

**ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ ИМ. М.В. КЕЛДЫША
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК**

Утверждена

Ученым советом ФИЦ ИПМ

им. М.В. Келдыша РАН,

протокол № __ от «__» _____ 2018_

г.

Заместитель директора

_____ А.Л. Афендигов

(подпись, расшифровка подписи)

«__» _____ 2018 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Методы исследования математических моделей

Направление подготовки

01.06.01 – «Математика и Механика»

Профили (направленности программы)

01.01.07– «Вычислительная математика»

Квалификация выпускника

Исследователь. Преподаватель-исследователь

Форма обучения

очная

Москва, 2018

Направление подготовки: 01.06.01 – «Математика и Механика»

Профиль (направленность программы): 01.01.07– «Вычислительная математика»

Дисциплина: Методы исследования математических моделей

Форма обучения: очная

Рабочая программа составлена с учетом ФГОС ВО по направлению подготовки 01.06.01 – «Математика и Механика», утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 30 июля 2014 г. N 866, зарегистрировано в Минюсте Российской Федерации 20 августа 2014 г. N 33837, и Программы-минимум кандидатского экзамена по специальности, утвержденной приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 8 октября 2007 года № 274 (зарегистрировано Минюстом Российской Федерации 19 октября 2007 года № 10363).

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА РЕКОМЕНДОВАНА

Ученым советом ФГБУН ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, протокол № ___ от «___» _____ 2018 г.
Заместитель директора А.Л. Афендигов.

ИСПОЛНИТЕЛЬ (разработчик программ):

Аристова Е.Н., ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, зав. сект., д.ф.-м.н.

Заведующий аспирантурой _____ / Меньшов И.С. /

Оглавление

| | |
|---|----|
| АННОТАЦИЯ | 4 |
| 1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ..... | 4 |
| 2. ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ | 4 |
| 3. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ | 6 |
| 3.1. Структура дисциплины..... | 6 |
| 3.2. Содержание разделов дисциплины | 6 |
| 3.3. Семинарские занятия | 8 |
| 4. ТЕКУЩАЯ И ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АТТЕСТАЦИЯ. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ | 8 |
| 5. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ..... | 11 |

АННОТАЦИЯ

Дисциплина «Методы исследования математических моделей» реализуется в рамках Блока 1 Основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (ИПМ им. М.В. Келдыша РАН) по направлению подготовки 01.06.01 – «Математика и Механика».

Рабочая программа разработана с учетом ФГОС ВО по направлению подготовки 01.06.01 – «Математика и Механика», утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 30 июля 2014 г. N 866, зарегистрировано в Минюсте Российской Федерации 20 августа 2014 г. N 33837 и Программы-минимум кандидатского экзамена по специальности, утвержденной приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 8 октября 2007 года № 274 (зарегистрировано Минюстом Российской Федерации 19 октября 2007 года № 10363).

Основным источником материалов для формирования содержания программы являются: научные периодические издания и монографические исследования, а также материалы конференций, симпозиумов, семинаров, Интернет-ресурсы.

Общая трудоемкость дисциплины по учебному плану составляет 2 зач.ед. (72 часа), из них лекций – 4 часа, семинарских занятий – 10 часов, практических занятий – 0 часов и самостоятельной работы – 22 часов, подготовка к сдаче экзамена – 36 часов. Дисциплина реализуется на 1-м курсе, во 2-м семестре, продолжительность обучения – 1 семестр.

Текущая аттестация проводится не менее двух раз в соответствии с заданиями и формами контроля, предусмотренные настоящей программой.

Промежуточная оценка знания осуществляется в период зачетно-экзаменационной сессии в форме экзамена.

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Цели и задачи дисциплины «Методы исследования математических моделей»

Цель: освоение фундаментальных знаний и компетенций, которые позволят исследовать алгоритмы и методы численного решения задач математической физики с точки зрения основополагающих понятий теории разностных схем на аппроксимацию, устойчивость, сходимости, эффективность, монотонность и др., а также овладение математическим аппаратом, позволяющим выбрать наиболее эффективный алгоритм сточки зрения численной реализации, согласно критериям проблемной области.

Задачи:

- освоение теоретических основ численных методов решения уравнений в частных производных в различных областях математического моделирования и исследования свойств изучаемых алгоритмов;
- практическая реализация накопленных по дисциплине теоретических знаний на решении ряда характерных тестовых задач;
- стимулирование к самостоятельной деятельности по освоению дисциплины и формированию необходимых компетенций.

2. ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Процесс изучения дисциплины «Методы исследования математических моделей» направлен на формирование компетенций или отдельных их элементов в соответствии с ФГОС

ВО по направлению подготовки 01.06.01 – «Математика и Механика», утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 30 июля 2014 г. N 866, зарегистрировано в Минюсте Российской Федерации 20 августа 2014 г. N 33837.

а) универсальные (УК): не предусмотрено

б) общепрофессиональных (ОПК): не предусмотрено

в) профессиональных (ПК): Способность разработки методов численного решения математических задач (ПК-1), Способность решения математических задач, возникающих при моделировании естественнонаучных и прикладных проблем (ПК-2), Способность реализации методов в практическом решении задач с применением современных ЭВМ (ПК-3).

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

Знать:

- основные методы построения разностных схем для решения уравнений математической физики: метод конечных разностей, интерполяционно-характеристический метод, интегро-интерполяционный, конечных объемов и др.;
- основные понятия теории разностных схем: аппроксимация, устойчивость, сходимость; основную теорему вычислительной математики (Лакса–Рябенского–Филиппова) о связи этих трех понятий.
- основные методы исследования устойчивости разностных схем: для эволюционных уравнений спектральный признак устойчивости фон Неймана, метод энергетических неравенств Самарского для исследования устойчивости двухслойных разностных схем, условие Куранта–Фридрихса–Леви о соотношении областей зависимости дифференциальной и разностных задач, сеточный принцип максимума, а для исследования устойчивости неэволюционных уравнений применение непосредственно второго определения устойчивости;
- основные методы численного решения разностных уравнений и аппарат исследования разностных схем на сходимость для численного решения основных типов уравнений в частных производных: гиперболических, параболических, эллиптических;
- методы исследования двухслойных разностных схем на монотонность, теорема Годунова; понятие о диссипативной и дисперсионной ошибке разностной схемы при решении гиперболических систем уравнений в частных производных;
- основные сведения о численном решении системы уравнений газовой динамики, корректности постановки краевых условий, сильных и слабых разрывах, условиях Гюгонио, монотонности и консервативности разностных схем; понятие о ENO-, WENO- и TVD-схемах;
- методы расщепления и приближенной факторизации для решения задач математической физики большой пространственной размерности;
- методы нахождения численного решения интегральных уравнений, понятие о некорректно поставленных задачах, пространствах Соболева; методы регуляризации некорректно поставленных задач.

Уметь:

- применять аппарат исследования разностных схем на сходимость для основных типов уравнений в частных производных;

- на практике применять численные алгоритмы при решении типовых задач, уметь сравнивать различные численные методы между собой по набору адекватных критериев, применять полученные знания в конкретной области математического моделирования;

- численно решать интегральные уравнения Вольтерры и Фредгольма второго рода

Владеть:

- численными методами решения основных задач математической физики;
- умением оценивать эффективность и точность численного метода для выбора наиболее эффективного алгоритма согласно критериям проблемной области;
- навыками моделирования прикладных задач численными методами.

Приобрести опыт:

- построения численных алгоритмов решения задач математической физики и оценки их эффективности;
- практической реализации ряда изученных алгоритмов на ряде тестовых задач.

3. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

3.1. Структура дисциплины

Распределение трудоемкости дисциплины по видам учебных работ

| Вид учебной работы | Трудоемкость | |
|--|--------------|-----------|
| | общая | |
| | зач.ед. | час. |
| ОБЩАЯ ТРУДОЕМКОСТЬ по Учебному плану | 2 | 72 |
| Лекции (Л) | | 4 |
| Практические занятия (ПЗ) | – | – |
| Семинары (С) | | 10 |
| Самоподготовка (проработка и повторение лекционного материала и материала учебников и учебных пособий, подготовка к семинарским и практическим занятиям) и самостоятельное изучение тем дисциплины | | 22 |
| Вид контроля: экзамен | | 36 |

3.2. Содержание разделов дисциплины

Общее содержание дисциплины

| № раздела | Наименование раздела | Содержание раздела | Форма текущей аттестации |
|-----------|---|--|--------------------------|
| 1. | Постановка задач для основных типов уравнений в частных производных. Методы построения разностных уравнений | Постановка Постановка задач для основных типов уравнений в частных производных: гиперболического, параболического и эллиптического типов. Основные методы построения разностных схем для решения уравнений математической физики: метод конечных разностей, метод прямых, интерполяционно-характеристический метод, интегро-интерполяционный, конечных объемов и др. | О, ДЗ |
| 2. | Основные понятия теории разностных | Основные понятия теории разностных схем: сеточная функция, сходимость, аппроксимация, | О, ДЗ |

| | | | |
|----|---|--|-------|
| | схем и связь между ними. | устойчивость. Теорема Лакса–Рябенского–Филиппова о связи аппроксимации, устойчивости и сходимости. Основные методы исследования устойчивости разностных схем: для эволюционных уравнений спектральный признак устойчивости фон Неймана, метод энергетических неравенств Самарского для исследования устойчивости двухслойных разностных схем, условие Куранта–Фридрихса–Леви о соотношении областей зависимости дифференциальной и разностных задач, сеточный принцип максимума, а для исследования устойчивости неэволюционных уравнений применение непосредственно второго определения устойчивости. | |
| 3. | Методы численного решения уравнения переноса и систем уравнений гиперболического типа | Простейшие разностные схемы. Аппроксимация и устойчивость. Теорема о монотонности двухслойной разностной схемы. Теорема Годунова. Гиперболическая и параболическая форма первого дифференциального приближения. Диссипативная и дисперсионная ошибки на примере схем "явный левый уголок" и схемы Лакса–Вендроффа. Гиперболичность системы уравнений в частных производных. Инварианты Римана. Корректность постановки краевых условий для уравнений в частных производных гиперболического типа. | О, ДЗ |
| 4. | Квазилинейное уравнение переноса. | Квазилинейное уравнение переноса (уравнение Хопфа) и понятие о сильных и слабых разрывах. Дивергентная и характеристическая форма записи дифференциального уравнения. Понятие о консервативности разностной схемы. Обобщение разностных схем, построенных для уравнения переноса, на случай уравнения Хопфа. Вводные понятия о схемах для системы уравнений газовой динамики, сильные и слабые разрывы в газовой динамике, условия Гюнио. Монотонность разностных схем, ENO-, WENO- и TVD-схемы. | О, ДЗ |
| 5. | Уравнение теплопроводности. | Построение разностных схем для уравнений параболического типа, устойчивость явных схем. Применение метода энергетических неравенств для исследования устойчивости разностных схем. | О, ДЗ |
| 6. | Уравнения в частных производных эллиптического типа | Устойчивость схемы "крест" непосредственно по определению. Сеточный принцип максимума для уравнений эллиптического типа. Мажоранта Гершгорина. Проблема численного решения сеточных задач эллиптического типа и связь с методами вычислительной линейной алгебры. Сравнение эффективности различных методов. | О, ДЗ |
| 7. | Методы расщепления задач большой размерности | Метод переменных направлений, метод расщепления по физическим процессам, метод двуциклического покомпонентного расщепления, приближенная факторизация. | О, ДЗ |
| 8. | Интегральные уравнения | Численные методы решения интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерры 2 рода: сеточные методы метод Галеркина, метод наименьших квадратов, метод коллокации. Некорректные задачи. Метод регуляризации Тихонова. | О, ДЗ |

Примечание: О – опрос, Д – дискуссия (диспут, круглый стол, мозговой штурм, ролевая игра), ДЗ – домашнее задание (эссе и пр.). Формы контроля не являются жесткими и могут быть заменены преподавателем на другую форму контроля в зависимости от контингента обучающихся. Кроме того, на занятиях семинарских может

проводится работа с нормативными документами, изданиями средств информации и прочее, что также оценивается преподавателем.

3.3. Лекционные занятия

| № занятия | № Раздела | Краткое содержание темы занятия | Кол-во часов |
|--------------|-----------|---|--------------|
| 1. | 4 | Методы построения и исследования разностных схем для уравнений в частных производных | 2 |
| 2. | 5 | Методы расщепления задач большой размерности и интегральные уравнения. Некорректные задачи. Метод Регуляризации Тихонова. | 2 |
| ВСЕГО | | | 4 |

3.4. Семинарские занятия

| № занятия | № Раздела (темы) | Краткое содержание темы занятия | Кол-во часов |
|--------------|------------------|---|--------------|
| 3. | 1 | Задачи по теме: Разностные схемы для уравнения переноса. | 2 |
| 4. | 2 | Задачи по теме: Системы уравнений в частных производных гиперболического типа. | 2 |
| 5. | 3 | Задачи по теме: Волновое уравнение, система уравнений акустики. Уравнение теплопроводности. Разностные схемы, исследование сходимости. | 2 |
| 6. | 4 | Задачи по теме: Разностные уравнения для дифференциальных задач эллиптического типа. Методы решения сеточных уравнений. Связь с вычислительной линейной алгеброй. | 2 |
| 7. | 5 | Задачи по теме: Методы расщепления задач большой размерности и интегральные уравнения. | 2 |
| ВСЕГО | | | 10 |

4. ТЕКУЩАЯ И ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АТТЕСТАЦИЯ. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Текущая аттестация аспирантов. Текущая аттестация аспирантов проводится в соответствии с локальным актом ФИЦ ИПМ им. М.В. Келдыша РАН — Положением о текущей, промежуточной и итоговой аттестации аспирантов ФГБУН ИПМ им. М.В. Келдыша РАН по программам высшего образования – программам подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре, — и является обязательной.

Текущая аттестация по дисциплине проводится в форме опроса, сдачи ряда учебных программ по всем разделам курса, а также оценки вопроса–ответа в рамках участия обучающихся в дискуссиях и различных контрольных мероприятиях по оцениванию фактических результатов обучения, осуществляемых преподавателем, ведущим дисциплину. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины см. ниже.

Объектами оценивания выступают:

- учебная дисциплина – активность на занятиях, своевременность выполнения различных видов заданий, посещаемость занятий;
- степень усвоения теоретических знаний и уровень овладения практическими умениями и навыками по всем видам учебной работы, проводимых в рамках семинаров, практических занятий и самостоятельной работы.

Оценивание обучающегося на занятиях осуществляется с использованием нормативных оценок по 4-х бальной системе (5 – отлично, 4 – хорошо, 3 – удовлетворительно, 2 – неудовлетворительно).

Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.

| Форма контроля знаний | Вид аттестации | Примечание |
|--|-----------------------|--|
| проверочные работы в течение всего курса, прием домашних заданий в форме практической реализации изученных методов | текущая | Ниже приведены перечени рекомендуемых задач и контрольных вопросов |
| экзамен | итоговая | |

Примерный перечень рекомендуемых контрольных вопросов для оценки текущего уровня успеваемости аспиранта:

1. Методы построения разностных схем для уравнений в частных производных: конечно-разностные, метод неопределенных коэффициентов, интегро-интерполяционные, сеточно-характеристические, метод прямых.
2. Теорема Лакса-Рябенького-Филиппова. Отличия исследования устойчивости эволюционных задач от неэволюционных. Условие Куранта-Фридрихса-Леви о соответствии областей зависимости дифференциальной и разностной задач.
3. Спектральный признак устойчивости. Примеры исследования устойчивости разностных схем на основе спектрального признака.
4. Метод энергетических неравенств Самарского. Исследование устойчивости двухслойных схем с весами для уравнения теплопроводности на основе данного метода.
5. Основные разностные схемы для решения уравнения переноса: явные и неявные схемы "уголок", полностью симметричная схема, схема Бима-Уорминга, схемы Лакса и Лакса-Вендроффа. Аппроксимация, устойчивость, монотонность. Теорема Годунова.
6. Основные разностные схемы для решения квазилинейного уравнения переноса (уравнения Хопфа): схема Куранта-Изаксона-Риса, схемы Лакса и Лакса-Вендроффа, нецентральные схемы Мак-Кормака. Аппроксимация, устойчивость. Доказать, что в линейном случае последние две схемы переходят в схему Лакса-Вендроффа для уравнения переноса.
7. Дивергентная и характеристическая форма записи квазилинейного уравнения Хопфа. Понятие о сильном и слабом разрыве на примере уравнения Хопфа. Консервативность разностной схемы.
8. Инварианты Римана гиперболической системы уравнений в частных производных. Корректная постановка краевых условий для линейных гиперболических систем.
9. Волновое уравнение и переход к системе уравнений акустики. Девятиточечная параметрическая схема для волнового уравнения и двухслойная двухпараметрическая схема для системы уравнений акустики. Аппроксимация, устойчивость схем.
10. Основные разностные схемы для решения одномерных уравнений параболического типа. Монотонность разностной схемы на примере двухслойной разностной схемы. Схема Кранка-Николсон.
11. Проблема численного решения задач эллиптического типа и связь с методами вычислительной линейной алгебры. Доказательство устойчивости схемы "крест" для двумерного уравнения Лапласа и Пуассона. Мажоранта Гершгорина.
12. Методы решения сеточных уравнений при аппроксимации задач эллиптического типа. Метод установления и разностные методы на его основе: метод простой итерации с оптимальным параметром. Исследование эволюции невязки.

13. Методы решения сеточных уравнений при аппроксимации задач эллиптического типа: метод простой итерации с чебышевским набором параметров. Эффективность метода.
14. Методы решения сеточных уравнений при аппроксимации задач эллиптического типа: метод переменных направлений в случае двух и трех пространственных измерений. Отличия в свойствах устойчивости метода в этих двух случаях.
15. Методы решения сеточных уравнений при аппроксимации задач эллиптического типа: попеременно–треугольный метод. Устойчивость и схема реализации.
16. Методы решения сеточных уравнений при аппроксимации задач эллиптического типа: метод последовательной верхней релаксации с оптимальным параметром.
17. Сравнение эффективности различных методов решения сеточных уравнений при аппроксимации задач эллиптического типа.
18. Метод расщепления по физическим процессам для решения задач математической физики.
19. Метод двуциклического покомпонентного расщепления для решения задач математической физики.
20. Приближенная факторизация при решении задач математической физики. Интегрируемая факторизация.
21. Численные методы решения интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерры 2 рода: сеточные методы метод Галеркина, метод наименьших квадратов, метод коллокации.
22. Некорректные задачи. Метод регуляризации Тихонова.

Примерный перечень рекомендуемых контрольных задач для оценки текущего уровня успеваемости аспиранта:

Задачи по изучаемым темам можно найти в задачнике [3] из списка рекомендуемой литературы. Задачи, используемые для оценки успеваемости аспирантов, делятся на теоретические и практические. По трем из больших разделов программы должно быть выполнено не менее одной практической задачи, источником которых является [3]. Теоретические задачи тоже будут взяты преимущественно из этого источника.

Итоговая аттестация аспирантов. Итоговая аттестация аспирантов по дисциплине проводится в соответствии с локальным актом ФИЦ ИПМ им. М.В. Келдыша РАН – Положением о текущей, промежуточной и итоговой аттестации аспирантов ФИЦ ИПМ им. М.В. Келдыша РАН по программам высшего образования – программам подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре и является обязательной.

Итоговая аттестация по дисциплине осуществляется в форме зачета в период зачетно-экзаменационной сессии в соответствии с Графиком учебного процесса по приказу (распоряжению заместителю директора по научной работе). Обучающийся допускается к зачету в случае выполнения аспирантом всех учебных заданий и мероприятий, предусмотренных настоящей программой. В случае наличия учебной задолженности (пропущенных занятий и (или) невыполненных заданий) аспирант отрабатывает пропущенные занятия и выполняет задания.

Оценивание обучающегося на промежуточной аттестации осуществляется с использованием нормативных оценок на зачете – зачет, незачет.

Оценивание аспиранта на промежуточной аттестации в форме экзамена

| Оценка | Требования к знаниям и критерии выставления оценок |
|----------|--|
| Неудовл. | основное содержание учебного материала не раскрыто; допущены грубые ошибки в определении понятий и при использовании терминологии; не даны ответы на дополнительные вопросы. |
| Удовл. | показано владение основными понятиями курса на уровне определений и основных теорем; однако в изложении материала присутствуют пропуски, логические неточности, упущены детали, отсутствует знание базовых терминов; при неточностях задаются дополнительные вопросы. |
| Хорошо | при неточностях задаются дополнительные вопросы. |
| Отлично | Показано прекрасное владение как базовыми, так и вспомогательными понятиями курса, изложение материала полно и логично. |

5. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Основная литература

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. 3-е изд., испр., М.: Наука, 1989, 616с.
2. Бахвалов Н.С. Численные методы. М., Наука, 1975, 630с.

Дополнительная литература и Интернет-ресурсы

3. Аристова Е.Н., Лобанов А.И. Практические занятия по вычислительной математике в МФТИ. Часть II. М., МФТИ, 2015, 309с.
https://mipt.ru/education/chair/computational_mathematics/study/materials/compmath/other/Aristova_Zavyalova_Lobanov_2014.pdf
4. Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. М.: Мир, 2001, 429с.
5. Галанин М.П., Савенков Е.Б. Методы численного анализа математических моделей. Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, М., 2010, 590с.
6. Калиткин Н.Н., Корякин П.В. Численные методы. Книга 2. Методы математической физики. М.: изд. центр "Академия", 2013, 303 с.

6. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Для обеспечения интерактивных методов обучения для чтения лекций требуется аудитория с мультимедиа (возможен вариант с интерактивной доской) или белая доска под фломастеры.

Для проведения дискуссий и круглых столов, возможно, использование аудиторий со специальным расположением столов и стульев.

ИСПОЛНИТЕЛИ (разработчики программы):

Аристова Е.Н., ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, зав. сект., д.ф.-м.н.