

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ ИМ. М.В. КЕЛДЫША  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК»**

---

**Утверждена**

Ученым советом ФИЦ ИПМ

им. М.В. Келдыша РАН,

протокол № \_\_ от «\_\_» \_\_\_\_\_ 2018\_

г.

Заместитель директора

\_\_\_\_\_ А.Л. Афенди́ков

(подпись, расшифровка подписи)

«\_\_» \_\_\_\_\_ 2018 г.

# **РАБОЧАЯ ПРОГРАММА**

**УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

Дифференциальные уравнения

**Направление подготовки**

01.06.01 – «Математика и Механика»

**Профили (направленности программы)**

01.01.07– «Вычислительная математика»

**Квалификация выпускника**

Исследователь. Преподаватель-исследователь

**Форма обучения**

очная

Москва, 2018

**Направление подготовки:** 01.06.01 — Математика и Механика

**Профиль (направленность программы):** 01.01.07 – «Вычислительная математика»

**Дисциплина:** Дифференциальные уравнения.

**Форма обучения:** очная

Рабочая программа составлена с учетом ФГОС ВО по направлению подготовки 01.06.01 – «Математика и Механика», утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 30 июля 2014 г. N 866, зарегистрировано в Минюсте Российской Федерации 20 августа 2014 г. N 33837, и Программы-минимум кандидатского экзамена по специальности, утвержденной приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 8 октября 2007 года № 274 (зарегистрировано Минюстом Российской Федерации 19 октября 2007 года № 10363).

#### **РАБОЧАЯ ПРОГРАММА РЕКОМЕНДОВАНА**

Ученым советом ФИЦ ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, протокол № \_\_ от «\_\_» \_\_\_\_\_ 2018 г.  
Заместитель директора А.Л. Афендииков.

**ИСПОЛНИТЕЛЬ** (разработчик программ):

Веденяпин В.В., ведущий научный сотрудник ИПМ им. М.В.Келдыша РАН

Заведующий аспирантурой \_\_\_\_\_ / Меньшов И.С. /

## Оглавление

АННОТАЦИЯ .....	4
1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ.....	4
2. ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ.....	4
3. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ.....	5
3.1. Структура дисциплины.....	5
3.2. Содержание разделов дисциплины .....	6
3.3. Семинарские занятия .....	6
4. ТЕКУЩАЯ И ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АТТЕСТАЦИЯ. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ.....	7
5. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ.....	9
6. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ.....	11

## АННОТАЦИЯ

Дисциплина «Дифференциальные уравнения» реализуется в рамках Блока 1 Основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре Федерального исследовательского центра Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (ИПМ им. М.В. Келдыша РАН) по направлению подготовки 01.06.01 — Математика и Механика».

Рабочая программа разработана с учетом требований ФГОС ВО по направлению подготовки 01.06.01 — математика и механика», утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 30 июля 2014 г. N 866, зарегистрировано в Минюсте Российской Федерации 20 августа 2014 г. N 33837, и Программы-минимум кандидатского экзамена по специальности, утвержденной приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 8 октября 2007 года № 274 (зарегистрировано Минюстом Российской Федерации 19 октября 2007 года № 10363).

Основным источником материалов для формирования содержания программы являются: материалы конференций, симпозиумов, семинаров, Интернет-ресурсы, научные издания и монографические исследования и публикации.

Общая трудоемкость дисциплины по учебному плану составляет 2 зач.ед. (72 часа), из них лекций – 4 часа, семинарских занятий – 8 часов, практических занятий – 0 часов и самостоятельной работы – 60 часа. Дисциплина реализуется на 1-м курсе, во 2-м семестре, продолжительность обучения – 1 семестр.

Текущая аттестация проводится не менее 2 раз в соответствии с заданиями и формами контроля, предусмотренные настоящей программой.

Промежуточная оценка знания осуществляется в период зачетно-экзаменационной сессии в форме зачета.

### 1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

#### Цели и задачи дисциплины «Дифференциальные уравнения»

**Цель:** освоение фундаментальных знаний и компетенций, которые позволят представлять и разрабатывать методами дифференциальных уравнений модели физико-химических процессов и их дискретные модели в удобном виде, а также владеть математическим аппаратом, позволяющим выбрать наиболее правильную модель, аналитически исследовать и оценивать её свойства.

#### Задачи:

- освоить основной математический аппарат, позволяющий выводить дифференциальные уравнения физико-химических процессов;
- практическое освоение накопленных по дисциплине знаний при использовании и решении дифференциальных уравнений.
- стимулирование к самостоятельной деятельности по освоению дисциплины.

### 2. ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Процесс изучения дисциплины «Дифференциальные уравнения» направлен на формирование компетенций или отдельных их элементов в соответствии с ФГОС ВО по направлению подготовки 01.06.01 — математика и механика, утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 30 июля 2014 г. N 866, зарегистрировано в Минюсте Российской Федерации 20 августа 2014 г. N 33837

**а) универсальные (УК):** не предусмотрено

**б) общепрофессиональных (ОПК):** не предусмотрено

**в) профессиональных (ПК):** Способность к исследованиям математическими методами математических проблем в области механики и электродинамики сплошных сред (ПК-1), Способность разработки соответствующего аппарата в механике (ПК-2), Способность решать математические проблемы статистической физики (ПК-3).

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

**Знать:**

- основные понятия дифференциальных уравнений, эргодической теории, динамических систем и уравнения Лиувилля.
- основные методы решения дифференциальных уравнений.
- основные математические методы качественного исследования поведения дифференциальных уравнений.

**Уметь:**

- решать линейные дифференциальные уравнения и исследовать нелинейные.
- уверенно проводить качественную оценку поведения дифференциальных уравнений.

**Владеть:**

- навыками асимптотической оценки поведения решений.
- основными понятиями эргодической теории.
- навыками исследования основных свойств моделей физико-химической теории.

**Приобрести опыт:**

- построения моделей физико-химических процессов;
- исследования поведения дифференциальных уравнений и их уравнений Лиувилля.

### 3. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

#### 3.1. Структура дисциплины

Распределение трудоемкости дисциплины по видам учебных работ

Вид учебной работы	Трудоемкость	
	общая	
	зач.ед.	час.
<b>ОБЩАЯ ТРУДОЕМКОСТЬ</b> по Учебному плану	<b>2</b>	<b>72</b>
Лекции (Л)		<b>4</b>
Практические занятия (ПЗ)	-	-
Семинары (С)		<b>8</b>
Самоподготовка (проработка и повторение лекционного материала и материала учебников и учебных пособий, подготовка к семинарским и практическим занятиям) и самостоятельное изучение тем дисциплины		<b>60</b>
<b>Вид контроля: зачет</b>		

### 3.2. Содержание разделов дисциплины

#### Общее содержание дисциплины

№ раздела	Наименование раздела	Содержание раздела	Форма текущей аттестации
1.	Обыкновенные дифференциальные уравнения.	Линейные и нелинейные дифференциальные уравнения. Примеры уравнений химической кинетики и марковских процессов.	О, ДЗ
2.	Законы сохранения и функционалы Ляпунова.	Функция Ляпунова. Примеры: Н-функция, эргодическая теория и асимптотическое поведение.	О, ДЗ
3.	Уравнения Гамильтона.	Элементы вариационного исчисления. Лагранжиан и уравнения Эйлера—Лагранжа. Гамильтониан и уравнения Гамильтона. Эргодическая теорема и экстремаль Больцмана.	О, ДЗ
4.	Линейные и нелинейные эллиптические уравнения..	Уравнение Лапласа и эллиптические уравнения. Гармонические функции. Принцип максимума. Получение нелинейного эллиптического уравнения из уравнений типа Власова и их свойства.	О, ДЗ
5.	Линейные и нелинейные параболические и гиперболические уравнения..	Уравнение теплопроводности и параболические уравнения. Волновое уравнение и гиперболические уравнения. Фундаментальное решение. Задача Коши. Получение нелинейных параболических и гиперболических уравнений из кинетических уравнений Лиувилля, Больцмана и Власова и их свойства.	О, ДЗ

**Примечание:** О – опрос, Д – дискуссия (диспут, круглый стол, мозговой штурм, ролевая игра), ДЗ – домашнее задание (эссе и пр.). Формы контроля не являются жесткими и могут быть заменены преподавателем на другую форму контроля в зависимости от контингента обучающихся. Кроме того, на занятиях семинарских может проводиться работа с нормативными документами, изданиями средств информации и прочее, что также оценивается преподавателем.

### 3.3. Лекционные занятия

№ занятия	№ Раздела	Краткое содержание темы занятия	Кол-во часов
1.	1,2,3	Свойства линейных и нелинейных дифференциальных уравнений. Связь обыкновенного дифференциального уравнения и его уравнения Лиувилля, уравнение неразрывности. Эргодические теоремы фон Неймана и Рисса. Экстремаль Больцмана, функционал Ляпунова и асимптотическое поведение.	2
2.	4,5	Линейные и нелинейные эллиптические, параболические и гиперболические уравнения, их вывод из кинетической теории и свойства.	2
<b>ВСЕГО</b>			<b>4</b>

### 3.4. Семинарские занятия

№ занятия	№ Раздела (темы)	Краткое содержание темы занятия	Кол-во часов
3.	1	Задачи на тему линейные и нелинейные дифференциальные уравнения. Примеры уравнений химической кинетики и марковских процессов	2
4.	2,3	Задачи по темам: Функция Ляпунова. Примеры: Н-функция, эргодическая теория и асимптотическое поведение. Элементы вариационного исчисления. Лагранжиан и уравнения Эйлера—Лагранжа. Гамильтониан и уравнения Гамильтона. Эргодическая теорема и экстремаль Больцмана. Одномерные гамильтоновы системы.	2
5.	3	Задачи по темам: Уравнение Лапласа и эллиптические уравнения.	2

		Гармонические функции. Принцип максимума. Получение нелинейного эллиптического уравнения из уравнений типа Власова и их свойства.	
6.	4	Задачи по темам: Уравнение теплопроводности и параболические уравнения. Волновое уравнение и гиперболические уравнения. Фундаментальное решение. Задача Коши. Получение нелинейных параболических и гиперболических уравнений из кинетических уравнений Лиувилля, Больцмана и Власова и их свойства.	2
<b>ВСЕГО</b>			<b>8</b>

#### **4. ТЕКУЩАЯ И ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АТТЕСТАЦИЯ. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**

**Текущая аттестация аспирантов.** Текущая аттестация аспирантов проводится в соответствии с локальным актом ФИЦ ИПМ им. М.В. Келдыша РАН - Положением о текущей, промежуточной и итоговой аттестации аспирантов ФИЦ ИПМ им. М.В. Келдыша РАН по программам высшего образования – программам подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре и является обязательной.

Текущая аттестация по дисциплине проводится в форме опроса, а также оценки вопроса-ответа в рамках участия обучающихся в дискуссиях и различных контрольных мероприятиях по оцениванию фактических результатов обучения, осуществляемых преподавателем, ведущим дисциплину. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины см. ниже.

Объектами оценивания выступают:

- учебная дисциплина – активность на занятиях, своевременность выполнения различных видов заданий, посещаемость занятий;
- степень усвоения теоретических знаний и уровень овладения практическими умениями и навыками по всем видам учебной работы, проводимых в рамках семинаров, практических занятий и самостоятельной работы.

Оценивание обучающегося на занятиях осуществляется с использованием нормативных оценок по 4-х бальной системе (5-отлично, 4-хорошо, 3-удовлетворительно, 2-не удовлетворительно).

##### **Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.**

<b>Форма контроля знаний</b>	<b>Вид аттестации</b>	<b>Примечание</b>
проверочные работы в течение всего курса	текущая промежуточная	Ниже приведены перечни рекомендуемых задач и контрольных вопросов
зачет	итоговая	Прилагается список вопросов

Примерный перечень рекомендуемых контрольных вопросов для оценки **текущего контроля** успеваемости студента:

1. Нарисовать фазовый портрет уравнения двумерной системы дифф. уравнения и дать описание поведения уравнения Лиувилля.
2. Нарисовать фазовый портрет одномерной гамильтоновой системы, решить её и дать описание поведения уравнения Лиувилля.
3. Рост энтропии для уравнения Ливилля, энтропия по Пуанкаре.
4. Экстремаль Больцмана и эргодические теоремы Фон-Неймана и Рисса.

5. Дискретное время для уравнения Лиувилля. Теорема Рисса.
6. Непрерывное время. Теорема фон Неймана.
7. Функционалы Ляпунова и Н-теорема.
8. Дискретная модель уравнения Больцмана: Н-функция как функционал Ляпунова.
9. Уравнения физико-химической кинетики: Н-функция как функционал Ляпунова
10. Самосогласованные поля. Уравнение Власова и нелинейные гиперболические и эллиптические уравнения..
11. Уравнение Власова-Пуассона и эллиптические уравнения в энергетической подстановке.
12. Уравнение Власова-Максвелла: нелинейные гиперболические и эллиптические уравнения в энергетической подстановке .
13. Энергетическая подстановка в уравнение Лиувилля..
14. Гидродинамическая подстановка в уравнение Лиувилля и в уравнение Власова: гиперболические уравнения.
15. Распределение Максвелла и получение систем гиперболических и параболических уравнений из кинетических уравнений Больцмана и Власова.

Примерный перечень рекомендуемых контрольных задач для оценки **текущего уровня** успеваемости студента:

#### Задача № 1.

Для системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = y^{\alpha+1}(1-x)^{2\beta+1}, \\ \frac{dx}{dt} = x^{\gamma+1}(y-1)^{2\delta+1} \end{cases}$$

1. Построить фазовый портрет.
2. Найти закон сохранения.
3. Уточнить поведение фазовых траекторий в окрестности особых точек.
4. Придумать интерпретацию своей системы как взаимодействие объектов двух типов (например, хищник-жертва)  $x(t)$  – число объектов первого типа, а  $y(t)$  – второго. Что можно сказать про  $H$ -теорему для этой системы.
5. Выписать уравнение Лиувилля для этой динамической системы и приближение гидродинамического типа, взяв  $x$  за координату, а  $y$  за скорость.
6. Определить, будет ли в нулевой момент времени перехлест, если  $V(x,0) = x$ .

#### Задача № 2.

Для заданного студенту значения  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{N}$  :

Описать движение материальной точки с потенциальной энергией  $U(x) = x^{2\beta}(x-3)^\alpha(x-5)^{\alpha+1}$  .

1. Выписать соответствующую динамическую систему. Найти закон сохранения.
2. Построить фазовый портрет. Сколько различных фазовых траекторий соответствуют уровню энергии  $E = 0$  ?
3. Уточнить поведение фазовых траекторий в окрестности особых точек.
4. Выписать уравнение Лиувилля для этой динамической системы и приближение гидродинамического типа.
5. Определить, будет ли в нулевой момент времени перехлест, если  $f(0, x, p) = \delta(p - x)$ .

#### Задача № 3.

1. Выписать систему, описывающую эволюцию концентраций частиц из  $n$  молекул:  $n = 1, 2, \dots, N$  , при условии, что присоединяется и отлетает от частиц по одной молекуле.



- Сечения коагуляции и частоты распада некоторые заданные функции  $n$ . Рассмотреть два случая: а) число молекул в системе постоянно, б) концентрация мономеров поддерживается постоянной за счет их ввода в систему. Выписать квантовый аналог уравнений.
2. Выписать закон сохранения. Выписать  $H$ -функции для случаев (а) и (б) и доказать  $H$ -теоремы.
  3. Ввести непрерывную функцию распределения и получить уравнение на нее. Записать это уравнение в таком виде, чтобы в него входила функция распределения и производные (частные) от нее все в одной и той же точке. Для мономеров записать отдельное уравнение.
  4. Ограничиться производными второго порядка и получить уравнение параболического типа.

**Итоговая аттестация аспирантов.** Итоговая аттестация аспирантов по дисциплине проводится в соответствии с локальным актом ФИЦ ИПМ им. М.В. Келдыша РАН – Положением о текущей, промежуточной и итоговой аттестации аспирантов ФИЦ ИПМ им. М.В. Келдыша РАН по программам высшего образования – программам подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре и является обязательной.

Итоговая аттестация по дисциплине осуществляется в форме зачета в период зачетно-экзаменационной сессии в соответствии с Графиком учебного процесса по приказу (распоряжению заместителю директора по научной работе). Обучающийся допускается к зачету в случае выполнения аспирантом всех учебных заданий и мероприятий, предусмотренных настоящей программой. В случае наличия учебной задолженности (пропущенных занятий и (или) невыполненных заданий) аспирант отрабатывает пропущенные занятия и выполняет задания.

Оценивание обучающегося на промежуточной аттестации осуществляется с использованием нормативных оценок на зачете – зачет, незачет.

#### Оценивание аспиранта на итоговой аттестации в форме зачета

Оценка	Требования к знаниям и критерии выставления оценок
Незачет	основное содержание учебного материала не раскрыто; допущены грубые ошибки в определении понятий и при использовании терминологии; не даны ответы на дополнительные вопросы.
Зачет	раскрыто содержание материала, даны корректные определения понятий; допускаются незначительные нарушения последовательности изложения; допускаются небольшие неточности при использовании терминов или в логических выводах; при неточностях задаются дополнительные вопросы.

Список воопосов к **ИТОВОМУ** зачету.

1. Линейные и нелинейные дифференциальные уравнения.

2. Примеры уравнений химической кинетики и марковских процессов.
3. Функция Ляпунова.
4. H-функция, эргодическая теория и асимптотическое поведение.
5. Элементы вариационного исчисления.
6. Лагранжиан и уравнения Эйлера—Лагранжа.
7. Гамильтониан и уравнения Гамильтона.
8. Эргодическая теорема и экстремаль Больцмана.
9. Уравнение Лапласа и эллиптические уравнения.
10. Гармонические функции.
11. Принцип максимума.
12. Получение нелинейного эллиптического уравнения из уравнений типа Власова и их свойства.
13. Уравнение теплопроводности и параболические уравнения.
14. Волновое уравнение и гиперболические уравнения.
15. Фундаментальное решение.
16. Задача Коши.
17. Получение нелинейных параболических и гиперболических уравнений из кинетических уравнений Лиувилля, Больцмана и Власова и их свойства.

## 5. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### *Основная литература*

1. Владимиров В.С., Жаринов В.В.. Уравнения математической физики., М., Наука, 2000.
2. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ижевск: Ижевская республиканская типография, 2000. – 368 с.

### *Дополнительная литература и Интернет-ресурсы*

1. Больцман Л., Избранные труды., М., Наука, 1984.
2. Максвелл Д.К. Труды по кинетической теории. М., Бином, 2011.
3. Арнольд В.И. Математические методы классической механики.
4. Козлов В.В. Тепловое равновесие по Гиббсу и Пуанкаре. М., 2002.
5. Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д., Элементы прикладной математики. М.,Наука, 1967.
6. Пуанкаре А. Замечания о кинетической теории газов. // Пуанкаре А. Избранные труды, М., Наука, 1974.
7. Веденяпин В.В. Кинетические уравнения Больцмана и Власова.,М., Физматлит,2001.
8. Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979.
9. Зельдович Я.Б., Мышкин А.Д. Элементы математической физики. М.: Глав- ная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука». 1973.

## **6. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ**

Для обеспечения интерактивных методов обучения для чтения лекций требуется аудитория с мультимедиа (возможен вариант с интерактивной доской).

Для проведения дискуссий и круглых столов, возможно, использование аудиторий со специальным расположением столов и стульев.

**ИСПОЛНИТЕЛИ** (разработчики программы):

Веденяпин В.В., ИПМ им. М.В. Келдыша, ведущий научный сотрудник, д.ф.-м.н.