начальное приближение задаётся не непосредственно шестью начальными значениями сопряжённых переменных, а параметрами, связанными с геометрией перелёта и элементами конечной орбиты.

2. Построен алгоритм получения начального вектора расширенной системы для энергетически оптимальной задачи встречи. Алгоритм использует конечные формулы главы 2 для вычисления продолжительности перелёта, функционала и начальных значений сопряжённых переменных, а затем применяет R -преобразования главы 3 для учёта эллиптичности и пространственной ориентации конечной орбиты. В результате формируется ИРТ-приближение, пригодное для последующего численного уточнения.
3. На примерах перелётов Земля–Марс и Земля–Венера показано, что построенное начальное приближение воспроизводит основные целевые параметры конечной орбиты с приемлемой для последующего уточнения точностью. Численная проверка выполнена не для одной отдельной даты, а на наборах дат старта, соответствующих характерным периодам повторения баллистической геометрии. Это показывает, что алгоритм может использоваться как инструмент предварительного массового расчёта.
4. Показано, что управляющие параметры $\mathbf{q}$ могут использоваться как переменные численного уточнения. В такой постановке уточняется

- не произвольный начальный вектор сопряжённых переменных, а параметры, отвечающие за витковую дальность, отношение радиусов и действие R -преобразований. Это сохраняет геометрическую интерпретацию процесса и позволяет получать решения, удовлетворяющие граничным условиям задачи встречи.
5. Проведено сравнение с методом продолжения по гравитационному параметру. Сравнение показало различие в роли двух подходов: продолжение по гравитационному параметру строит решение через прохождение по ветви, тогда как предлагаемый подход сразу формирует начальное приближение в параметрах $\mathbf{q}$. При необходимости перебора нескольких ветвей метод продолжения требует дополнительного выбора ветви, тогда как предлагаемая схема использует структуру аппроксимированного модельного многообразия и конечные формулы для прямого построения приближения.
 6. Рассмотрены постановки с дополнительным импульсом скорости. Показано, что ИРТ-приближение может служить исходной точкой для продолжения по дополнительному импульсу скорости $\mathbf{v}_\delta$. Это позволяет связать модельную энергетически оптимальную задачу встречи с более прикладными постановками, в которых дополнительный импульс скорости является заданной или оптимизируемой величиной.
 7. На примере миссии Земля–Венера продемонстрирована прикладная вычислительная цепочка: построение ИРТ-приближения, переход к решению с ненулевым дополнительным импульсом скорости, дальнейший переход к ПСИ-модели и массовый расчёт по датам старта. В этой цепочке результаты диссертации используются как средство получения и переноса опорных решений для последующего баллистического анализа в более реалистичной модели.
 8. Разработанный подход реализован в программном комплексе ILTT Toolbox. Реализация объединяет вычисление конечных формул, построение R -преобразований, интегрирование расширенной системы, уточнение в параметрах $\mathbf{q}$ и сценарии серийного расчёта. Тем самым полученные в работе конечные формулы и преобразования доведены до воспроизводимого вычислительного инструмента.

Таким образом, построен переход от теоретических и численно-аналитических результатов предыдущих глав к прикладному алгоритму баллистического

проектирования. Полученный алгоритм позволяет автоматически формировать начальные приближения для энергетически оптимальных межпланетных перелётов, уточнять их в параметрах $\mathbf{q}$, использовать их в постановках с дополнительным импульсом скорости и включать в расчётные цепочки для анализа миссий с электрореактивной двигательной установкой.

Заключение

В диссертационной работе разработана и апробирована численно-аналитическая схема построения начального приближения для прикладных задач баллистического проектирования межпланетных перелётов с непрерывной тягой. Схема основана на использовании модельного многообразия решений задачи встречи с идеально регулируемой тягой, конечных формул для его аппроксимации и линейных преобразований начальных значений сопряжённых переменных.

Основные результаты работы образуют следующую последовательность.

1. Для заданной даты старта по цепочке конечных формул выбирается точка оптимальной дальности в расслоении решений задачи встречи с идеально регулируемой тягой. Этот выбор задаёт исходную модельную траекторию в выбранном семействе решений.
2. В точке оптимальной дальности по конечным формулам вычисляются продолжительность компланарного перелёта между круговыми орбитами и начальные значения сопряжённых переменных. Тем самым формируется начальное приближение в плоской круговой модельной постановке.
3. По конечным формулам вычисляются управляющие параметры композиции линейных преобразований начальных значений сопряжённых переменных с учётом коррекции витковой дальности. Эти преобразования обеспечивают переход от модельной постановки к задаче с изменённым начальным фазовым вектором, эллиптичностью и пространственной ориентацией конечной орбиты.
4. Полученное начальное приближение численно уточняется до решения целевой задачи встречи с идеально регулируемой тягой. При этом начальное приближение сохраняет связь с выбранным семейством решений на модельном многообразии.
5. Полученное решение задачи с идеально регулируемой тягой продолжается к постановке с дополнительным импульсом скорости в начальный момент времени с учётом ограничений разгонного блока. Это позволяет использовать построенное решение в более прикладной баллистической постановке.

6. Решение с дополнительным импульсом скорости в начальный момент времени продолжается к постановке с постоянной скоростью истечения. Тем самым предложенная схема связывает модельную задачу с идеально регулируемой тягой с более реалистичной постановкой движения космического аппарата с электрореактивной двигательной установкой.

Основной результат диссертации — вычислительная схема, позволяющая через модельное многообразие, конечные формулы и линейные преобразования начальных значений сопряжённых переменных перейти от расслоения решений задачи встречи с идеально регулируемой тягой к начальному приближению для прикладной баллистической задачи.

Дальнейшее развитие работы связано с переносом предложенной вычислительной схемы на более сложные постановки задачи оптимизации межпланетных перелётов, выходящие за рамки модели идеально регулируемой тяги, и на задачи с более общими граничными условиями.

Список литературы

1. Охоцимский Д.Е. Динамика космических полетов: конспект лекций, прочитанных на механико-математическом факультете МГУ в 1962/63 учебном году. Москва : Издательство Московского университета, 1968. 157 с. Лекции записали и подготовили к выпуску В. П. Филатов и Ю. Г. Сихарулидзе.
2. Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г. Основы механики космического полета: учебное пособие. Москва : Наука, 1990. 445 с.
3. Охоцимский Д.Е., Голубев Ю.Ф., Сихарулидзе Ю.Г. Алгоритмы управления космическим аппаратом при входе в атмосферу. Москва : Наука, 1975. 400 с.
4. Ахметшин Р.З. [и др.]. Некоторые методические проблемы оптимизации траекторий с малой тягой : тех. отч. / ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. Москва, 1996. № 110.
5. Энеев Т.М. [и др.]. Баллистический анализ межпланетных полетов космических аппаратов с электроракетными двигателями // Математическое моделирование. 2000. Т. 12, № 5. С. 33—38.
6. Константинов М.С. [и др.]. Механика космического полета: учебник для вузов / под ред. В.П. Мишин. Москва : Машиностроение, 1989. 408 с.
7. Battin R.H. An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics. Revised. Reston, Virginia : American Institute of Aeronautics, Astronautics, 1999. 796 p. (AIAA Education Series).
8. Сихарулидзе Ю.Г. Баллистика и наведение летательных аппаратов: учебное пособие. 4-е изд. Москва : Лаборатория знаний, 2020. 410 с.
9. Брюно А.Д., Бабенко К.И. Ограниченная задача трех тел: плоские периодические орбиты. Москва : Наука, 1990. 295 с.
10. Брюно А.Д. Новейшие методы небесной механики : тех. отч. / ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. Москва, 2019. 18 с. № 79.
11. Bruno A. Five new methods of celestial mechanics // AIMS Mathematics. 2020. Vol. 5, no. 5. P. 5309—5319.

12. Баранов А.А. Маневрирование космических аппаратов в окрестности круговой орбиты. Москва : Спутник+, 2016. 511 с.
13. Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В. Механика космического полета с малой тягой. Москва : Наука, 1966. 678 с.
14. Лебедев В.Н. Расчет движения космического аппарата с малой тягой. Т. 5. Москва : Вычислительный центр АН СССР, 1968. 108 с. (Математические методы в динамике космических аппаратов).
15. Lebedev V.N. Calculation of the motion of a low-thrust spacecraft. Vol. 586. Washington, DC : National Aeronautics and Space Administration, 1969. 109 p. (NASA Technical Translation).
16. Белецкий В.В., Егоров В.А. Межпланетные полёты с двигателями постоянной мощности // Космические исследования. 1964. Т. 2, № 3. С. 360—391.
17. Белецкий В.В. О траекториях космических полётов с постоянным вектором реактивного ускорения // Космические исследования. 1964. Т. 2, № 3. С. 408—413.
18. Белецкий В.В., Егоров В.А., Ершов В.Г. Анализ траекторий межпланетных полётов с двигателями постоянной мощности // Космические исследования. 1965. Т. 3, № 4. С. 507—522.
19. Белецкий В.В. Очерки о движении космических тел. Москва : Наука, 1972. 359 с.
20. Rayman M.D. [et al.]. Results from the Deep Space 1 technology validation mission // Acta Astronautica. 2000. Vol. 47, no. 2—9. P. 475—487.
21. Schoenmaekers J. Post-launch optimisation of the SMART-1 low-thrust trajectory to the Moon // Proceedings of the 18th International Symposium on Space Flight Dynamics. Vol. 548. 2004. P. 505—510. (ESA Special Publication).
22. Kuninaka H. [et al.]. Powered flight of electron cyclotron resonance ion engines on Hayabusa Explorer // Journal of Propulsion and Power. 2007. Vol. 23, no. 3. P. 544—551.
23. Tsuda Y. [et al.]. System design of the Hayabusa 2—Asteroid sample return mission to 1999 JU3 // Acta Astronautica. 2013. Vol. 91. P. 356—362.

24. Rayman M.D. [et al.]. Dawn: A mission in development for exploration of main belt asteroids Vesta and Ceres // *Acta Astronautica*. 2006. Vol. 58, no. 11. P. 605—616.
25. Zuber M.T. [et al.]. The Psyche Gravity Investigation // *Space Science Reviews*. 2022. Vol. 218, no. 8. P. 57.
26. Hardgrove C. [et al.]. The Lunar Polar Hydrogen Mapper CubeSat Mission // *IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine*. 2020. Vol. 35, no. 3. P. 54—69.
27. Bosanac N. [et al.]. Trajectory design for a cislunar CubeSat leveraging dynamical systems techniques: The Lunar IceCube mission // *Acta Astronautica*. 2018. Vol. 144. P. 283—296.
28. Hyde L., Cockrell J. NASA's Cube Quest Challenge—From Ground Tournaments to Lunar and Deep Space Derby // *AIAA SPACE and Astronautics Forum and Exposition*. Orlando, FL : American Institute of Aeronautics, Astronautics, 2017.
29. Ахметшин Р.З. [и др.]. О возможности достижения астероидов главного пояса космическим аппаратом с ЭРД : тех. отч. / ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. Москва, 2004. 32 с. № 77.
30. Ахметшин Р.З., Ефимов Г.Б., Энеев Т.М. Траектории экспедиций космических аппаратов с двигателем малой тяги по доставке образцов грунта с астероидов Главного пояса и Фобоса // *Космические исследования*. 2009. Т. 47, № 1. С. 38—47.
31. Энеев Т.М. Актуальные задачи исследования дальнего космоса // *Космические исследования*. 2005. Т. 43, № 6. С. 403—407.
32. Pontryagin L.S. [и др.]. The mathematical theory of optimal processes. New York–London : Interscience Publishers, John Wiley & Sons, 1962. 360 с. Translated from the Russian by K. N. Trirogoff; edited by L. W. Neustadt.
33. Powers W.F., Tapley B.D. Canonical transformation applications to optimal trajectory analysis // *AIAA Journal*. 1969. Vol. 7, no. 3. P. 394—399.
34. Haissig C.M., Mease K.D., Vinh N.X. Canonical transformations for space trajectory optimization // *AIAA/AAS Astrodynamics Conference*. Hilton Head Island, SC : American Institute of Aeronautics, Astronautics, 1992.

35. Marsden J.E., Ratiu T.S. Introduction to Mechanics and Symmetry: A Basic Exposition of Classical Mechanical Systems. Vol. 17. 2nd ed. New York : Springer, 1999. 586 p. (Texts in Applied Mathematics).
36. Torres D.F.M. On the Noether Theorem for Optimal Control // European Journal of Control. 2002. Vol. 8, no. 1. P. 56—63.
37. Sundman K.F. Mémoire sur le problème des trois corps // Acta Mathematica. 1913. T. 36. P. 105-179.
38. Levi-Civita T. Sur la régularisation du problème des trois corps // Acta Mathematica. 1920. T. 42. P. 99-144.
39. Stiefel E.L., Scheifele G. Linear and regular celestial mechanics: perturbed two-body motion, numerical methods, canonical theory. Vol. 174. Berlin–New York : Springer-Verlag, 1971. 301 p. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften).
40. Nacozy P.E. The intermediate anomaly // Celestial Mechanics. 1977. T. 16. C. 309—313.
41. Nacozy P.E. Time elements in Keplerian orbital elements // Celestial Mechanics. 1981. Vol. 23. P. 173—198.
42. Brumberg V.A. Length of arc as independent argument for highly eccentric orbits // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 1992. Vol. 53. P. 323—328.
43. Jezewski D.J. A comparative study of analytical orbit transformation methods // Celestial Mechanics. 1975. Vol. 11, no. 1. P. 5—35.
44. Shefer V.A. Linearization of terminal constraints in low-thrust trajectory optimization problems // Acta Astronautica. 1991. Vol. 24, no. 10. P. 615—620.
45. Junkins J.L., Taheri E. Exploration of alternative state vector choices for low-thrust trajectory optimization // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2019. T. 42, № 1. C. 47—64.
46. Silva Fernandes S. da. Optimal low-thrust transfer between neighbouring quasi-circular orbits around an oblate planet // Acta Astronautica. 1989. Vol. 19, no. 5. P. 393—399.

47. Silva Fernandes S. da, Sessin W. Optimal low-thrust limited power transfer between neighbouring quasi-circular orbits of small inclinations around an oblate planet // *Acta Astronautica*. 1989. Vol. 19, no. 5. P. 401—409.
48. Silva Fernandes S. da. Optimum low-thrust limited power transfers between neighbouring elliptic non-equatorial orbits in a non-central gravity field // *Acta Astronautica*. 1995. Vol. 35, no. 12. P. 763—770.
49. Silva Fernandes S. da, Chagas Carvalho F. das. A first-order analytical theory for optimal low-thrust limited-power transfers between arbitrary elliptical coplanar orbits // *Mathematical Problems in Engineering*. 2008. Vol. 2008. P. 1—30.
50. Silva Fernandes S. da. Optimization of low-thrust limited-power trajectories in a noncentral gravity field—transfers between orbits with small eccentricities // *Mathematical Problems in Engineering*. 2009. Vol. 2009. P. 1—35.
51. Silva Fernandes S. da, Chagas Carvalho F. das, Moraes R.V. de. Optimal low-thrust transfers between coplanar orbits with small eccentricities // *Computational and Applied Mathematics*. 2016. Vol. 35, no. 3. P. 803—816.
52. Chagas Carvalho F. das, Silva Fernandes S. da, Moraes R.V. de. A numerical study for optimal low-thrust limited power transfers between coplanar orbits with small eccentricities // *Computational and Applied Mathematics*. 2016. T. 35, № 3. C. 907—936.
53. Geffroy S., Epenoy R. Optimal low-thrust transfers with constraints—generalization of averaging techniques // *Acta Astronautica*. 1997. T. 41, № 3. C. 133—149.
54. Petropoulos A., Russell R.P. Low-thrust transfers using primer vector theory and a second-order penalty method // *AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit*. Honolulu, Hawaii : American Institute of Aeronautics, Astronautics, 2008.
55. Russell R.P. Primer vector theory applied to global low-thrust trade studies // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2007. T. 30, № 2. C. 460—472.
56. Kechichian J.A. Optimal Low-Earth-Orbit–Geostationary-Earth-Orbit intermediate acceleration orbit transfer // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 1997. T. 20, № 4. C. 803—811.
57. Azimov D.M. Analytical solutions for extremal space trajectories. Oxford : Elsevier/Butterworth-Heinemann, 2018. 317 c.

58. Suslov K., Shirobokov M., Trofimov S. Approximate finite Fourier solution to the periodically perturbed two-body problem // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2024. Т. 47, № 8. С. 1698—1708.
59. Петухов В.Г. Оптимизация многовитковых перелетов между некомпланарными эллиптическими орбитами // Космические исследования. 2004. Т. 42, № 3. С. 260—279.
60. Петухов В.Г. Оптимизация межпланетных траекторий космических аппаратов с идеально-регулируемым двигателем методом продолжения // Космические исследования. 2008. Т. 46, № 3. С. 224—237.
61. Петухов В.Г. Оптимальные многовитковые траектории выведения космического аппарата с малой тягой на высокую эллиптическую орбиту // Космические исследования. 2009. Т. 47, № 3. С. 271—279.
62. Петухов В.Г. Метод продолжения для оптимизации межпланетных траекторий с малой тягой // Космические исследования. 2012. Т. 50, № 3. С. 258—270.
63. Петухов В.Г. Робастное квазиоптимальное управление с обратной связью для перелета с малой тягой между некомпланарными эллиптической и круговой орбитами // Вестник Московского авиационного института. 2010. Т. 17, № 3. С. 50—58.
64. Константинов М.С., Петухов В.Г., Тейн М. Оптимизация траекторий гелиоцентрических перелётов. Москва : Издательство МАИ, 2015. 259 с.
65. Константинов М.С., Тейн М. Метод оптимизации траектории выведения КА с электроракетной двигательной установкой на ГСО // Вестник Московского авиационного института. 2009. Т. 16, № 5. С. 282—290.
66. Константинов М.С., Тейн М. Оптимизация траектории выведения КА на геостационарную орбиту для транспортной системы с удельным импульсом двигателя 600–900 с // Труды МАИ. 2017. № 95.
67. Константинов М.С., Тейн М. Оптимизация траектории выведения космического аппарата на рабочую гелиоцентрическую орбиту // Труды МАИ. 2013. № 67.

68. Константинов М.С., Орлов А.А. Оптимизация траектории к Юпитеру космического аппарата с малой тягой с использованием двух гравитационных манёвров у Земли // Вестник Московского авиационного института. 2014. Т. 21, № 1. С. 58—69.
69. Константинов М.С. Анализ требуемого совершенства ядерной электроракетной двигательной установки для марсианской экспедиции длительно-стью два года // Космические исследования. 2018. Т. 56, № 5. С. 352—364.
70. Улыбышев Ю.П. Обзор методов оптимизации траекторий космических аппаратов с использованием дискретных множеств псевдоимпульсов // Космическая техника и технологии. 2016. 4(15). С. 67—79. EDN: YHCWKJ.
71. Morante D., Sanjurjo Rivo M., Soler M. A survey on low-thrust trajectory optimization approaches // Aerospace. 2021. Т. 8, № 3. С. 88.
72. Mazzini L., Cerreto M. Theory and applications of optimal finite thrust orbital transfers // Modeling and Optimization in Space Engineering. Т. 144 / под ред. G. Fasano, J.D. Pintér. Cham : Springer International Publishing, 2019. С. 233—269. (Springer Optimization and Its Applications).
73. Pérez-Palau D., Epenoy R. Fuel optimization for low-thrust Earth–Moon transfer via indirect optimal control // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2018. Т. 130, № 2. С. 21.
74. Olympio J. Algorithm for low-thrust optimal interplanetary transfers with escape and capture phases // AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit. Honolulu, Hawaii : American Institute of Aeronautics, Astronautics, 2008.
75. Mingotti G.P., Topputo F., Bernelli-Zazzera F. A method to design Sun-perturbed Earth-to-Moon low-thrust transfers with ballistic capture // Proceedings of the XIX Congresso Nazionale AIDAA. Forli, Italy, 2007. Art. ID 21.
76. Bertrand R., Foliard J. Low-thrust optimal trajectories for rendezvous with near Earth asteroids // 18th International Symposium on Space Flight Dynamics. Т. 548 / под ред. O. Montenbruck, B. Battrick. 2004. С. 481. (ESA Special Publication).

77. Lee S. [и др.]. Evolutionary computing for low thrust navigation // Space 2005. Long Beach, California : American Institute of Aeronautics, Astronautics, 2005.
78. Pontani M., Conway B.A. Particle swarm optimization applied to space trajectories // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2010. T. 33, № 5. С. 1429—1441.
79. Krier G., Mostaza-Prieto D. Fast and robust optimization of high fidelity continuous thrust transfer orbits with constraints // Proceedings of the 25th International Symposium on Space Flight Dynamics. Munich, Germany, 2015. 19–23 October 2015.
80. Oberle H.J., Taubert K. Existence and multiple solutions of the minimum-fuel orbit transfer problem // Journal of Optimization Theory and Applications. 1997. T. 95, № 2. С. 243—262.
81. Prussing J.E., Sandrik S.L. Second-order necessary conditions and sufficient conditions applied to continuous-thrust trajectories // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2005. T. 28, № 4. С. 812—816.
82. Haberkorn T., Martinon P., Gergaud J. Low-thrust minimum-fuel orbital transfer: a homotopic approach // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2004. Vol. 27, no. 6. P. 1046—1060.
83. Gergaud J., Haberkorn T. Homotopy method for minimum consumption orbit transfer problem // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. 2006. Vol. 12, no. 2. P. 294—310.
84. Jiang F., Baoyin H., Li J. Practical techniques for low-thrust trajectory optimization with homotopic approach // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2012. T. 35, № 1. С. 245—258.
85. Pan B. [et al.]. Double-homotopy method for solving optimal control problems // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2016. Vol. 39, no. 8. P. 1706—1720.
86. Pan B., Pan X., Zhang S. A new probability-one homotopy method for solving minimum-time low-thrust orbital transfer problems // Astrophysics and Space Science. 2018. Vol. 363, no. 9. P. 189.

87. Pan B., Pan X., Lu P. Finding best solution in low-thrust trajectory optimization by two-phase homotopy // *Journal of Spacecraft and Rockets*. 2019. T. 56, № 1. C. 283—291.
88. Zhang J., Xiao Q., Li L. Solution space exploration of low-thrust minimum-time trajectory optimization by combining two homotopies // *Automatica*. 2023. T. 148. C. 110798.
89. Wang Y., Hou X., Topputo F. Thrust continuation of time-optimal orbital transfers with soft terminal conditions // *Astrophysics and Space Science*. 2024. T. 369, № 4. C. 39.
90. Taheri E., Kolmanovsky I., Atkins E. Enhanced smoothing technique for indirect optimization of minimum-fuel low-thrust trajectories // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2016. T. 39, № 11. C. 2500—2511.
91. Taheri E., Junkins J.L. Generic smoothing for optimal bang-off-bang spacecraft maneuvers // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2018. T. 41, № 11. C. 2470—2475.
92. Taheri E. [и др.]. A novel approach for optimal trajectory design with multiple operation modes of propulsion system, part 1 // *Acta Astronautica*. 2020. T. 172. C. 151—165.
93. Taheri E. [и др.]. A novel approach for optimal trajectory design with multiple operation modes of propulsion system, part 2 // *Acta Astronautica*. 2020. T. 172. C. 166—179.
94. Meng Y., Zhang H., Gao Y. Low-thrust minimum-fuel trajectory optimization using multiple shooting augmented by analytical derivatives // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2019. T. 42, № 3. C. 662—677.
95. Schmidt M., Lipson H. Distilling free-form natural laws from experimental data // *Science*. 2009. Vol. 324, no. 5923. P. 81—85.
96. Udrescu S.-M., Tegmark M. AI Feynman: a physics-inspired method for symbolic regression // *Science Advances*. 2020. Vol. 6, no. 16. eaay2631.
97. Cranmer M. [et al.]. Discovering symbolic models from deep learning with inductive biases // *Advances in Neural Information Processing Systems*. Vol. 33. 2020. P. 17429—17442.

98. Cranmer M. Interpretable Machine Learning for Science with PySR and SymbolicRegression.jl. 2023. arXiv: [2305.01582](https://arxiv.org/abs/2305.01582) [cs.LG].
99. Makke N., Chawla S. Interpretable scientific discovery with symbolic regression: a review // Artificial Intelligence Review. 2024. Vol. 57, no. 1. P. 2.
100. Liu Z. [et al.]. KAN: Kolmogorov–Arnold Networks // Proceedings of the International Conference on Learning Representations. 2025.
101. Korneev K.R., Trofimov S.P. Low-Thrust Trajectory Optimization in Kustaanheimo–Stiefel Variables // Cosmic Research. 2024. Vol. 62, no. 3. P. 256—265. URL: <https://link.springer.com/10.1134/S0010952524600288>.
102. Korneev K., Trofimov S. Parametric Analysis of Minimum-Energy Trajectories between Coplanar Circular Orbits // Cosmic Research. 2025. Vol. 63. P. 550—568. URL: <https://link.springer.com/10.1134/S0010952525601410>.
103. Корнеев К.Р., Трофимов С.П. Использование регулярных переменных в задаче оптимизации траектории КА с малой тягой // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2022. № 32. С. 1—36. URL: <https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2022-32>.
104. Овчинников М.Ю. [и др.]. Миссия к Марсу на базе универсальной малогабаритной платформы с ЭРДУ // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2024. № 44. С. 1—32. URL: <https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2024-44>.
105. Овчинников М.Ю. [и др.]. Миссия к Венере на базе универсальной малогабаритной платформы с ЭРДУ // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2026. № 7. С. 1—30. URL: <https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2026-7>.
106. Корнеев К.Р. Аффинные преобразования сопряжённых переменных в задаче энергетически оптимального перелёта // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2025. № 32. С. 1—33. URL: <https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2025-32>.
107. Васильев Д.С., Комаров А.А., Корнеев К.Р. [и др.]. Перспективные проекты применения двигателей АО «ОКБ «ФАКЕЛ» // Космическая техника и технологии. 2025. 3(50). С. 72—88.

108. Корнеев К.Р. Использование символьной регрессии для аппроксимации решений задачи оптимального межпланетного перелёта с малой тягой // 23-я Международная конференция «Авиация и космонавтика». Москва, 2024.
109. Корнеев К.Р. Длительность перелёта между круговыми компланарными орбитами с идеально регулируемым двигателем малой тяги // Новые горизонты прикладной математики: тезисы молодежной научной конференции. Москва : ИПМ им. М. В. Келдыша, 2024. URL: <https://keldysh.ru/ngpm/2024/proc.pdf>.
110. Корнеев К.Р. [и др.]. Двухуровневая схема оптимизации перелёта Земля–Марс малого космического аппарата по гибридной схеме с электро-реактивной двигательной установкой // XLVIII Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С. П. Королёва и других выдающихся отечественных учёных — пионеров освоения космического пространства. Т. 2. Москва : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2024. С. 316—318.
111. Korneev K. [et al.]. Exhaustive Parametric Analysis of Minimum-Energy Coplanar Low-Thrust Transfers // Proceedings of the 75th International Astronautical Congress. Milan, Italy, 2024. P. 14.
112. Корнеев К.Р. Аппроксимация энергетически оптимальных перелётов между компланарными круговыми орбитами // 67-я Всероссийская научная конференция МФТИ. Москва, 2025.
113. Корнеев К.Р. Аффинные преобразования сопряжённых переменных для оптимизации некомпланарных межорбитальных перелётов // Молодежная научная конференция «Новые горизонты прикладной математики». Москва : ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2025.
114. Корнеев К.Р. Исследование структуры решений задачи энергетически оптимального перелёта между компланарными эллиптической и круговой орбитами // XLIX Академические чтения по космонавтике. Москва : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2025.

115. Корнеев К.Р., Трофимов С.П. Анализ структуры решений краевых задач принципа максимума при оптимизации перелёта Земля–Марс // Труды 65-й Всероссийской научной конференции МФТИ. Секция динамики и управления движением космических аппаратов. Прикладная математика и информатика. Москва : МФТИ, 2023. С. 49—51. URL: <https://mipt.ru/upload/medialibrary/b36/prikladnaya-matematika-i-informatika.pdf>.
116. Корнеев К.Р., Трофимов С.П. Переход к переменным Кустаанхеймо — Штифеля как каноническое преобразование уравнений оптимального движения с малой тягой // Сборник тезисов XLVI Академических чтений по космонавтике. Т. 1. Москва, 2022. С. 353—356. URL: <https://press.bmstu.ru/catalog/item/7554>.
117. Корнеев К.Р., Трофимов С.П. Замена фазовых переменных как точечное каноническое преобразование в задачах оптимального орбитального перелёта // Труды 64-й Всероссийской научной конференции МФТИ. Секция динамики и управления движением космических аппаратов. Прикладная математика и информатика. Москва : МФТИ, 2021. С. 65—67.
118. Корнеев К.Р., Трофимов С.П. Построение оптимальной траектории КА с использованием регуляризованных уравнений движения // Труды 63-й Всероссийской научной конференции МФТИ. Секция динамики и управления движением космических аппаратов. Прикладная математика и информатика. Москва : МФТИ, 2020. С. 63—65.
119. Корнеев К.Р., Степанова Е.С. Объединенная двигательная установка на основе ЭРДУ для миссии малого аппарата к Марсу, Луне, астероидам // XXIII Научно-техническая конференция молодых учёных и специалистов ПАО «РКК «Энергия». Королёв, 2024.
120. Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ. Interplanetary Low Thrust Trajectories Toolbox (ILTT_Toolbox) / К.Р. Корнеев, М.Ю. Овчинников, А.С. Кузнецова ; Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук». № 2025680250 ; заявл. 07.08.2025 ; опубл. 02.09.2025, 2025683296 (Рос. Федерация).

121. Folkner W.M. [et al.]. The Planetary and Lunar Ephemerides DE430 and DE431 : IPN Progress Report / Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology. 2014. P. 1—81. No. 42—196.
122. Levenberg K. A Method for the Solution of Certain Non-Linear Problems in Least Squares // Quarterly of Applied Mathematics. 1944. Vol. 2, no. 2. P. 164—168.
123. Marquardt D.W. An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters // Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics. 1963. Vol. 11, no. 2. P. 431—441.
124. Petukhov V.G. Method of continuation for optimization of interplanetary low-thrust trajectories // Cosmic Research. 2012. T. 50, № 3. C. 249—261.

Приложение А

Построение решений модельной краевой задачи

В настоящем приложении описывается вычислительная процедура, используемая для построения численных решений модельной краевой задачи. Основное внимание уделяется локальной задаче стрельбы, способу выбора начального приближения и дискретному продолжению решения по сетке внешних параметров.

В отличие от основных глав, где используются конечные формулы и R -преобразования, здесь фиксируется техническая схема получения эталонных численных решений. Регуляризующие замены переменных в приложении не рассматриваются.

Локальная краевая задача и вычисление функционала

Рассматривается безразмерная ИР-постановка задачи встречи при $\mu = 1$. Вектор расширенной системы имеет вид

$$\mathbf{y} = (\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{p}_r, \mathbf{p}_v), \quad (\text{A.1})$$

а начальный вектор расширенной системы записывается как

$$\mathbf{y}_0 = (\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{p}_{r0}, \mathbf{p}_{v0}). \quad (\text{A.2})$$

Поскольку начальные положение и скорость задаются граничными условиями, неизвестной частью при стрельбе является начальный вектор сопряжённых переменных

$$\mathbf{z}_0 = (\mathbf{p}_{r0}, \mathbf{p}_{v0}). \quad (\text{A.3})$$

Для квадратичного функционала

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \|\mathbf{a}\|^2 dt \quad (\text{A.4})$$

оптимальное управление в ИР-постановке имеет вид

$$\mathbf{a} = \mathbf{p}_v. \quad (\text{A.5})$$

Тогда расширенная система записывается как

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} &= -\frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{p}_v, \\ \dot{\mathbf{p}}_r &= \frac{\mathbf{p}_v}{r^3} - 3\frac{(\mathbf{r}, \mathbf{p}_v)\mathbf{r}}{r^5}, \\ \dot{\mathbf{p}}_v &= -\mathbf{p}_r,\end{aligned}\quad r = \|\mathbf{r}\|. \quad (\text{A.6})$$

Значение функционала удобно вычислять одновременно с интегрированием траектории:

$$\dot{J} = \frac{1}{2}\|\mathbf{p}_v\|^2, \quad J(t_0) = 0. \quad (\text{A.7})$$

Такой способ позволяет сразу сохранять J вместе с найденным решением узла сетки и не вычислять функционал отдельным постобработчиком.

Гамильтониан после подстановки оптимального управления имеет вид

$$H = \mathbf{p}_r^T \mathbf{v} - \mathbf{p}_v^T \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{2}\|\mathbf{p}_v\|^2. \quad (\text{A.8})$$

Два варианта невязки краевой задачи

В работе используются две локальные постановки задачи стрельбы.

В постановке с фиксированной продолжительностью перелёта T неизвестным является только $\mathbf{z}_0$. Невязка правого конца имеет вид

$$\mathbf{F}_T(\mathbf{z}_0) = \begin{pmatrix} \mathbf{r}(T, \mathbf{z}_0) - \mathbf{r}_f \\ \mathbf{v}(T, \mathbf{z}_0) - \mathbf{v}_f \end{pmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

Локальная задача записывается как

$$\mathbf{F}_T(\mathbf{z}_0) = 0. \quad (\text{A.10})$$

Условие $H(T) = 0$ здесь не добавляется, поскольку продолжительность перелёта фиксирована.

В постановке с оптимальной продолжительностью перелёта неизвестными являются $\mathbf{z}_0$ и T . Вектор невязок записывается как

$$\mathbf{F}_{\text{opt}}(\mathbf{z}_0, T) = \begin{pmatrix} \mathbf{r}(T, \mathbf{z}_0) - \mathbf{r}_f \\ \mathbf{v}(T, \mathbf{z}_0) - \mathbf{v}_f \\ H(T, \mathbf{z}_0) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.11})$$

Соответствующая локальная задача имеет вид

$$\mathbf{F}_{\text{opt}}(\mathbf{z}_0, T) = 0. \quad (\text{A.12})$$

Дополнительное уравнение $H(T, \mathbf{z}_0) = 0$ соответствует свободному правому концу по времени в автономной задаче оптимального управления.

Локальное уточнение методом внутренней точки

Локальная задача стрельбы решается как система нелинейных уравнений. В численной реализации она записывается в форме задачи нелинейного программирования с равенствами и ограничениями на диапазон переменных.

Для фиксированной продолжительности используется запись

$$\min_{\mathbf{z}_0} 1, \quad \mathbf{F}_T(\mathbf{z}_0) = 0. \quad (\text{A.13})$$

Для свободной продолжительности используется запись

$$\min_{\mathbf{z}_0, T} 1, \quad \mathbf{F}_{\text{opt}}(\mathbf{z}_0, T) = 0. \quad (\text{A.14})$$

Постоянная целевая функция означает, что на этом этапе не выполняется повторная минимизация функционала J . Метод внутренней точки применяется как численный способ поиска допустимой точки, удовлетворяющей нелинейным условиям краевой задачи.

В методе внутренней точки задача с ограничениями заменяется последовательностью приближённых задач с барьерными членами. Эти члены препятствуют выходу итераций за допустимые границы переменных. По мере уменьшения барьерного параметра решение приближённых задач приближается к решению исходной задачи с ограничениями.

В данной процедуре метод внутренней точки используется только как локальный решатель. Он не заменяет дискретное продолжение: начальное приближение берётся из соседнего уже построенного узла, после чего уточняется для нового значения внешних параметров.

Базовое решение

Построение области решений начинается с одного или нескольких базовых решений. Базовое решение соответствует некоторому значению внешних параметров

$$\xi_0 \in D \quad (\text{A.15})$$

и содержит найденный начальный вектор сопряжённых переменных

$$\mathbf{z}_0(\xi_0). \quad (\text{A.16})$$

В постановке со свободной продолжительностью вместе с ним сохраняется $T(\xi_0)$.

Базовое решение может быть получено отдельным локальным расчётом, продолжением от более простой задачи, ручным подбором или из ранее построенного фрагмента области. После проверки оно заносится в сетку как успешное и используется как начальная точка дискретного продолжения.

Сетка внешних параметров и состояние узла

Пусть

$$\xi \in D \subset \mathbb{R}^h \quad (\text{A.17})$$

обозначает вектор внешних параметров задачи встречи. В дискретной процедуре область D заменяется сеткой узлов

$$\xi_{ij}. \quad (\text{A.18})$$

В плоской модельной задаче в качестве внешних параметров могут использоваться нормированная фаза и витковая дальность:

$$\xi_{ij} = (\Psi_i, \lambda_j), \quad \Psi = \frac{\Phi}{2\pi}, \quad \varphi = 2\pi\lambda. \quad (\text{A.19})$$

Для каждого узла хранится состояние

$$s_{ij}^{(N_{\text{br}})} = \begin{cases} 0, & \text{узел ещё не проверялся,} \\ 1, & \text{решение успешно построено,} \\ 2, & \text{построение решения не удалось.} \end{cases} \quad (\text{A.20})$$

Здесь N_{br} обозначает ветвь дискретного продолжения, если в расчёте различаются несколько ветвей решений.

Выбор соседнего узла

Если в текущем узле ξ_{ij} решение ещё не построено, выполняется поиск соседнего успешного узла. Для двумерной сетки порядок проверки соседей задаётся матрицей приоритетов

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 1 & * & 3 \\ 7 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.21})$$

где символ $*$ соответствует текущему узлу, а меньший номер означает более высокий приоритет.

Пусть первым успешным соседом оказался узел $\xi_{i'j'}$. Тогда начальное приближение задаётся как

$$\mathbf{z}_0^{\text{init}}(\xi_{ij}) = \mathbf{z}_0(\xi_{i'j'}). \quad (\text{A.22})$$

Для постановки со свободной продолжительностью дополнительно переносится

$$T^{\text{init}}(\xi_{ij}) = T(\xi_{i'j'}). \quad (\text{A.23})$$

Экстраполяция по нескольким соседним узлам в данной процедуре не используется. Это сохраняет локальный характер дискретного продолжения и не требует дополнительных предположений о форме ветви между соседними узлами.

Промежуточное продолжение

Если прямой переход от соседнего узла к текущему недостаточно устойчив, отрезок между ними разбивается на несколько промежуточных шагов:

$$\xi(\tau) = (1 - \tau)\xi_{i'j'} + \tau\xi_{ij}, \quad \tau \in [0, 1]. \quad (\text{A.24})$$

Для последовательности

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_m = 1 \quad (\text{A.25})$$

решение предыдущего шага используется как начальное приближение для следующего:

$$\mathbf{z}_0^{\text{init}}(\tau_{k+1}) = \mathbf{z}_0(\tau_k). \quad (\text{A.26})$$

В постановке со свободной продолжительностью также переносится

$$T^{\text{init}}(\tau_{k+1}) = T(\tau_k). \quad (\text{A.27})$$

Такое промежуточное продолжение уменьшает шаг по внешним параметрам, но не является экстраполяцией начального вектора сопряжённых переменных.

Проверка успешности решения

После локального уточнения расширенная система интегрируется повторно. Затем вычисляются физические невязки на правом конце:

$$\|\Delta \mathbf{r}_f\| = \|\mathbf{r}(T) - \mathbf{r}_f\|, \quad (\text{A.28})$$

$$\|\Delta \mathbf{v}_f\| = \|\mathbf{v}(T) - \mathbf{v}_f\|. \quad (\text{A.29})$$

Узел считается успешно построенным, если

$$\|\Delta \mathbf{r}_f\| < \varepsilon_r, \quad \|\Delta \mathbf{v}_f\| < \varepsilon_v, \quad (\text{A.30})$$

интегрирование завершилось корректно, а компоненты найденного решения конечны.

При успехе сохраняются

$$\mathbf{z}_0(\xi_{ij}), \quad T(\xi_{ij}), \quad J(\xi_{ij}), \quad (\text{A.31})$$

а состояние узла меняется на

$$s_{ij}^{(N_{\text{br}})} = 1. \quad (\text{A.32})$$

При неудаче узел помечается как неуспешный:

$$s_{ij}^{(N_{\text{br}})} = 2. \quad (\text{A.33})$$

Такой статус означает только неудачу данной вычислительной процедуры при выбранном начальном приближении, шаге сетки и ограничениях локального уточнения.

Диагностика вычислительных барьеров

Вычислительным барьером называется область, где дискретное продолжение с выбранным шагом сетки и локальным численным методом перестаёт устойчиво строить соседние узлы. Такой барьер не является доказательством отсутствия решения краевой задачи.

Одной из диагностических величин служит число обусловленности матрицы чувствительности. Для постановки с фиксированной продолжительностью рассматривается

$$\text{cond} \left(\frac{\partial \mathbf{F}_T}{\partial \mathbf{z}_0} \right), \quad (\text{A.34})$$

а для постановки со свободной продолжительностью —

$$\text{cond} \left(\frac{\partial \mathbf{F}_{\text{opt}}}{\partial (\mathbf{z}_0, T)} \right). \quad (\text{A.35})$$

Рост этих величин указывает на повышение чувствительности локальной задачи и может служить признаком приближения к вычислительному барьеру.

Итоговый алгоритм

Итоговая процедура имеет следующий вид.

1. Задать область внешних параметров D и сетку узлов ξ_{ij} .
2. Выбрать ветвь дискретного продолжения N_{br} , если рассматриваются несколько ветвей.
3. Занести в сетку одно или несколько базовых решений.

4. Для очередного узла проверить состояние $s_{ij}^{(N_{br})}$.
5. Если узел ещё не проверялся, найти соседний успешный узел по матрице приоритетов.
6. Использовать соседнее решение как начальное приближение.
7. При необходимости выполнить промежуточное продолжение по $\xi(\tau)$.
8. Решить локальную задачу стрельбы методом внутренней точки:

$$\mathbf{F}_T(\mathbf{z}_0) = 0 \quad (\text{A.36})$$

или

$$\mathbf{F}_{\text{opt}}(\mathbf{z}_0, T) = 0. \quad (\text{A.37})$$

9. Повторно проинтегрировать расширенную систему и вычислить $\|\Delta \mathbf{r}_f\|$, $\|\Delta \mathbf{v}_f\|$, J .
10. При успехе сохранить решение и диагностические величины; при неудаче пометить узел как неуспешный.

Таким образом, построение модельного многообразия не сводится к независимому решению краевой задачи в каждом узле. После нахождения базовых решений последующие узлы строятся методом дискретного продолжения: соседнее успешное решение используется как начальное приближение, а метод внутренней точки выполняет локальное уточнение в новом узле.

Приложение Б

Таблицы коэффициентов аппроксимаций

В настоящем приложении приведены числовые коэффициенты конечных формул главы 2. Во всех таблицах индекс i обозначает номер числового коэффициента в обозначении $C_i^{(X)}$.

Таблица Б.1 — Числовые коэффициенты аппроксимации квадратичного функционала

i	$C_i^{(J)}$
0	4.747336×10^{-3}
1	1.044802×10^{-2}
2	-1.517055×10^{-2}
3	2.020210×10^{-1}
4	2.236760×10^0

Таблица Б.2 — Числовые коэффициенты аппроксимации начальных значений сопряжённых переменных для $\kappa = 0.72$

i	$C_i^{(p_{rx})}$	$C_i^{(p_{ry})}$	$C_i^{(p_{vx})}$	$C_i^{(p_{vy})}$
0	2.007421×10^{-1}	1.546352×10^{-3}	1.866181×10^{-3}	1.045688×10^{-1}
1	7.780826×10^0	-3.167802×10^{-3}	-3.153794×10^{-3}	4.050922×10^0
2	-3.415999×10^{-1}	-1.832822×10^{-1}	-1.915223×10^{-1}	-1.590204×10^{-1}
3	1.231174×10^{-1}	1.151475×10^{-1}	9.932377×10^{-2}	1.142922×10^{-1}

Таблица Б.3 — Числовые коэффициенты аппроксимации начальных значений сопряжённых переменных для $\kappa = 1.52$

i	$C_i^{(p_{rx})}$	$C_i^{(p_{ry})}$	$C_i^{(p_{vx})}$	$C_i^{(p_{vy})}$
0	-2.489270×10^{-1}	-6.779492×10^{-3}	-6.319471×10^{-3}	-1.286779×10^{-1}
1	7.737403×10^0	4.324107×10^{-3}	4.278504×10^{-3}	4.000276×10^0
2	-3.287687×10^{-1}	8.726450×10^{-2}	1.311855×10^{-1}	-1.562999×10^{-1}
3	1.037749×10^{-1}	-2.003054×10^{-1}	-2.425436×10^{-1}	8.483203×10^{-2}

Таблица Б.4 — Числовые коэффициенты поправочных функций $\mathcal{D}_0^{(p_{ry})}$ и $\mathcal{D}_0^{(p_{vx})}$ для $\kappa = 0.72$

i	$C_i^{(D_0, p_{ry})}$	$C_i^{(D_0, p_{vx})}$
0	-2.705693×10^0	-7.277087×10^0
1	5.176300×10^0	1.374022×10^1
2	-2.336379×10^0	-6.262552×10^0
3	3.200364×10^0	1.381195×10^0
4	-3.220511×10^0	-2.278956×10^0

Таблица Б.5 — Числовые коэффициенты поправочных функций $\mathcal{D}_0^{(p_{rx})}$, $\mathcal{D}_1^{(p_{rx})}$, $\mathcal{D}_0^{(p_{vy})}$ и $\mathcal{D}_1^{(p_{vy})}$ для $\kappa = 0.72$

i	$C_i^{(D_0, p_{rx})}$	$C_i^{(D_1, p_{rx})}$	$C_i^{(D_0, p_{vy})}$	$C_i^{(D_1, p_{vy})}$
0	-4.126470×10^1	5.853587×10^{-1}	-5.405981×10^2	1.221837×10^{-2}
1	8.635987×10^1	-1.569007×10^0	9.580032×10^2	-2.834799×10^0
2	-5.108371×10^1	1.981922×10^0	-4.151573×10^2	2.066646×10^0
3	-3.424188×10^0	—	-5.877538×10^0	—

Таблица Б.6 — Числовые коэффициенты поправочных функций $\mathcal{D}_0^{(p_{ry})}$ и $\mathcal{D}_0^{(p_{vx})}$ для $\kappa = 1.52$

i	$C_i^{(D_0, p_{ry})}$	$C_i^{(D_0, p_{vx})}$
0	-5.520942×10^0	-1.786881×10^0
1	9.933904×10^0	3.151714×10^0
2	-4.541316×10^0	-1.389121×10^0
3	1.380896×10^0	2.986024×10^0
4	-2.000000×10^0	-2.699242×10^0

Таблица Б.7 — Числовые коэффициенты поправочных функций $\mathcal{D}_0^{(p_{rx})}$, $\mathcal{D}_1^{(p_{rx})}$, $\mathcal{D}_0^{(p_{vy})}$ и $\mathcal{D}_1^{(p_{vy})}$ для $\kappa = 1.52$

i	$C_i^{(D_0, p_{rx})}$	$C_i^{(D_1, p_{rx})}$	$C_i^{(D_0, p_{vy})}$	$C_i^{(D_1, p_{vy})}$
0	-3.974003×10^1	5.010769×10^{-1}	-1.354631×10^3	8.896395×10^{-3}
1	7.328781×10^1	-1.951474×10^0	2.264642×10^3	-2.913193×10^0
2	-4.057760×10^1	2.401698×10^0	-9.513450×10^2	2.164804×10^0
3	-3.086140×10^0	—	-6.814267×10^0	—

Приложение В

Дополнительные формулы и таблицы

В настоящем приложении приведены дополнительные формулы и таблицы коэффициентов, используемые в главах 3 и 4. Эти материалы вынесены за пределы основного текста, поскольку имеют вспомогательный характер и необходимы главным образом для воспроизводимости конечных формул.

Коэффициент-функция чувствительности для R -преобразования III типа

Коэффициент-функция чувствительности, связывающая управляющий параметр j с наклоном конечной орбиты, имеет вид

$$\mathcal{A}^{(i)}(\kappa, \Omega) = \mathcal{A}_0^{(i)}(\kappa) + \mathcal{A}_1^{(i)}(\kappa) \cos 2\Omega, \quad (\text{B.1})$$

где

$$\mathcal{A}_0^{(i)}(\kappa) = \kappa \left(C_0^{(i)} + C_1^{(i)} \kappa \right) \left(\kappa + C_2^{(i)} \right) + C_3^{(i)}, \quad (\text{B.2})$$

$$\mathcal{A}_1^{(i)}(\kappa) = C_4^{(i)} \left(\kappa - C_5^{(i)} \right) \left(\kappa^3 - C_6^{(i)} \right). \quad (\text{B.3})$$

Таблица В.1 — Коэффициенты компонент коэффициент-функции $\mathcal{A}^{(i)}(\kappa, \Omega)$.

Коэффициент	Значение
$C_0^{(i)}$	1.265374×10^{-1}
$C_1^{(i)}$	-2.255162×10^{-2}
$C_2^{(i)}$	8.123615×10^{-1}
$C_3^{(i)}$	-1.875564×10^{-1}
$C_4^{(i)}$	1.208435×10^{-3}
$C_5^{(i)}$	1.425563×10^0
$C_6^{(i)}$	9.998528×10^{-1}

Вспомогательные функции для коэффициентов параметров оптимального управления

Вспомогательные функции $\mathcal{P}_i^{(\kappa)}(\lambda, \kappa_1, \kappa_2)$ рассчитываются на основе эталонных значений сопряжённых переменных для двух соотношений радиусов. Они не являются числовыми коэффициентами вида $C_i^{(X)}$, поэтому записываются каллиграфической буквой.

$$\mathcal{P}_0^{(\kappa)}(\lambda, \kappa_1, \kappa_2) = \frac{\kappa_1^{3/4} \kappa_2^{3/4}}{\kappa_2^{3/4} - \kappa_1^{3/4}} \left(\kappa_1^{1/4} \frac{p_{rx}(\lambda, \kappa_1)}{\ln \kappa_1} - \kappa_2^{1/4} \frac{p_{rx}(\lambda, \kappa_2)}{\ln \kappa_2} \right). \quad (\text{B.4})$$

$$\mathcal{P}_1^{(\kappa)}(\lambda, \kappa_1, \kappa_2) = \frac{1}{\kappa_1^{3/4} - \kappa_2^{3/4}} \left(\kappa_1 \frac{p_{rx}(\lambda, \kappa_1)}{\ln \kappa_1} - \kappa_2 \frac{p_{rx}(\lambda, \kappa_2)}{\ln \kappa_2} \right). \quad (\text{B.5})$$

$$\mathcal{P}_2^{(\kappa)}(\lambda, \kappa_1, \kappa_2) = \frac{\kappa_1^{1/4} \kappa_2^{1/4}}{\kappa_2^{1/4} - \kappa_1^{1/4}} \left(\kappa_1^{3/4} \frac{p_{ry}(\lambda, \kappa_1)}{\ln \kappa_1} - \kappa_2^{3/4} \frac{p_{ry}(\lambda, \kappa_2)}{\ln \kappa_2} \right). \quad (\text{B.6})$$

$$\mathcal{P}_3^{(\kappa)}(\lambda, \kappa_1, \kappa_2) = \frac{1}{\kappa_1^{1/4} - \kappa_2^{1/4}} \left(\kappa_1 \frac{p_{ry}(\lambda, \kappa_1)}{\ln \kappa_1} - \kappa_2 \frac{p_{ry}(\lambda, \kappa_2)}{\ln \kappa_2} \right). \quad (\text{B.7})$$

$$\mathcal{P}_4^{(\kappa)}(\lambda, \kappa_1, \kappa_2) = \frac{\kappa_1^{1/4} \kappa_2^{1/4}}{\kappa_2^{1/4} - \kappa_1^{1/4}} \left(\kappa_1^{3/4} \frac{p_{vx}(\lambda, \kappa_1)}{\ln \kappa_1} - \kappa_2^{3/4} \frac{p_{vx}(\lambda, \kappa_2)}{\ln \kappa_2} \right). \quad (\text{B.8})$$

$$\mathcal{P}_5^{(\kappa)}(\lambda, \kappa_1, \kappa_2) = \frac{1}{\kappa_1^{1/4} - \kappa_2^{1/4}} \left(\kappa_1 \frac{p_{vx}(\lambda, \kappa_1)}{\ln \kappa_1} - \kappa_2 \frac{p_{vx}(\lambda, \kappa_2)}{\ln \kappa_2} \right). \quad (\text{B.9})$$

$$\mathcal{P}_6^{(\kappa)}(\lambda, \kappa_1, \kappa_2) = \frac{\kappa_1^{3/4} \kappa_2^{3/4}}{\kappa_2^{3/4} - \kappa_1^{3/4}} \left(\kappa_1^{1/4} \frac{p_{vy}(\lambda, \kappa_1)}{\ln \kappa_1} - \kappa_2^{1/4} \frac{p_{vy}(\lambda, \kappa_2)}{\ln \kappa_2} \right). \quad (\text{B.10})$$

$$\mathcal{P}_7^{(\kappa)}(\lambda, \kappa_1, \kappa_2) = \frac{1}{\kappa_1^{3/4} - \kappa_2^{3/4}} \left(\kappa_1 \frac{p_{vy}(\lambda, \kappa_1)}{\ln \kappa_1} - \kappa_2 \frac{p_{vy}(\lambda, \kappa_2)}{\ln \kappa_2} \right). \quad (\text{B.11})$$

Формулы коррекции витковой дальности при R -преобразовании II типа

В разделе, посвящённом коррекции витковой дальности, используется линейная модель деформации полного угла. Скорректированная витковая дальность задаётся формулой

$$\lambda_{\text{corr}} = \lambda - \frac{1}{2\pi} \mathcal{B}_\lambda(\omega, \lambda, \kappa) \zeta. \quad (\text{B.12})$$

Функция чувствительности $\mathcal{B}_\lambda$ записывается в виде конечного гармонического разложения по долготе перицентра:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\lambda(\omega, \lambda, \kappa) = & \mathcal{B}_0^{(\lambda)}(\lambda, \kappa) + \mathcal{B}_1^{(\lambda)}(\lambda, \kappa) \cos \omega + \mathcal{B}_2^{(\lambda)}(\lambda, \kappa) \sin \omega \\ & + \mathcal{B}_3^{(\lambda)}(\lambda, \kappa) \cos 3\omega + \mathcal{B}_4^{(\lambda)}(\lambda, \kappa) \sin 3\omega. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Формулы для компонент $\mathcal{B}_0^{(\lambda)}, \dots, \mathcal{B}_4^{(\lambda)}$ записываются с использованием обозначения

$$\varphi = 2\pi\lambda. \quad (\text{B.14})$$

$$\mathcal{B}_0^{(\lambda)}(\lambda, \kappa) = \left(\lambda \arctan(\kappa\lambda^2) + C_0^{(B_{\lambda,0})} \right) \left(C_1^{(B_{\lambda,0})} \cos \left(C_2^{(B_{\lambda,0})} \lambda \right) - C_3^{(B_{\lambda,0})} - \frac{C_4^{(B_{\lambda,0})}}{\kappa} \right) \ln \kappa. \quad (\text{B.15})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1^{(\lambda)}(\lambda, \kappa) = & \left[\varphi + \left(-C_0^{(B_{\lambda,1})} \cos \varphi \arctan \kappa - C_1^{(B_{\lambda,1})} \right) \right. \\ & \cdot \left. \left(\kappa \left(-\sqrt{\varphi} + \sin \varphi + C_2^{(B_{\lambda,1})} \right) + \varphi - C_3^{(B_{\lambda,1})} \right) \right] \ln \kappa. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_2^{(\lambda)}(\lambda, \kappa) = & C_0^{(B_{\lambda,2})} \left(C_1^{(B_{\lambda,2})} - \kappa \right) \left[\left(C_2^{(B_{\lambda,2})} \varphi + C_3^{(B_{\lambda,2})} \right) \sin \varphi - \cos \varphi + C_4^{(B_{\lambda,2})} \right. \\ & \left. + \frac{\sin \left(\varphi + \sqrt{\varphi \arctan(\arctan \kappa)} + C_5^{(B_{\lambda,2})} \right) - C_6^{(B_{\lambda,2})}}{\kappa} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

$$\mathcal{B}_3^{(\lambda)}(\lambda, \kappa) = \varphi \left[-C_0^{(B_{\lambda,3})} \left(\kappa + \sin \left(C_1^{(B_{\lambda,3})} \kappa \right) \right) \cos \left(\varphi - \frac{C_2^{(B_{\lambda,3})}}{\varphi} \right) - C_3^{(B_{\lambda,3})} \right] \ln \kappa - \left(\frac{\kappa^2}{\varphi} \right) \quad (\text{B.18})$$

$$\mathcal{B}_4^{(\lambda)}(\lambda, \kappa) = \frac{\left(\kappa - C_0^{(B_{\lambda,4})}\right) \left(\lambda + C_1^{(B_{\lambda,4})}\right)}{C_2^{(B_{\lambda,4})}} \left[\sin \left(\frac{\lambda}{C_3^{(B_{\lambda,4})}} + C_4^{(B_{\lambda,4})} \right) + \frac{C_5^{(B_{\lambda,4})}}{\left(\lambda + C_6^{(B_{\lambda,4})}\right)^\kappa + \sin \left(\frac{\lambda}{C_7^{(B_{\lambda,4})}} \right)} \right]. \quad (\text{B.19})$$

Таблица В.2 — Числовые коэффициенты компонент функции $\mathcal{B}_\lambda$.

Компонента	Коэффициент	Значение
$\mathcal{B}_0^{(\lambda)}$	$C_0^{(B_{\lambda,0})}$	8.218734×10^{-1}
$\mathcal{B}_0^{(\lambda)}$	$C_1^{(B_{\lambda,0})}$	5.887166×10^{-3}
$\mathcal{B}_0^{(\lambda)}$	$C_2^{(B_{\lambda,0})}$	5.667718×10^1
$\mathcal{B}_0^{(\lambda)}$	$C_3^{(B_{\lambda,0})}$	4.010102×10^{-1}
$\mathcal{B}_0^{(\lambda)}$	$C_4^{(B_{\lambda,0})}$	1.536153×10^{-2}
$\mathcal{B}_1^{(\lambda)}$	$C_0^{(B_{\lambda,1})}$	1.785559×10^0
$\mathcal{B}_1^{(\lambda)}$	$C_1^{(B_{\lambda,1})}$	2.493419×10^0
$\mathcal{B}_1^{(\lambda)}$	$C_2^{(B_{\lambda,1})}$	4.571423×10^0
$\mathcal{B}_1^{(\lambda)}$	$C_3^{(B_{\lambda,1})}$	3.627444×10^0
$\mathcal{B}_2^{(\lambda)}$	$C_0^{(B_{\lambda,2})}$	2.227637×10^0
$\mathcal{B}_2^{(\lambda)}$	$C_1^{(B_{\lambda,2})}$	9.810934×10^{-1}
$\mathcal{B}_2^{(\lambda)}$	$C_2^{(B_{\lambda,2})}$	2.957547×10^{-1}
$\mathcal{B}_2^{(\lambda)}$	$C_3^{(B_{\lambda,2})}$	1.291985×10^0
$\mathcal{B}_2^{(\lambda)}$	$C_4^{(B_{\lambda,2})}$	8.575435×10^{-1}
$\mathcal{B}_2^{(\lambda)}$	$C_5^{(B_{\lambda,2})}$	1.611204×10^0
$\mathcal{B}_2^{(\lambda)}$	$C_6^{(B_{\lambda,2})}$	2.581648×10^0
$\mathcal{B}_3^{(\lambda)}$	$C_0^{(B_{\lambda,3})}$	1.122470×10^{-1}
$\mathcal{B}_3^{(\lambda)}$	$C_1^{(B_{\lambda,3})}$	1.184863×10^0
$\mathcal{B}_3^{(\lambda)}$	$C_2^{(B_{\lambda,3})}$	2.790079×10^0
$\mathcal{B}_3^{(\lambda)}$	$C_3^{(B_{\lambda,3})}$	1.870524×10^{-1}
$\mathcal{B}_3^{(\lambda)}$	$C_4^{(B_{\lambda,3})}$	1.622936×10^0
$\mathcal{B}_4^{(\lambda)}$	$C_0^{(B_{\lambda,4})}$	9.931529×10^{-1}
$\mathcal{B}_4^{(\lambda)}$	$C_1^{(B_{\lambda,4})}$	8.012159×10^{-1}
$\mathcal{B}_4^{(\lambda)}$	$C_2^{(B_{\lambda,4})}$	1.503950×10^0
$\mathcal{B}_4^{(\lambda)}$	$C_3^{(B_{\lambda,4})}$	-1.575791×10^{-1}
$\mathcal{B}_4^{(\lambda)}$	$C_4^{(B_{\lambda,4})}$	3.685596×10^{-1}
$\mathcal{B}_4^{(\lambda)}$	$C_5^{(B_{\lambda,4})}$	9.136469×10^{-1}
$\mathcal{B}_4^{(\lambda)}$	$C_6^{(B_{\lambda,4})}$	9.679950×10^{-1}
$\mathcal{B}_4^{(\lambda)}$	$C_7^{(B_{\lambda,4})}$	-1.532257×10^{-1}